第二回
Cheng Kexin

P2.1

(1)

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

(2)

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$

(3)

$(x,y)\to(0,0)$から、$y = x$とし、$x \to 0$を考える
そこで、

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x)\\ &= \lim_{(x,x)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}\\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

$\lim_{(x,x)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}$について、
$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$は$0 \leq |\sin\frac{1}{x}| \leq 1$より、$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$の両辺の0での極限はともに0であるから、はさみうちの原理より$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

P2.2

(1)

$F: A \to \mathbb{R}^M$が$x_0 \in A$で連続であることは
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0,$s.t.$\forall x \in A: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$
その否定は
$\exists\epsilon_0 > 0,$s.t.$\forall\delta > 0, \exists x_\delta \in A,$s.t.$\|x_\delta - x_0\| < \delta$かつ$\|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \epsilon_0$

(2)

$\exists\epsilon_0 > 0,$s.t.$\forall\delta > 0, \exists x_\delta, y_\delta \in A,$s.t.$\|x_\delta - y_\delta\| < \delta$かつ$\|f(x_\delta) - f_(y_\delta)\| \geq \epsilon_0$

(3)

$\|{}^t(x,y) - {}^t(1,1)\| < \delta \Rightarrow \|F(x,y) - {}^t(2,1)\| < \epsilon = \dfrac{1}{19950728}$ここで、
$\|{}^t(x,y) - {}^t(1,1)\| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$から

$$\begin{aligned}\|F(x,y) - {}^t(2,1)\| &= \sqrt{(x^2+y^2-2)^2 + (xy-1)^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2-2)^2 + \frac{1}{4}(x^2+y^2-2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x^2+y^2-2)^2}\end{aligned}$$

(4)

連続⇒一様連続であるが、逆にすると一般的に成立しない。また、直観的に考えると、一様連続な関数に対して、ある区間のうちに変化はあまり大きいではないが、連続関数では変化が大きにしても構わない
連続だが一様連続でない反例：$\dfrac{1}{x}$が$(0,1)$では連続であるが一様連続ない

P2.3

図略、座標変換は原点を球心で、rを半径とする球座標系である。またθは z 軸となす角であり、ϕは x 軸の正方向と反時計回りになす角

A2.1

(1)

${}^t(x,y) \neq {}^t(0,0)$では、$xy, \sqrt{x^2y^2}$はともに連続関数で、$\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$から、$f(x,y)$も連続関数である
${}^t(x,y) \to {}^t(0,0)$のとき、$\forall\epsilon > 0, \delta := 2\epsilon$をとって、$\|{}^t(x,y) - {}^t(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$をみたす${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$に対して、
$x = y = 0, |f(x,y) - f(0,0)| = 0 < \epsilon$

${}^t(x,y) \neq {}^t(0,0)$,

$$
\begin{aligned}
|f(x,y) - f(0,0)| &= |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| \\
&= |\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \\
&= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{|x^2+y^2|}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\
&< \frac{1}{2}\delta = \epsilon
\end{aligned}
$$

よって、$f(x,y)$は${}^t(0,0)$で連続

(2)

$y = x$に沿って、${}^t(0,0)$に近づくと、

$$
\begin{aligned}
\lim_{{}^t(x,y)\to{}^t(0,0)} f(x,y) &= \lim_{{}^t(x,x)\to{}^t(0,0)} f(x,x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2+x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2} \neq 0
\end{aligned}
$$

よって、$f(x,y)$は${}^t(0,0)$で連続しない

(3)

x, yはともに0でないから、$s := \frac{x}{y}$とし、$s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} = \lim_{s\to 0} s\sin\frac{1}{s} = 0
$$

よって、$f(x,y)$は${}^t(0,0)$で連続

B2.2

(⇒)ここで$\{x^n\}_n$をx^0に収束する任意の数列とする
Fは連続であるから、$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$,s.t.$\forall x \in A$
$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon, \lim_{n\to\infty} x^n = x^0$から
$\exists N \in \mathbb{N}$,s.t.$\forall n \geq N, \|x^n - x^0\| < \delta$
よって、$n \geq N \Rightarrow \|f(x^n) - f\left(x^0\right)\| < \epsilon$
(⇐)対偶で考えよう
$\exists\epsilon > 0$,s.t.$\forall\delta > 0, \exists x^\delta \in A$,s.t.$\|x^\delta - x^0\| < \delta$かつ$\|f\left(x^\delta\right) - f\left(x^0\right)\| \geq \epsilon$とする
$\delta = \dfrac{1}{n}$とすると、$\exists\{x^n\}_n \subset A$,s.t.$\|x^n - x^0\| < \dfrac{1}{n}$かつ$\|f(x^n) - f\left(x^0\right)\| \geq \epsilon$
前半より、$\lim_{n\to\infty} x^n = x^0$
後半より、$\lim_{n\to\infty} \inf \|f(x^n) - f\left(x^0\right)\| \geq \epsilon > 0$
言い換えれば、$\{f(x^n)\}_n$は$f\left(x^0\right)$に収束しない、これは(2)の否定である

B2.3

Lem.Yの任意の閉集合Cに対し、$f^{-1}(C)$は$\mathbb{R}^N$での閉集合である
Proof of Lem.$\mathbb{R}^M$での開集合Dを考えることは、閉集合$C = \mathbb{R}^M \backslash D$と同じであるから、$f^{-1}(C) = \mathbb{R}^N \backslash f^{-1}(D)$より、$f^{-1}(D)$が開集合であることは$f^{-1}(C)$が閉集合であることと同値である
$f(B) \subset \overline{f(B)}$から、$B \subset f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right)$である.$f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right)$は閉集合であるから(Lemより)、$\overline{B} \subset f^{-1}\left(\overline{f(B)}\right)$であり、$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)}$

B2.4

Lem.(α-Hölder continuous)Hölder連続$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists C, \alpha \in (0,1]$,s.t.$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha$
そして、Lipschitz連続な関数は必ずHölder連続であり、Hölder連続な関数は必ず一様連続である
Proof FをLipschitz連続とすると
$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\| = L\|x - y\|^\alpha \|x - y\|^{1-\alpha}$
$\|x - y\| \leq 1$なら、$L\|x - y\|^\alpha \|x - y\|^{1-\alpha} \leq L\|x - y\|^\alpha$
$\|x - y\| > 1$なら、Weierstrassの最大値定理より、
$\exists m_{min}, m_{max} \in \mathbb{R}^M$,s.t.$m_{min} \leq F \leq m_{max}$
$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x)\| + \|f(y)\| \leq 2m_{max} \leq 2m_{max}\|x - y\|^\alpha$
すなわち、$C := 2m_{max}$とすればいい、このときFはHölder連続である
Fは一様連続$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$,s.t.$\forall x, y \in A$
$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$
Fはα-Hölder連続なので、
$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha < C\delta^\alpha$から
$\delta = \sqrt[\alpha]{\dfrac{\epsilon}{C}}$とすればいい

このとき$\|f(x)-f(y)\| < C\delta^{\alpha} = C\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\epsilon}{C}}\right)^{\alpha} = \epsilon$から
Fは一様連続である