§4

Cheng kexin

A4.1

(1)

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y) = 2x - y - 1 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 2y - x - 1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1\end{cases}$$

$f_{xx}(x,y) = 2, f_{xy}(x,y) = -1, f_{yy}(x,y) = 2$から

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,$\det H_f(1,1) = 3 > 0$

また$\partial_x^2 f(1,1) = 2 > 0$から、$f$は${}^t(1,1)$で極小値をとり、$-1$である

(2)

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y) = 3x^2y + y^3 - y = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(3x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \\ x\left(3y^2 + x^2 - 1\right) = 0\end{cases}$$

括弧内は直交している二つの楕円なので

解は${}^t(0,0), {}^t\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), {}^t\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$である

$f_{xx} = 6xy, f_{xy} = 3x^2 + 3y^2 - 1, f_{yy} = 6xy$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 3y^2 - 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \end{pmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$H_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$H_f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det H_f\left(0,0\right)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-1<0$$

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=2>0$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=2>0$$

$$H_f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}=2>0$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}=2>0$$

よって、fは鞍点${}^t\left(0,0\right)$以外の点で極値をとる

また、$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f_{xx}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)>0$

$f_{xx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=f_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)<0$より

${}^t\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$で極小値$-\frac{1}{8}$をとり、

${}^t\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)$で極大値$\frac{1}{8}$をとる

また、${}^t\left(\pm1,0\right),{}^t\left(0,\pm1\right)$では

$\det H_f$はすべて-4であるから、鞍点である

(3)

$$\begin{cases}\partial_x f\left(x,y\right)=3x^2-3y=0 \\ \partial_y f\left(x,y\right)=3y^2-3x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0 \\ y=0\end{cases} \quad or \begin{cases}x=1 \\ y=1\end{cases}$$

$f_{xx}\left(x,y\right)=6x, f_{xy}\left(x,y\right)=-3, f_{yy}\left(y,y\right)=6y$

$$\det H_f\left(0,0\right)=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-9<0$$

$\det H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$
また、$f_{xx}(1,1) = 6 > 0$から
${}^t(1,1)$で極小値-1をとり、${}^t(0,0)$は鞍点である

(4)

$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 3x^2 + 9y = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 3y^2 + 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} or \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$
$f_{xx}(x,y) = 6x, f_{xy}(x,y) = 9, f_{yy}(x,y) = 6y$
$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$
$\det H_f(-3,-3) = \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = 243 > 0$
また、$f_{xx}(-3,-3) = -18 < 0$から
${}^t(0,0)$では鞍点であり、${}^t(-3,-3)$で極大値27をとる

(5)

$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2}\left(-3x^2+2y^2+3\right) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 2ye^{-x^2-y^2}\left(-3x^2+2y^2-2\right) = 0 \end{cases}$
ここで、${}^t(0,0)$は明らかに解であり、括弧内は漸近線が同じ直交している
二つの双曲線から、解を持たないが
$f_{xx}(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(12x^4 - 2x^2\left(4y^2+15\right) + 4y^2 + 6\right)$
$f_{xy}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}\left(3x^2 - 2y^2 - 1\right)$
$f_{yy}(y,y) = e^{-x^2-y^2}\left(6x^2\left(2y^2-1\right) - 8y^4 + 20y^2 - 4\right)$
$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -24 < 0$から、極値をもたない、鞍点である
それぞれ$x, y = 0$を固定すると、y, xはそれぞれ± 1であるから
${}^t(0,\pm 1), {}^t(\pm 1, 0)$も解である
$\det H_f(0,\pm 1) = \begin{vmatrix} \frac{10}{e} & 0 \\ 0 & \frac{8}{e} \end{vmatrix} = \frac{80}{e^2} > 0$
よって、fは${}^t(0,\pm 1)$で極小値$-\frac{2}{e}$をとる
$\det H_f(\pm 1, 0) = \begin{vmatrix} -\frac{12}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{e} \end{vmatrix} = \frac{120}{e^2} > 0$

よって、fは$^t\left(\pm 1,0\right)$で極大値$\dfrac{3}{e}$をとる

(6)

$$\begin{cases}\partial_x f\left(x,y\right)=-2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+5y^2-1\right)=0\\ \partial_y f\left(x,y\right)=-2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+5y^2-5\right)=0\end{cases}$$

ここで(5)と同じように、$^t\left(0,0\right)$は明らかに解であり、括弧内は原点に対して比例している楕円だから、解を持たない

$f_{xx}\left(x,y\right)=2e^{-x^2-y^2}\left(2x^4+5x^2\left(2y^2-1\right)-5y^2+1\right)$

$f_{xy}\left(x,y\right)=4xye^{-x^2-y^2}\left(x^2+5y^2-6\right)$

$f_{yy}\left(x,y\right)=e^{-x^2-y^2}\left(x^2\left(4y^2-2\right)+10\left(2y^4-5y^2+1\right)\right)$

$\mathrm{det}H_f\left(0,0\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 10\end{vmatrix}=20>0$

よって、$^t\left(0,0\right)$で極小値0をとる

それぞれ$x,y=0$を固定すると、y,xはそれぞれ±1であるから

$^t\left(0,\pm1\right),^t\left(\pm1,0\right)$も解である

$\mathrm{det}H_f\left(0,\pm1\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{8}{e} & 0\\ 0 & -\dfrac{20}{e}\end{vmatrix}=\dfrac{160}{e^2}>0$

$f_{max}\left(x,y\right)=f\left(0,\pm1\right)=\dfrac{5}{e}$

$\mathrm{det}H_f\left(\pm1,0\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{4}{e} & 0\\ 0 & \dfrac{8}{e}\end{vmatrix}=-\dfrac{32}{e^2}<0$

よって、$^t\left(\pm1,0\right)$は鞍点である

A4.2

(1)

$\nabla g=\begin{pmatrix}4x^3\\ 4y^3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}4x^3=0\\ 4y^3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\notin\Gamma$

Γは有界閉集合で、$f|_\Gamma$は連続だから、極値をもつ

$f|_\Gamma$は$^t\left(a,b\right)$で極値をとるとすると

$\exists\lambda\in\mathbb{R},s.t.\nabla f\left(a,b\right)=\lambda\nabla g\left(a,b\right)$

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda a^3 \\ 1 = 4\lambda b^3 \\ a^4 + b^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2^{-\frac{1}{4}} \\ b = \pm 2^{-\frac{1}{4}} \end{cases} \quad or \begin{cases} a = \pm 2^{-\frac{1}{4}} \\ b = \mp 2^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

ここで実数の解しか考えない

異号の場合では0であるから、等号の場合だけ考えればいい

$f_{max}\left(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}}\right) = 2^{\frac{3}{4}}, f_{min}\left(-2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}}\right) = -2^{\frac{3}{4}}$

(2)

$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma$ Γは有界閉集合で、$f|_\Gamma$は連続だから、極値をもつ

$f|_\Gamma$は${}^t(a, b)$で極値をとるとすると

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, s.t. \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$

$$\begin{cases} 1 + b = \lambda(2a + b) \\ 1 + a = \lambda(a + 2b) \\ a^2 + b^2 + ab = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} or \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} or \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{13}+1}{4} \\ y = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \end{cases} or \begin{cases} x = \frac{\sqrt{13}-1}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{13}+1}{4} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} + 1\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{3} + 1\right)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{13}+1}{4}, \frac{\sqrt{13}-1}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\left(\sqrt{13}+1\right)\left(\sqrt{13}-1\right) = -\frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}, -\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\left(\sqrt{13}+1\right)\left(\sqrt{13}-1\right) = -\frac{5}{4}$$

↑対称性より計算しなくてもいい

$-\frac{5}{4} < \frac{1}{3}\left(-2\sqrt{3} + 1\right)$から

$$f_{max}(x, y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{3} + 1\right)$$

$$f_{min}(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{13}+1}{4}, \frac{\sqrt{13}-1}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}, -\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

(3)

$\nabla g = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6y \\ 3y^2 - 6x \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$
${}^t(2,2) \notin \Gamma$が ${}^t(0,0) \in \Gamma$
しかし、$x^2 + y^2 \geq 0 + 0 = 0$ため
${}^t(0,0)$は奇点である同時に、最小点でもある
よって、最大値だけ計算すればいい
$f|_\Gamma$は${}^t(a,b)$で極値をとるとすると
$\exists\lambda \in \mathbb{R}, s.t. \nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$
$\begin{cases} 2a = \lambda\left(3a^2 - 6b\right) \\ 2b = \lambda\left(3b^2 - 6a\right) \\ a^3 + b^3 - 6ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$
$\Rightarrow f_{max}(x,y) = f(3,3) = 18$

B4.3

(1)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left(x, \phi(x)\right)\right) \\ &= f_x\left(x, \phi(x)\right) + f_y\left(x, \phi(x)\right) \cdot \phi'(x) \end{aligned}$$

よって、$\phi'(x) = -\dfrac{\partial_x f\left(x, \phi(x)\right)}{\partial_y f\left(x, \phi(x)\right)}$

(2)

(1)の式の右側はC^{m-1}級から、両辺で積分すると、$\phi(x)$は明らかにC^m級
である
$\phi'(a) = -\dfrac{f_x\left(a, \phi(a)\right)}{f_y\left(a, \phi(a)\right)}$で

$$\phi''(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{f_x\left(a, \phi(a)\right)}{f_y\left(a, \phi(a)\right)}\right) = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_x\left(a, \phi(a)\right) \cdot f_y\left(a, \phi(a)\right) - f_x\left(a, \phi(a)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_y\left(a, \phi(a)\right)}{f_y^2\left(a, \phi(a)\right)}$$

$$= \frac{f_x(a,\phi(a)) \cdot (f_{yx}(a,\phi(a)) + f_{yy}(a,\phi(a)) \cdot \phi'(a))}{f_y^2(a,\phi(a))}$$
$$- \frac{(f_{xx}(a,\phi(a)) + f_{xy}(a,\phi(a)) \cdot \phi'(a)) \cdot f_y(a,\phi(a))}{f_y^2(a,\phi(a))}$$
$$= -\phi'(a) \frac{f_{xy(a,\phi(a))+f_{yy}(a,\phi(a))\cdot\phi'(a)}}{f_y(a,\phi(a))} - \frac{f_{xx}(a,\phi(a)) + f_{xy}(a,\phi(a)) \cdot \phi'(a)}{f_y(a,\phi(a))}$$
$$= -\frac{f_{xx}(a,\phi(a)) + 2f_{xy}(a,\phi(a)) \cdot \phi'(a) + f_{yy}(a,\phi(a)) \cdot \phi'^2(a)}{f_y(a,\phi(a))}$$

B4.4

Laplace Expansion

$$D = -\partial_x g(a,b) \begin{vmatrix} \partial_x g(a,b) & \partial_y g(a,b) \\ \partial_y\partial_x(f-\lambda g)(a,b) & \partial_y^2(f-\lambda g)(a,b) \end{vmatrix}$$
$$+ \partial_y g(a,b) \begin{vmatrix} \partial_x g(a,b) & \partial_y g(a,b) \\ \partial_x^2(f-\lambda g)(a,b) & \partial_x\partial_y(f-\lambda g)(a,b) \end{vmatrix}$$
$$= -\partial_x g(a,b) \left(\partial_x g(a,b)\, \partial_y^2(f-\lambda g)(a,b) - \partial_y g(a,b)\, \partial_y\partial_x(f-\lambda g)(a,b)\right)$$
$$+ \partial_y g(a,b) \left(\partial_x g(a,b)\, \partial_x\partial_y(f-\lambda g)(a,b) - \partial_y g(a,b)\, \partial_x^2(f-\lambda g)(a,b)\right)$$
$$= -\partial_x^2 g(a,b)\, \partial_y^2(f-\lambda g)(a,b) - \partial_y^2 g(a,b)\, \partial_x^2(f-\lambda g)(a,b)$$
$$+ 2\partial_x g(a,b)\, \partial_y g(a,b)\, \partial_y\partial_x(f-\lambda g)(a,b)$$

証明のやり方が発見したが展開した内容を消したくないから一応残ります... まずは直感的な考え、ここでのDの形はHesse行列と類似しているので、省略して書くと
$D = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & {}^{\mathbf{t}}\nabla \\ \nabla & \mathbf{H_{f-\lambda g}} \end{vmatrix}$
左上は0だから直接に計算することは不可能だから（なぜならゼロ行列には逆行列が存在しない）
そして、一回行の順序と列の順序を交換すると、
$D = \det(H) \det\left(\mathbf{0} - {}^{\mathbf{t}}\nabla \mathbf{H^{-1}} \nabla\right)$
${}^{\mathbf{t}}\nabla \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{H}} \nabla$は$1 \times 1$の行列であるから、負号をそのまま外に移せる
そうすると$D = -\det(\mathbf{H}) \det\left({}^{\mathbf{t}}\nabla \mathbf{H^{-1}} \nabla\right)$
幸いなのは、Dの正負だけ考えればいい
以下は、二つの方法で考える
Hesse行列

$\boxed{\mathrm{H_L} = \mathrm{H_{f+\lambda g}}\text{とH}_\mathrm{f}\text{の性質は同じ}}$

厳密に言うと、ここでの性質というのは、Hessianの符号と「$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} L$と$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f$」の符号はそれぞれ同じであること

bをaの陰関数として書き直して代入する
$\exists \phi s.t. b = \phi(a)$

$$\begin{aligned}
D &= -\partial_x^2 g(a,b)\,\partial_y^2 (f-\lambda g)(a,b) - \partial_y^2 g(a,b)\,\partial_x^2 (f-\lambda g)(a,b) \\
&\quad + 2\partial_x g(a,b)\,\partial_y g(a,b)\,\partial_y\partial_x (f-\lambda g)(a,b) \\
&= -\partial_x^2 g(a,\phi(a))\,\partial_y^2 (f-\lambda g)(a,\phi(a)) - \partial_y^2 g(a,\phi(a))\,\partial_x^2 (f-\lambda g)(a,\phi(a)) \\
&\quad + 2\partial_x g(a,\phi(a))\,\partial_y g(a,\phi(a))\,\partial_y\partial_x (f-\lambda g)(a,\phi(a)) \\
&= -\partial_x \left(\partial_x g(a,\phi(a)) + \partial_y g(a,\phi(a))\,\phi'(a)\right)
\end{aligned}$$

Hanc marginis exiguitas non caperet.

B4.5

(1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{x}{2t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{x^2}{4t^2}
\end{aligned}$$

(2)

uは正の最大値をとる

$$\Rightarrow \begin{cases} u > 0 & \textit{'cause maximum is positive} \\ \partial_t u\left(t_0, x_0\right) = 0 & \\ \partial_x u\left(t_0, x_0\right) = 0 & \textit{'cause it is critical points of } u \\ \det\left(\mathrm{H}_u\left(t_0, x_0\right)\right) > 0 & \\ \partial_x^2 u\left(t_0, x_0\right) < 0 & \textit{make sure it is maximum} \end{cases}$$

また、正の最大値というのは、x方向に広義的に増加していて、t方向にただの増加と仮定しても大丈夫（広義というのは極値をとれることを確保するため必要な制限、狭義的だと境界で極値をとるが、x方向では区間は開区間だから、境界で極値をとれない）

さらに、この条件は証明すべき条件より強いから、元の条件は必ず成り立つ

補足として、$\partial_t u > 0$は、${}^t\left(t_0, x_0\right)$で増加しても構わないことを言っている、なぜなら$t$方向では必ず境界以外の点で極値をとる必要がない；$\partial_x^2 u \leq 0$というの$u$は少なくとも下に凸はない、$\partial_x u = 0$という条件を加えて、$x$方向では「上に凸または上にも下にも凸でない」かつ「${}^t\left(t_0, x_0\right)$で極値をとる」。だから式（**4.10**）は${}^t\left(t_0, x_0\right)$で極値をとることの必要十分条件である

負の最小値は同じ考えで、$u' = -u, x' = -x, t' = -t$とすればいい

(3)

(2)により、正の最大値の状況だけ証明すればいいから、以下では、${}^t(a, b) \in (0, T] \times (0, M]$で正の最大値をとるとする

${}^t(a, b)$は熱方程式を満たしているから、$\partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0$

(2)より、$\begin{cases} u(a, b) > 0 \\ \partial_t u(a, b) \geq 0 \\ \partial_x u(a, b) = 0 \\ \partial_x^2 u(a, b) \leq 0 \end{cases}$

ここで、熱方程式より$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$で、左側では非負、右側は非正から、矛盾する

実際、ここで両辺が同時に0であるときには、物理的な意味は「その一次元の熱伝導体は均一的で、時間に関して変化しない」であるから、極値さえ存在しない

(4)

$u_1(0,x) = u_2(0,x) = f(x)$とする
それらの差を考えると、$u(t,x) := u_1(t,x) - u_2(t,x)$とする
物理的な意味は、あるとき、二つの熱伝導方法で、同じ位置での誤差である.だからそれらの誤差がどのときでも**0**だったら、解が一意的に存在していることが分かれる
すなわち、解の一意性はuが定数関数0であることを証明すればいい
ここで、$t=0$のときはNeumann条件より$u(0,x)=0$
(3)より、この条件を満たせば区間内で極値がないから、定数関数であることが保障できる
なぜなら、uは連続で、それぞれの方向での定義域の閉区間内に極値をとれない、最大値の定理より、それは必ず定数関数である
逆にもし0以外の値が存在すると、それは極値であり、**(3)**の結論と矛盾する
ですので、このuは定数関数$u=0$である