Contents

1

1.1

(1)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7935 \\ 0 & 1 & 5796 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5796 \\ 1 & -1 & 2139 \end{pmatrix} && (1)\\
&\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2139 \\ -2 & 3 & 1518 \end{pmatrix} && (2)\\
&\to \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1518 \\ 3 & -4 & 621 \end{pmatrix} && (3)\\
&\to \begin{pmatrix} 3 & -4 & 621 \\ -8 & 11 & 276 \end{pmatrix} && (4)\\
&\to \begin{pmatrix} -8 & 11 & 276 \\ 19 & -26 & 69 \end{pmatrix} && (5)\\
&\to \begin{pmatrix} 19 & -26 & 69 \\ -84 & 115 & 0 \end{pmatrix} && (6)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \gcd(7935, 5796) = 69$

(2)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1221 \\ 0 & 1 & 483 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 483 \\ 1 & -2 & 255 \end{pmatrix} && (7)\\
&\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 255 \\ -1 & 3 & 228 \end{pmatrix} && (8)\\
&\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 228 \\ 2 & -5 & 27 \end{pmatrix} && (9)\\
&\to \begin{pmatrix} 2 & -5 & 27 \\ -17 & 43 & 12 \end{pmatrix} && (10)\\
&\to \begin{pmatrix} -17 & 43 & 12 \\ 36 & -91 & 3 \end{pmatrix} && (11)\\
&\to \begin{pmatrix} 36 & -91 & 3 \\ -161 & 407 & 0 \end{pmatrix} && (12)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow 36 \cdot 1221 + (-91) \cdot 483 = 3 = \gcd(1221, 483)$

1.2

(1)

$\overline{4} + \overline{5} = \overline{9}, \quad 9 \equiv 2 \mod 7 \Longrightarrow \overline{4} + \overline{5} = \overline{2}$

(2)

$\overline{2} - \overline{5} = \overline{-3}, \quad -3 \equiv 4 \mod 7 \Longrightarrow \overline{2} - \overline{5} = \overline{4}$

(3)

$\overline{4} \times \overline{5} = \overline{20}, \quad 20 \equiv 6 \mod 7 \Longrightarrow \overline{4} \times \overline{5} \equiv \overline{6}$

1.3

(1)

$$\begin{cases} 5 \times 1 = 5 \equiv 5 \mod 6 \\ 5 \times 2 = 10 \equiv 4 \mod 6 \\ 5 \times 3 = 15 \equiv 3 \mod 6 \\ 5 \times 4 = 20 \equiv 2 \mod 6 \\ 5 \times 5 = 25 \equiv 1 \mod 6 \end{cases} \Longrightarrow \overline{5} \times \overline{5} = \overline{1} = e_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}$$

(2)

$\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0} \notin \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ から、体ではない

1.4

$\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), A + B \in M_2(\mathbb{R}), AB, BA \in M_2(\mathbb{R})$
$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + A = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$ から、$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ 単位元
$\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると、$A^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$
よって $(M_2(\mathbb{R}), +)$ は逆元をもつ
$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix} && (13) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) && (14) \end{aligned}$$

また、$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} && (15) \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} && (16) \end{aligned}$$

以上より、$(M_2(\mathbb{R}), +)$ は加法に関する交換群である
$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), EA = AE = E$ から、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の単位元
$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$= \begin{bmatrix} a_3(a_1a_2+b_1c_2)+c_3(a_1b_2+b_1d_2) & b_3(a_1a_2+b_1c_2)+(a_1b_2+b_1d_2)d_3 \\ a_3(a_2c_1+c_2d_1)+c_3(b_2c_1+d_1d_2) & b_3(a_2c_1+c_2d_1)+(b_2c_1+d_1d_2)d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}\right) \tag{18}$$

よって、乗法に関して結合律が成立する.

$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & d_2+d_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1(a_2+a_3)+b_1(c_2+c_3) & a_1(b_2+b_3)+b_1(d_2+d_3) \\ (a_2+a_3)c_1+(c_2+c_3)d_1 & (b_2+b_3)c_1+d_1(d_2+d_3) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1+a_2)a_3+(b_1+b_2)c_3 & (a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)d_3 \\ a_3(c_1+c_2)+c_3(d_1+d_2) & b_3(c_1+c_2)+(d_1+d_2)d_3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

以上より、$(M_2(\mathbb{R}), \times)$ は分配律をみたす
以上より、$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ は環である

2

2.1

(1)

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(a \cdot b) \cdot c = (a-b)-c = a-b-c \tag{25}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a-(b-c) = a-b+c \tag{26}$$

$\implies (ab)c \neq a(bc)$

(2)

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$(a \cdot b) \cdot c = (ab+1)c+1 = abc+c+1 \tag{27}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a(bc+1)+1 = abc+a+1 \tag{28}$$

$\implies (ab)c \neq a(bc)$

(3)

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$(a \cdot b) \cdot c = \left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}abc \tag{29}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}bc\right) = \frac{1}{4}abc \tag{30}$$

$\Longrightarrow (ab)\,c = a\,(bc)$

2.2

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^\times$ とすると、$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \neq 0$ から、$\mathbb{Q}^\times$ で通常の乗法は閉である
$\forall q \in \mathbb{Q}^\times, q1 = 1q = q$ から $e_{\mathbb{Q}^\times} = 1$ は単位元である
$\forall q \in \mathbb{Q}^\times, q\frac{1}{q} = \frac{1}{q}q = 1 = e_{\mathbb{Q}^\times}$ から、$\frac{1}{q}$ は逆元である
$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^\times, (ab)\,c = abc = a\,(bc)$ から、結合律が成り立つ
以上より、$\mathbb{Q}^\times$ は群である

2.3

$0 \in \mathbb{Q}, \forall q \in \mathbb{Q}, 0 \cdot q = q \cdot 0 = 0 \neq 1 = e_{\mathbb{Q}}$ から 0 の逆元は存在しない、よって $(\mathbb{Q}, \times)$ は群ではない

2.4

(1)

$a \cdot b = -1$ とすると、$a + b + ab = -1 \iff (a+1)\,(b+1) = 0 \iff (a = -1) \vee (b = -1)$、これは $a, b \in \mathbb{R}/\{-1\}$ と矛盾するから、$\cdot$ は G での二項演算である

(2)

$\forall a \in G, \begin{cases} a \cdot e = a + e + ae = a \\ e \cdot a = e + a + ea = a \end{cases} \Longrightarrow e\,(a+1) = 0, a \neq -1$ から、単位元 $e_G = 0$
$\forall a \in G, \begin{cases} a \cdot a^{-1} = a + a^{-1} + aa^{-1} = e = 0 \\ a^{-1} \cdot a = a^{-1} + a = a^{-1}a = e = 0 \end{cases} \Longrightarrow a^{-1} = -\frac{a}{a+1}, a \neq -1$ から、逆元は存在する
$\forall a, b, c \in G$

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= (a + b + ab) \cdot c && (31) \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc && (32) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc && (33) \\ &= a \cdot (b + c + bc) && (34) \\ &= a \cdot (b \cdot c) && (35) \end{aligned}$$

よって、結合律は成立する．以上より、$(G, \cdot)$ は群である

2.5

Injective

$f(g) = f(g')$ とすると、$ga = g'a. a \in G$ かつ G は群であるから、$\exists a^{-1} \in G, s.t. aa^{-1} = a^{-1}a = e_G$ で両側の右辺に a^{-1} にかけると

$$ga \cdot a^{-1} = g'a \cdot a^{-1} \tag{36}$$
$$g = g' \tag{37}$$

Surjective

$\forall g \in G, g = fa^{-1}$ とすると、$f(g) = fa^{-1}a = f$ となるから、f は全射である

2.6

$\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in G$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \tag{38}$$
$$= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \in G \tag{39}$$

よって、G の演算は閉である

$\forall A \in G, AE = EA = A \Longrightarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$ は単位元である

$\forall A \in G, ad - bc \neq 0$ から、$\exists A^{-1} \in G, s.t. A^{-1}A = AA^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ から、逆元は存在する

$\forall \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \in G$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + c_2d_1 & b_2c_1 + d_1d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$= \begin{bmatrix} a_3(a_1a_2 + b_1c_2) + c_3(a_1b_2 + b_1d_2) & b_3(a_1a_2 + b_1c_2) + (a_1b_2 + b_1d_2)d_3 \\ a_3(a_2c_1 + c_2d_1) + c_3(b_2c_1 + d_1d_2) & b_3(a_2c_1 + c_2d_1) + (b_2c_1 + d_1d_2)d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) \tag{41}$$

よって、結合律が成り立つ、G は群である

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし、$\begin{cases} AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$ から、G は可換群ではない

3

3.1

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ に対し、$e = \overline{0}$

$$\begin{cases} 1\cdot\overline{0}=\overline{0} \\ 12\cdot\overline{1}=\overline{0} \\ 6\cdot\overline{2}=\overline{0} \\ 4\cdot\overline{3}=\overline{0} \\ 3\cdot\overline{4}=\overline{0} \\ 12\cdot\overline{5}=\overline{0} \\ 2\cdot\overline{6}=\overline{0} \\ 12\cdot\overline{7}=\overline{0} \\ 3\cdot\overline{8}=\overline{0} \\ 4\cdot\overline{9}=\overline{0} \\ 6\cdot\overline{10}=\overline{0} \\ 12\cdot\overline{11}=\overline{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left|\overline{0}\right|=1 \\ \left|\overline{1}\right|=12 \\ \left|\overline{2}\right|=6 \\ \left|\overline{3}\right|=4 \\ \left|\overline{4}\right|=3 \\ \left|\overline{5}\right|=12 \\ \left|\overline{6}\right|=2 \\ \left|\overline{7}\right|=12 \\ \left|\overline{8}\right|=3 \\ \left|\overline{9}\right|=4 \\ \left|\overline{10}\right|=6 \\ \left|\overline{11}\right|=12 \end{cases}$$

3.2

$i^1=i, i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i$ から、$\forall n>4, i^n=i^{n-4}$ があって、$C^\times$ は巡回群になる
よって、$\langle i\rangle=\{i,-1,-i,1\}$

3.3

(1)

$n\cdot 0=0\cdot n=0\in n\mathbb{Z}$
$\forall a=nk, b=nk'\in n\mathbb{Z}, a+b=nk+nk'=n\left(k+k'\right)\in n\mathbb{Z}$
$\forall a=nk\in n\mathbb{Z}, -a=-nk=n\left(-k\right)\in n\mathbb{Z}$
以上より、$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群である

(2)

$\det E=1\Longrightarrow E\in SL_n\left(\mathbb{C}\right)$
$\forall A,B\in SL_n\left(\mathbb{C}\right), \det\left(AB\right)=\det A\det B=1\cdot 1=1$
$\forall A\in SL_n\left(\mathbb{C}\right), \det A^{-1}=\det A=1\Longrightarrow A^{-1}\in SL_n\left(\mathbb{C}\right)$

3.4

$e^k=e\Longrightarrow e\in G_{(k)}$
$\forall a,b\in G_{(k)}, a^k=b^k=e, (ab)^k=a^kb^k=e\cdot e=e\Longrightarrow ab\in G_{(k)}$
$\forall a\in G_{(k)}, \left(a^{-1}\right)^k=\left(a^k\right)^{-1}=e^{-1}=e\Longrightarrow a^{-1}\in G_{(k)}$

3.5

$G=\mathbb{Z}$

$kx=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow G_{(k)}=\{0\}$
$x^k=kx\Longrightarrow\Longrightarrow G^{(k)=k\mathbb{Z}}$

$G=\mathbb{Q}$

$kx=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow G_{(k)}=\{0\}$
$x^k=kx, \forall q\in\mathbb{Q}, kq\in\mathbb{Q}\Longrightarrow G^{(k)}=\mathbb{Q}$

4

4.1

(1)

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \downarrow \sigma \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \downarrow \tau \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2)

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \sigma^{-1} \upharpoonleft\!\downharpoonright \sigma \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

から、$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(3)

$\sigma = (1\ 3)\,(2\ 5\ 4)$ から、$sgn\,(\sigma) = (-1)^{1+2} = -1$

4.2

$(1\ 2\ 3)^0 = id, (1\ 2\ 3)^1 = (1\ 2\ 3)\,, (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2)\,, (1\ 2\ 3)^3 = id$
$\langle (1\ 2\ 3) \rangle = \{id, (1\ 2\ 3)\,, (1\ 3\ 2)\}$

4.3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 8 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 2) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 2)\,(4\ 7)\,(6\ 8\ 9)$

4.4

(1)

$$\begin{aligned} (i_1\ i_l)\,(i_1\ i_{l-1}) \cdots (i_1\ i_2) &= (i_1\ i_l)\,(i_1\ i_{l-1}) \cdots (i_1\ 1_3) \begin{pmatrix} \cdots & i_1 & i_2 & \cdots & i_l & \cdots \\ \cdots & i_2 & i_1 & \cdots & i_l & \cdots \end{pmatrix} && (42) \\ &= \cdots && (43) \\ &= (i_1\ i_l) \begin{pmatrix} \cdots & i_1 & i_2 & \cdots & i_{l-1} & i_l & \cdots \\ \cdots & i_2 & i_3 & \cdots & i_l & i_1 & \cdots \end{pmatrix} && (44) \\ &= (i_1\ i_2\ i_3\ \cdots\ i_{l-1}\ i_l) && (45) \end{aligned}$$

(2)

$sgn\,(3\ 5\ 2\ 1\ 6) = (-1)^1 = -1$
別解：$3 > 5, 3 > 2, 3 > 1, 5 > 2, 5 > 1$ より、$sgn\,(3\ 5\ 2\ 1\ 6) = (-1)^5 = -1$

4.5

(1)

$S_3 = \{id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ で $A_3 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

(2)

$|S_3| = 6, |id| = 1, |(1\ 2)| = |(1\ 3)| = |(2\ 3)| = 2, |(1\ 2\ 3)| = |(1\ 3\ 2)| = 3$
$\forall x \in S_3, |x| \leq 3 \neq 6$ から、S_3 は巡回群ではない

4.6

(1)

$(i\ k)(i\ j) = (i\ j\ k), (1\ k\ j)(1\ k\ l) = (i\ j)(k\ l)$

(2)

$\forall (a\ b\ c), (a\ b\ c) = (a\ c)(a\ b)$ から $sgn(a\ b\ c) = sgn(a\ c) \cdot sgn(a\ b) = (-1) \cdot (-1) = 1$
よって、$(a\ b\ c) \in A_n$

(3)

$\forall \sigma \in A_n, \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m = (\sigma_1, \sigma_2) \cdots (\sigma_{m-1}, \sigma_m)$
$(i\ j)(i\ j) = id, (i\ k)(i\ j) = (i\ j\ k)$ から、$A \subset \langle (i\ j\ k) \rangle$

5

5.1

(1)

$H = \{(1), (1\ 2)\}$
$(1)\,H = H, (1\ 2)\,H = \{(1\ 2), (1)\} = H, (1\ 3)\,H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}, (2\ 3)\,H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
$(1\ 2\ 3)\,H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3)\}, (1\ 3\ 2)\,H = \{(1\ 3\ 2), (2\ 3)\}$

(2)

$G/H = \{H, (1\ 3)\,H, (2\ 3)\,H\}$

(3)

$(1), (1\ 3), (2\ 3)$

(4)

$[G : H] = 3$
$H, (1\ 3)\,H, (2\ 3)\,H$

5.2

(1)

$H=\{(1),(1\ 2)\}$
$H(1)=H, H(1\ 2)=\{(1\ 2),(1)\}=H, H(1\ 3)=\{(1\ 3),(1\ 3\ 2)\}, H(2\ 3)=\{(2\ 3),(1\ 2\ 3)\}$
$H(1\ 2\ 3)=\{(1\ 2\ 3),(2\ 3)\}, H(1\ 3\ 2)=\{(1\ 3\ 2),(1\ 3)\}$

(2)

$H\backslash G=\{H, H(1\ 3), H(2\ 3)\}$

(3)

$(1),(1\ 3),(2\ 3)$

(4)

$[G:H]=3$

5.3

$\forall a\in G, \forall h\in H\subset G$、$G$ は交換群であるから $ah=ha$
$\therefore aH=\{ah|h\in H\}=\{ha|h\in H\}=Ha$

5.4

Lagrange の定理より、$|H|\mid|G|=p$ であるから、$|H|=1$ または p
$|G|=p>1$ より、$\exists x\in G, s.t. x\neq e_G$、また $\langle x\rangle\subseteq G$. ここで (1) より、$\langle x\rangle=\{e_G\}$ または G があり、$x\neq e_G$ から、$\langle x\rangle=G$

6

6.1

(1)

$\forall g\in G, \forall h\in H\subset G$、$G$ は交換群であるから $gh=hg$ で $gH=\{gh|h\in H\}=\{hg|h\in H\}=Hg$
これより、$(gH)g^{-1}=(Hg)g^{-1}=Hgg^{-1}-=H$ があるから、$H\triangleleft G$

(2)

$\forall aH, bH\in G/H, (aH)(bH)=(ab)H\overset{a,b\in G}{=}(ba)H=(bH)(aH)$
よって、G/H も可換群である

6.2

$(1\ 3)H_1(1\ 3)^{-1}=(1\ 3)\{(1),(1\ 2)\}(1\ 3)=\{(1\ 3),(1\ 2\ 3)\}(1\ 3)=\{(1),(2\ 3)\}\neq H_1$
よって、$H_1 \not\triangleleft G$
$(1\ 2)H_2(1\ 2)^{-1}=(1\ 2)\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}(1\ 2)=\{(1\ 2),(2\ 3),(1\ 3)\}(1\ 2)=\{(1),(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 3)\}$
（後略）$H_2\triangleleft G$

6.3

$\forall g \in GL_n(\mathbb{C}), \forall h \in SL_n(\mathbb{C})$
$\det(ghg^{-1}) = \det(g)\det(h)\det(g^{-1}) \overset{\det(h)=1}{=} \det(g)\det(g^{-1}) = \det(gg^{-1}) = \det(E) = 1$
よって、$\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$． h の任意性より、$gHg^{-1} = H, H \triangleleft G$

6.4

$\sigma \in G$ とする. σ は偶置換のとき、$\forall h \in H, \sigma h \sigma^{-1}$ も偶置換であるから、$\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H$ で、$H \trianglelefteq G$
以下、σ を奇置換とすると、$\forall h \in H, h$ は偶置換であるから、$\sigma h \sigma^{-1}$ も必ず偶置換である、言い換えれば $\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H$ がある
以上、$\forall \sigma \in G, \forall h \in H, \sigma h \sigma^{-1} \subseteq H$ で、h の任意性より、$\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H, i.e. A_n = H \trianglelefteq G = S_n$
これより、$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G$ を奇置換とすると、$\sigma_2^{-1}\sigma_1$ は偶置換であるから、$\sigma_2^{-1}\sigma_1 \in H = A_n$
すると $H = H$ の左側で $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ をかけても $\sigma_2^{-1}\sigma_1 H = H \Longrightarrow \sigma_1 H = \sigma_2 H$
σ_1, σ_2 は任意に取るから、任意性より、$\forall \sigma \in G, \sigma H = (1\ 2)H$ で表せる
だから左剰余類分解は $\begin{cases} H & \sigma : even \\ (1\ 2)H & \sigma : odd \end{cases}$、$G/H = \{H, (1\ 2)H\}$

$$\begin{pmatrix} & H & (1\ 2)H \\ H & H & (1\ 2)H \\ (1\ 2)H & (1\ 2)H & H \end{pmatrix}$$

7

7.1

(1)

$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = f(x) \cdot f(y) = f(x)f(y)$ から f は準同型である

(2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= \{f(x) | x \in \mathbb{R}\} && (46) \\ &= \left\{e^{ix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\} && (47) \\ &= \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\} && (48) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \{x | f(x) = 1\} && (49) \\ &= \left\{x \middle| e^{ix} = 1\right\} && (50) \\ &= \{2n\pi | n \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z} && (51) \end{aligned}$$

7.2

$|\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| = 3, |\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = 4|, |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| < |\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}|$ より $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ への全射は存在しないから $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は同型ではない

7.3

(1)

f は準同型であるから

$$
\begin{aligned}
f\left(a^n\right) &= f(a)\, f\left(a^{n-1}\right) && (52)\\
&= f(a)^2\, f\left(a^{n-2}\right) && (53)\\
&= \cdots && (54)\\
&= f(a)^{n-1}\, f(a) && (55)\\
&= f(a)^n && (56)
\end{aligned}
$$

(2)

$\langle a\rangle = \left\{a, a^2, a^3, \cdots, a^n\right\}, \langle f(a)\rangle = \left\{f(a), f(a)^2, \cdots, f(a)^n\right\}$ から、(1) より明らかに成立する

(3)

$ord(a) = n$ とすると、$f(a)^n = f(a^n) = f(e) = e'$
$f(a)$ の位数を m とすると、$m \leq n$ かつ $m \mid n$

(4)

f は単射であるから、$ord(a) = n$、$ord(f(a)) = m$ とすると

$$e' = f(e) = f(a^n) = f(a^m) = f(a)^m = e'$$

があり、$f(a)^n = f(a^n) = f(a^m) = f(a)^m$ だから、$m = n$

7.4

(1)

G	(1)	(1 2) (3 4)	(1 3) (2 4)	(1 4) (2 3)
(1)	(1)	(1 2) (3 4)	(1 3) (2 4)	(1 4) (2 3)
(1 2) (3 4)	(1 2) (3 4)	(1)	(1 4) (2 3)	(1 3) (2 4)
(1 3) (2 4)	(1 3) (2 4)	(1 4) (2 3)	(1)	(1 2) (3 4)
(1 4) (2 3)	(1 4) (2 3)	(1 3) (2 4)	(1 2) (3 4)	(1)

ここで、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ をそれぞれ a, b, c, d とする

G’	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(2)

(1) の乗積表より、全単射 $f : G \to G'$ は存在する

(3)

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\right\} = \langle\overline{1}\rangle$ であるから、$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は巡回群である
(1) の乗積表より、任意の元に $g \in G$ 対し、$g^2 = e_G$ であるから、巡回群ではない
よって、$G \not\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

8

8.1

$a\mathrm{Ker}f = b\mathrm{Ker}f$ とすると、$\mathrm{Ker}f = \left(a^{-1}b\right)\mathrm{Ker}f$ があるから
$\left(a^{-1}b\right) \in \mathrm{Ker}f = \{g \in G | f(g) = e'\}, i.e. f\left(a^{-1}b\right) = e'$．$f$ は準同型であるから
$f\left(a^{-1}b\right) = f\left(a^{-1}\right) f(b) = f(a)^{-1} f(b) = e' \Longleftrightarrow f(b) = f(a)$

8.2

(1)

$\mathrm{Ker}f = \mathbb{T}, \mathrm{Im}f = 2\pi\mathbb{Z}$ より、$\mathbb{R}/\mathbb{T} \cong 2\pi\mathbb{Z}$

(2)

$\phi(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ とする．$\phi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix} \cdot e^{2\pi iy} = \phi(x)\phi(y)$ より $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ は準同型である．
$e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ とすると、$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases} \Longrightarrow x = y$ から、ϕ は単射である
また、$\forall e^{2\pi ix} \in \mathbb{C}^\times, \exists x \in \mathbb{R}$ から、ϕ は全射である．以上より、ϕ は全単射で、同型である
$\mathrm{Ker}\phi = \{x \in \mathbb{R} | \phi(x) = 1\} = \mathbb{Z}, \mathrm{Im}\phi = \left\{e^{2\pi ix} \middle| x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{T}$
準同型定理より、$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$

8.3

準同型定理より、$\mathrm{Ker}f = \mathbb{T}, \mathrm{Im}f = \mathbb{R}^+$ をみたす準同型 f を探せばいい．$\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^+$ より、$f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^+$ を $f(z) = |z|$ と定義すると、$f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1) f(z_2)$ があって、f は準同型である．なお、$\mathrm{Ker}f = \{z \in \mathbb{C}^\times | f(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^\times || z| = 1\} = \mathbb{T}$ から、準同型定理より $\mathbb{C}^\times/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^+$

8.4

G からの写像 f を $f\left(a^k\right) = k$ と定義すると、$f\left(a^{k+l}\right) = f\left(a^k a^l\right) = k + l = f\left(a^k\right) f\left(a^l\right)$ より準同型.
$f\left(a^k\right) = f\left(a^{k'}\right)$ とすると $k = k'$ から単射、なお任意の $f\left(a^k\right)$ に対して k が存在するから f 全射.
以上より、位数が無限のとき、f は $\mathbb{Z}$ 同型で、有限（$|G| = n$）のとき、$G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

8.5

(1)

$H \leq G, N \triangleleft G$ とすると、$\forall g \in G, gNg^{-1} = N$ があって、$H \leq G$ より、$\forall h \in H, hNh^{-1} = N$
$H \cap N \subset H, H \cap N \subset N$ があるから、$\forall h \in H, h(H \cap N)h^{-1} \subset H$ かつ $h(H \cap N)h^{-1} \subset N$

i.e. $\forall h \in H, h\left(H \cap N\right)h^{-1} \subset H \cap N$、よって、$H \cap N \lhd H$

(2)

$f : H \to HN/N$ を $h \mapsto hN$ と定義すると、$f\left(h_1h_2\right) = \left(h_1h_2\right)N = h_1Nh_2N = f\left(h_1\right)f\left(h_2\right)$ より、f は準同型である．, $\mathrm{Im}f = HN/N$ で $\mathrm{Ker}f = \{h \in H | f\left(h\right) = e_{HN}\}$、i.e. $h \in H \cap N$ で、$\mathrm{Ker}f = H \cap N$．よって、準同型定理より、$H/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f \iff H/\left(H \cap N\right) \cong HN/N$

9

9.1

(1)

$xH = x'H$ とすると、$a \cdot xH = \left(ax\right)H = aHxH = aHx'H = \left(ax'\right)H = a \cdot x'H$ から、well-defined

(2)

$e_G \cdot xH = \left(e_Gx\right)H = xH, a \cdot \left(b \cdot xH\right) = a \cdot \left(\left(bx\right)H\right) = \left(abx\right)H = \left(ab\right) \cdot xH$
よって、$\cdot$ は G から G/H への作用である.

(3)

$\forall x, y \in G, yx^{-1} \in G$ であるから、$g = yx^{-1}$ を取り、$g \cdot \left(xH\right) = \left(gx\right)H = \left(yx^{-1}x\right)H = yH$
よって、作用 $\cdot$ は推移的である

9.2

$0 \cdot \left(x, y\right) = \left(x + 0, e^0y\right) = \left(x, y\right)$
$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot \left(b \cdot \left(x, y\right)\right) = a \cdot \left(b + x, e^by\right) = \left(a + b + x, e^ae^by\right) = \left(\left(a + b\right) + x, e^{a+b}y\right) = \left(ab\right) \cdot \left(x, y\right)$
よって $\cdot$ は $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ のさようである

9.3

(1)

$\forall A \in G, \forall \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ に対し、作用 $\cdot$ を $A \cdot \vec{\mathbf{v}} = A\vec{\mathbf{v}}$ と定義すると
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in G, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$= \begin{bmatrix} a\left(ex + fy\right) + b\left(gx + hy\right) \\ c\left(ex + fy\right) + d\left(gx + hy\right) \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$= \begin{bmatrix} a\left(ex + fy\right) + b\left(gx + hy\right) \\ c\left(ex + fy\right) + d\left(gx + hy\right) \end{bmatrix} \tag{60}$$

以上より、$\cdot$ は作用である

(2)

$$\begin{aligned} Stab_G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{a \in G \middle| a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} & (61) \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} & (62) \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ かつ $ad \neq bc$ から $d \neq 0$ であればいい
よって、$Stab_G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G : d \neq 0\right\}$

(3)

$$\begin{aligned} Orbit\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in G\right\} & (63) \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G\right\} & (64) \\ &= \mathbb{R}^2 \backslash \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (65) \end{aligned}$$

9.4

$$\begin{cases} (1\ 2) \cdot (1)\, H = (1\ 2)\, H = H \\ (1\ 2) \cdot (1\ 3)\, H = ((1\ 2)\,(1\ 3))\, H = (1\ 3\ 2)\, H = \{(1\ 3\ 2)\,, (2\ 3)\} \\ (1\ 2) \cdot (2\ 3)\, H = ((1\ 2)\,(2\ 3))\, H = (1\ 2\ 3)\, H = \{(1\ 2\ 3)\,, (1\ 3)\} \end{cases}$$

9.5

(1)

$e \cdot x = exe^{-1} = exe = x$
$\forall a, b \in G, \forall x \in G, a \cdot (b \cdot x) = a \cdot \left(bxb^{-1}\right) = abxb^{-1}a^{-1} = abx\,(ab)^{-1} = (ab) \cdot x$
よって、$\cdot$ は作用となる

(2)

$$\begin{aligned} Orbit_{S_3}\left((1\ 2)\right) &= \{a\,(1\ 2) : a \in S_3\} & (66) \\ &= S_3 & (67) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} Stab_{S_3}\left((1\ 2)\right) &= \{a \in S_3 : a\,(1\ 2) = (1\ 2)\} & (68) \\ &= \{(1)\} & (69) \end{aligned}$$

10

10.1

(1)

$a \cdot (x,y) = (a+x, e^a y) = (0,c)$ とすると、$a=-x$ で、$e^{-x}y = c$ と書くと、$(x,y) \sim (0,c)$

(2)

$(0,c) \sim (0,d)$ とすると、$\exists a \in \mathbb{R}, s.t. a \cdot (0,c) = (0,d)$
$\iff (a+0, e^a c) = (0,d) \iff (a, e^a c) = (0,d) \iff a = 0$
だが $e^a c = e^0 c = c = d$ は仮定 $c \neq d$ と矛盾するから、$(0,c)$ は $(0,d)$ と同じ軌道に属さない

(3)

(1) より $y = ce^x$ とかけるかつ $\forall (x,y), (x,y) \sim (0,c)$
$Orbit\left((x,y)\right) = Orbit\left(0,c\right) = \{a \cdot (0,c) : a \in \mathbb{R}\} = \{(a, e^a c) : a \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{c \in \mathbb{R}} \{(a, e^a c) : a \in \mathbb{R}\}$
よって、軌道分解の完全代表系は $\{(0,c) : c \in \mathbb{R}\}$$a=0$ である

10.2

(1)

$$\begin{aligned} C_G\left((1\ 2)\right) &= \{a \in S_3 | a\,(1\ 2) = (1\ 2)\,a\} && (70)\\ &= \{(1), (1\ 2)\} && (71) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Z(G) &= C_G(G) && (72)\\ &= \{a \in S_3 | \forall x \in S_3, ax = xa\} && (73)\\ &= \{(1)\} && (74) \end{aligned}$$

10.3

$$Cl\left((1)\right) = \left\{g\,(1)\,g^{-1} \middle| g \in G\right\} = \{(1)\} \quad (75)$$
$$Cl\left((1\ 2)\right) = Cl\left((1\ 3)\right) = Cl\left((2\ 3)\right) = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} \quad (76)$$
$$Cl\left((1\ 2\ 3)\right) = Cl\left((1\ 3\ 2)\right) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad (77)$$

10.4

(1)

ここで

$$\begin{aligned} A_4 = &\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}\\ &\cup \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \end{aligned}$$

があって、$(1\ 4)(2\ 3)$ に対し、$(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2)$ であり、$(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 2) = (1\ 4)(2\ 3)$ があるから、$(1\ 2)(3\ 4) \sim (1\ 4)(2\ 3)$. 同様に $(1\ 2\ 4)^{-1} = (1\ 4\ 2)$ で、$(1\ 2\ 4)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 2) = (1\ 3)(2\ 4)$ があるから $(1\ 2)(3\ 4) \sim (1\ 3)(2\ 4)$

(2)

Orbit-Stabilizer Thm より、$(S_4 : Stab_{S_4}(x)) = \dfrac{|S_4|}{|Stab_{S_4}(x)|}$
作用 $g \in G$ に対して、$g{\cdot}x = gxg^{-1}$ とすると、$Stab_{S_4}(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\} = \left\{g \in G \middle| gxg^{-1} = x\right\}$
i.e. $Stab_{S_4}(x) = \{g \in G | gx = xg\} = C_{S_4}(x)$ があるから
$(S_4 : C_{S_4}(x)) = \dfrac{|S_4|}{|C_{S_4}(x)|} \Longrightarrow |C_{S_4}| = \dfrac{|S_4|}{|Cl(x)|}$

$$C_{S_4}((1\ 2\ 3)) = \{a \in S_4 | a(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)a\} \tag{78}$$
$$|C_{S_4}((1\ 2\ 3))| = \frac{|S_4|}{|Cl((1\ 2\ 3))|} = \frac{24}{8} = 3 \tag{79}$$

よって、$C_{S_4}((1\ 2\ 3)) = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
$(1\ 3\ 2)$ に対しても同じであるから、$C_{S_4}((1\ 3\ 2)) = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

(3)

$Cl((1)) = \{(1)\}$
$Cl((1\ 2)(3\ 4)) = Cl((1\ 3)(2\ 4)) = Cl((1\ 4)(2\ 3)) = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
$\forall 3 - cycle\,(i, j, k), Cl((i, j, k)) = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge a \neq b, a \neq c, b \neq c\}$

11

11.1

(1)

$\forall e_1, a_1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall e_2, a_2 \in S_3, \begin{cases} (e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1a_1, e_2a_2) \\ (a_1, a_2)(e_1, e_2) = (a_1e_1, a_2e_2) \end{cases}, \begin{cases} e_1 = \overline{0} \\ e_2 = (1) \end{cases}$ より
$\begin{cases} (e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1a_1, e_2a_2) = (a_1, a_2) \\ (a_1, a_2)(e_1, e_2) = (a_1e_1, a_2e_2) = (a_1, a_2) \end{cases}$ であるから、$(e_1, e_2) = \left(\overline{0}, (1)\right)$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times S_3$ の単位元である

(2)

$$\left(\overline{1}, (1\ 2)\right) \cdot \left(\overline{2}, (1\ 2\ 3)\right) = \left(\overline{1} \cdot \overline{2}, (1\ 2)(1\ 2\ 3)\right) \tag{80}$$
$$= \left(\overline{1} + \overline{2}, (2\ 3)\right) \tag{81}$$
$$= \left(\overline{0}, (2\ 3)\right) \tag{82}$$

(3)

$$\left(\overline{2}, (1\ 2\ 3)\right)^{-1} = \left(\overline{2}^{-1}, (1\ 2\ 3)^{-1}\right) \tag{83}$$
$$= \left(\overline{1}, (1\ 3\ 2)\right) \tag{84}$$

(4)

$|G| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| \cdot |S_3| = 3 \cdot 6 = 18$

(5)

$Ord\left(\left(\overline{2},(1\ 2)\right)\right) = lcm\left(Ord\left(\overline{2}\right), Ord\left((1\ 2)\right)\right) = lcm\left(3,2\right) = 6$

11.2

$\forall g \in G, g\langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle g^{-1} = \langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle, g\langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle g^{-1} = \langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle$ から
$\langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle \triangleleft G, \langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle \triangleleft G$
$\langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle \cap \langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle = \{(1)\}$
$\langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle\langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle = \{hk|h \in \langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle, k \in \langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle\}$
$= \{(1), (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4)\ (2\ 3)\} = G$
よって、$G \cong \langle(1\ 2)\ (3\ 4)\rangle \times \langle(1\ 3)\ (2\ 4)\rangle$

11.3

$\mathbb{Z}/84\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

11.4

$\forall a \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \left(Ord\left(g\right)\right)_{max} = 12$ であり
$\forall\left(h_1, h_2\right) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \left(Ord\left(\left(h_1, h_2\right)\right)\right)_{max} = \left(lcm\left(Ord\left(h_1\right), Ord\left(h_2\right)\right)\right)_{max} = 6$
$lcm\left(2,6\right) = 6$、よって、$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

11.5

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ から

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \end{cases}$$

11.6

$\exists H, K \leq S_3, s.t. S_3 \cong H \times K$ とすると、$H, K \triangleleft S_3, H \cap K = \{(1)\}, S_3 = HK = \{hk|h \in H, k \in K\}$
$S_3 = HK$ より、$|H|$ または $|K|$ は 2 であるが、位数が 2 である S_3 の部分群は正規ではないから、直積で表せない

12

12.1

$|A_4| = 2^2 \cdot 3$ から、Sylow　2 部分群の位数は $2^2 = 4$ で Sylow 3 部分群の位数は 3 である
だから Sylow2 部分群は $\{(1), (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4)\ (2\ 3)\}$ で
Sylow3 部分群は $\langle(1\ 2\ 3)\rangle, \langle(1\ 2\ 4)\rangle, \langle(1\ 3\ 4)\rangle, \langle(2\ 3\ 4)\rangle$

12.2

$|A_5| = \frac{1}{2}5! = 60 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ で Sylow5 部分群の位数は 5
すると Sylow5 部分群の個数 s は 12 の約数であり、$s \equiv 1 \mod 5$ から $s = 6$

12.3

(1)

$|G| = 15 = 3 \cdot 5$ から、Sylow3 部分群の個数 s_1 は 5 の約数であり $s_1 \equiv 1 \mod 3$ で、Sylow5 部分群の個数 s_2 は 3 の約数であり $s_2 \equiv 1 \mod 5$
以上より $s_1 = 1$ で $s_2 = 1$

(2)

P, Q は Sylow 部分群であるから G の正規部分群であり、PQ は G の部分群になるから P, Q は PQ の正規部分群である．また P, Q の位数は素数で、最大公約数は 1 であるから $P \cap Q = \{e\}$.
また、$PQ = PQ$ は自明であるから $PQ \cong P \times Q$

(3)

$G \cong P \times Q \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$