§5
Cheng Kexin

P5.1

(1)

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{とすると}$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta y_1 \\ \vdots \\ \beta y_n \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} (\alpha x_k + \beta y_k) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk} (\alpha x_k + \beta y_k) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk} y_k \end{pmatrix} \\
&= \alpha A \mathbf{x} + \beta A \mathbf{y} \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f\left(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\right) &= A\left(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\right) \\
&= A\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\beta y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\beta y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\left(\alpha x_k+\beta y_k\right) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\left(\alpha x_k+\beta y_k\right) \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{mk}y_k \end{pmatrix} \\
&= \alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y} \\
&= \alpha f\left(\mathbf{x}\right)+\beta f\left(\mathbf{y}\right)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\|f\left(\mathbf{x}\right)\| = \|A\mathbf{x}\| = \begin{vmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\mathbf{x} \\ \vdots \\ A_m\mathbf{x} \end{vmatrix}
$$

$$
= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |A_i\mathbf{x}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)|\mathbf{x}|^2}
$$

$$
= C\,\|x\|
$$

不等号のところは$Cauchy - Schwarz$不等式で、Cは$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$である

A5.1

(1)

Fが原点で微分可能と仮定すると

$$\frac{\partial}{\partial x}F = \lim_{h \to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F = \lim_{k \to 0} \frac{F(0,k) - F(0,0)}{k} = 0$$

$F'(0,0) = (0\ 0)$となるが、$y = mx$の方向に沿って原点に近づくと

$$\frac{F(x,mx) - F(0,0) - F'(0,0)^t(0,0)}{\|^t(x,mx)\|}$$

$$= \frac{\sqrt{|mx^2|}}{\sqrt{m^2x^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{|m|}} \not\longrightarrow 0$$

よって、原点で微分できない

(2)

$A = \mathrm{D}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$とする、$\forall \epsilon > 0, \delta := \epsilon$とすると

$\|^t(x,y)\| < \delta$をみたす$^t(x,y) \in \mathbb{R}$に対して

$$\|F(x,y) - F(0,0) - A \cdot {}^t(x,y)\| = \left\| \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} = \sqrt{(x^2+y^2)^2} < \epsilon \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$

よって、原点で微分できる

(3)

$A = \mathrm{D}F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$とする、$\forall \epsilon > 0, \delta := \min\{1, \epsilon\}$とすると

$\|^t(x,y)\| < \delta$をみたす$^t(x,y) \in \mathbb{R}$に対して

$$\left\| F(x,y) - F(0,0) - A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} xz - 2y \\ y + z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2y \\ y + z \end{pmatrix} \right\|$$

$= \left\| \begin{pmatrix} xz \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 z^2} < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \epsilon \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|$ よって、原点で微分できる

A5.2

(1)

$$\mathrm{D}F\left(\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_F\left(\mathbf{x}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 2y \\ 2x & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 4xy \end{aligned}$$

(2)

$$\mathrm{D}F\left(\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_F\left(\mathbf{x}\right) &= \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{vmatrix} \\ &= e^{-x} \cos^2 y - x e^{-x} \sin^2 y \\ &= e^{-x} \left(\cos^2 y - x \sin^2 y \right) \end{aligned}$$

(3)

$$\mathrm{D}F\left(\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Laplace Expansion

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_F(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin\theta\left(\sin\theta\cos\phi\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\sin\theta\sin\phi\right) \\
&+ r^2\cos\theta\left(\cos\theta\cos\phi\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\theta\sin\phi\right) \\
&= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= r^2\sin\theta
\end{aligned}
$$

A5.3

(1)

$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{{}^t(0,0)\right\}$での$C^1$級は、分子と分母それぞれが$C^1$級から自然に得られるから、以下は原点でFréchet微分不可だけ証明する
原点でFréchet微分可能と仮定する

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} 1 = 1$$

$y = mx$の方向に沿って原点に近づくと

$$\frac{f(x,mx) - f(0,0) - f'(0,0)^t(x,mx)}{\|^t(x,mx)\|}$$
$$= \frac{\dfrac{x^4+m^2x^2}{x^2+m^2x^2} - mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} \to \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left(1 - m - \frac{1}{m^2+1}\right) \not\longrightarrow 0 \text{when} x \to 0$$

よって、原点でFréchet微分をとれない

(2)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} -k = 0$$

$y = mx$の方向に沿って原点に近づくと

$$\frac{f(x,mx) - f(0,0) - f'(0,0)^t(x,mx)}{\|^t(x,mx)\|}$$

$$= \frac{\dfrac{x^3 - m^3 x^3}{x^2 + m^2 x^2} - 0}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \frac{1 - m^3}{\left(1 + m^2\right)^{\frac{3}{2}}} \not\longrightarrow 0 \; when \; x \to 0$$

よって、原点でFréchet微分できない

B5.4

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a_{1,1}\left(t\right) & \cdots & a_{1,n}\left(t\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}\left(t\right) & \cdots & a_{n,n}\left(t\right) \end{pmatrix} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{A}\left(t\right) - \mathbf{A}\left(t_0\right)}{\left|t - t_0\right|} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\begin{pmatrix} a_{1,1}\left(t\right) - a_{1,1}\left(t_0\right) & \cdots & a_{1,n}\left(t\right) - a_{1,n}\left(t_0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}\left(t\right) - a_{n,1}\left(t_0\right) & \cdots & a_{n,n}\left(t\right) - a_{n,n}\left(t_0\right) \end{pmatrix}}{\left|t - t_0\right|} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{a_{1,1}\left(t\right) - a_{1,1}\left(t_0\right)}{\left|t - t_0\right|} & \cdots & \displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{a_{1,n}\left(t\right) - a_{1,n}\left(t_0\right)}{\left|t - t_0\right|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{a_{n,1}\left(t\right) - a_{n,1}\left(t_0\right)}{\left|t - t_0\right|} & \cdots & \displaystyle\lim_{t \to t_0} \frac{a_{n,n}\left(t\right) - a_{n,n}\left(t_0\right)}{\left|t - t_0\right|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1,1}\left(t\right) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1,n}\left(t\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{n,1}\left(t\right) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{n,n}\left(t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{A} &= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{d}\left|\mathbf{A}\right|}{\mathrm{d}a_{i,j}}\frac{\mathrm{d}a_{i,j}}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i,j}\left(\sum_{k}\left(\frac{\mathrm{d}a_{i,k}}{\mathrm{d}a_{i,j}}\cdot\widetilde{a_{i,k}}+a_{i,k}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{a_{i,k}}}{\mathrm{d}a_{i,j}}\right)\right)\frac{\mathrm{d}a_{i,j}}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i,j}\widetilde{a_{i,j}}\frac{\mathrm{d}a_{i,j}}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i,j}\left|\mathbf{A}\right|^{t}\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A} \\
&= \mathrm{tr}\left(\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\widetilde{\mathbf{A}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\right)
\end{aligned}$$

詳しい説明として
一つ目の等号は行列値関数と普通の関数との合成とみなせる
二つ目の等号は行列式をi行について展開する
三つ目の等号は、任意のkに対して、i行の元を持たない
四つ目の等号は$\widetilde{\mathbf{A}}=\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{A}^{-1}$の両辺を転置をとった推論である
五つ目の等号は$\displaystyle\sum_{i,j}a_{i,j}b_{i,j}=\mathrm{tr}\left(\mathbf{A}^{t}\mathbf{B}\right)$である

(3)

$$\begin{aligned}
\partial_{t}J_{F,\mathbf{x}}\left(t,\mathbf{x}\right) &\overset{(5.9)}{=} \mathrm{tr}\left(\widetilde{D}_{\mathbf{x}}F\left(t,\mathbf{x}\right)\cdot\partial_{t}D_{\mathbf{x}}F\left(t,\mathbf{x}\right)\right) \\
&= J_{F,\mathbf{x}}\left(t,\mathbf{x}\right)\cdot\mathrm{tr}\left(D_{\mathbf{x}}^{-1}F\left(t,\mathbf{x}\right)\cdot\partial_{t}D_{\mathbf{x}}F\left(t,\mathbf{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

B5.5

(1)

$\delta:=\dfrac{\epsilon}{C}$とすると、$\dfrac{\|f\left(y\right)-f\left(x\right)\|}{\|y-x\|}\leq\max f'$より
$\|f\left(y\right)-f\left(x\right)\|\leq\max f'\cdot\|y-x\|<C\cdot\delta=\epsilon$

(2)

$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{\|f(b) - f(a)\|}{\|b-a\|}(x-a), x \in [a,b]$
$Rolle$の定理より、$\exists\xi \in (a,b), s.t. F'(\xi) = \frac{\|F(b) - F(a)\|}{\|b-a\|} = 0$
$\Longrightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{\|F(b) - F(a)\|}{\|b-a\|} = 0$
$\Longrightarrow \exists\xi \in (a,b), s.t. f'(\xi) = \frac{\|F(b) - F(a)\|}{\|b-a\|}$
$C' > f'(\xi)$をとればいい

B5.6

(1)

$B(x,\epsilon) := \{y \in \mathbf{V} : \|y-x\| < \epsilon\}$
$\mathring{A} := \{x \in \mathbf{V} : \exists\epsilon_0 > 0, s.t. B(x,\epsilon_0) \subset A\}$
$\bar{A} := \{x \in \mathbf{V} : \forall\epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$
開$A \subset \mathbf{V}, A = \mathring{A}$
閉$A \subset \mathbf{V}, A = \bar{A}$

(2)

Aが二つがあるならば
$\|x - x^0\|_{\mathbf{V}} < \delta \Rightarrow \begin{cases} \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - A_1(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} < \epsilon\|x - x^0\|_{\mathbf{V}} \\ \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - A_2(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} < \epsilon\|x - x^0\|_{\mathbf{V}} \end{cases}$ これらの差をとると、
$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - A_1(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} - \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - A_2(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}}$
$\leq \|A_1(\mathbf{x} - \mathbf{x^0}) - A_2(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\| < 0$ ノルム公理と矛盾するから、Aの存在は一意である

(3)

Fréchet微分可能であるから
$\exists\mathbf{A}, s.t. \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} < \epsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x^0}\|_{\mathbf{V}}$
$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} + \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0}) - \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}}$
ここで、$P5.1.3$より、Aは有界だから、$\|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{x^0}\|_{\mathbf{V}}$
よって、$\epsilon_M := M + \epsilon$とすると
$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x^0})\|_{\mathbf{W}} \leq \epsilon_M\|\mathbf{x} - \mathbf{x^0}\|_{\mathbf{V}}$

(4)

$(N_1)\qquad \|f\| = \max \sup \left(f^j\right) \geq 0$は距離公理より明らかに成立する

$(N_2)\|f\| = \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right| = 0, \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right| = 0 \Rightarrow f = 0$

$(N_3)\|\alpha f\| = \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\alpha f^j(x)\right| = \max\limits_{j=0,1,2} \alpha \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right|$

$= \alpha \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right| = \alpha |f|$

$(N_4)\|f+g\| = \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|(f+g)^j(x)\right|$

$\leq \max\limits_{j=0,1,2} \left\{ \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right| + \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|g^j(x)\right| \right\}$

$= \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f^j(x)\right| + \max\limits_{j=0,1,2} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|g^j(x)\right| = \|f\| + \|g\|$

よって、ノルム空間である