P6.1

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\left(f\left(\mathbf{x},\phi\left(\mathbf{x}\right)\right)\right) &= \left(\begin{array}{ccc} \partial_{x_1}\left(f\circ\phi\right)\left(\mathbf{x}\right) & \cdots & \partial_{x_N}\left(f\circ\phi\right)\left(\mathbf{x}\right) \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc} \left(\partial_{x_1}f\left(\mathbf{x}\right)+\partial_\phi f\cdot\partial_{x_1}\phi\right) & \cdots & \left(\partial_{x_N}f\left(\mathbf{x}\right)+\partial_\phi f\cdot\partial_{x_N}\phi\right) \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc} \partial_{x_1}f\left(\mathbf{x}\right) & \cdots & \partial_{x_N}f\left(\mathbf{x}\right) \end{array}\right) + \left(\begin{array}{ccc} \partial_\phi f\cdot\partial_{x_1}\phi & \cdots & \partial_\phi f\cdot\partial_{x_N}\phi \end{array}\right) \\
&= \mathrm{D}_{\mathbf{x}}f\left(\mathbf{x},t\right)|_{t=\phi(\mathbf{x})} + \partial_t f\left(\mathbf{x},t\right)|_{t=\phi(\mathbf{x})}\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\phi\left(\mathbf{x}\right)
\end{aligned}
$$

(2)

$F\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{c} x^2-y^2 \\ xy^3 \end{array}\right)=:\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right)$とする

$\mathrm{D}F=\left(\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ y^3 & 2xy^2 \end{array}\right)$

$\mathrm{J}F=4x^2y^2+2y^4=2y^2\left(2x^2+y^2\right)\neq 0$

$\Longrightarrow\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2|2y^2\left(2x^2+y^2\right)\neq 0\right\}$

$\Longrightarrow \mathrm{D}\left[F^{-1}\right]\left(\mathbf{x}\right)=\dfrac{1}{2y^2\left(2x^2+y^2\right)}\left(\begin{array}{cc} 2xy^2 & 2y \\ -y^3 & 2x \end{array}\right)$

(3)

$\mathrm{D}_{\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)}F=\left(\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ 3x^2-yz & 3y^2-xz \end{array}\right)$

$$
\begin{aligned}
\det\mathrm{D}_{\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)}F &= 2x\left(3y^2-xz\right)-2y\left(3x^2-yz\right) \\
&= 6xy^2-2x^2z-6x^2y+2y^2z \\
&= 6xy\left(y-x\right)+2z\left(y+x\right)\left(y-x\right) \\
&= 2\left(y-x\right)\left(3xy+yz+zx\right)
\end{aligned}
$$

$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right)\in\mathbb{R}^3, F\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right)\right)=0, \det\mathrm{D}_{\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)}F\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right)\right)\neq 0$から

この点の近傍で

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix} \\ F(\psi_1(z), \psi_2(z), z) = 0 \cdots (1) \end{cases}$$

これより、$x = x(z), y = y(z)$のような陰関数で表せる

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$に対して

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 - yz & 3y^2 - xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ 3z^2 - xy \end{pmatrix} = 0\text{から}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 - yz & 3y^2 - xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ xy - 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} F^{-1} = \frac{1}{2(y-x)(3xy + yz + zx)} \begin{pmatrix} 3y^2 - xz & -2y \\ yz - 3x^2 & 2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2(y-x)(3xy + yz + zx)} \begin{pmatrix} 3y^2 - xz & -2y \\ yz - 3x^2 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z \\ xy - 3z^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(y-x)(3xy + yz + zx)} \begin{pmatrix} -6y^2z + 2xz^2 - 2xy^2 + 6yz^2 \\ -2yz^2 + 6x^2z + 2x^2y - 6xz^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}(3) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_1'(3) \\ \psi_2'(3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 46 \\ -68 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{23}{15} \\ -\dfrac{34}{15} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4)

$$\mathrm{D}_{{}^t(y,z)} F = \begin{pmatrix} e^{y+z} \cos x & e^{y+z} \cos x + 2z \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos z \end{pmatrix}$$

$$\det \mathrm{D}_{{}^t(y,z)} F = \begin{vmatrix} e^{y+z} \cos x & e^{y+z} \cos x + 2z \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos z \end{vmatrix}$$

$$= e^{y+z} \cos^2 x \cos z + \sin x \sin y \left(e^{y+z} \cos x + 2z\right)$$

$$\det \mathrm{D}_{{}^t(y,z)} F(0,0,0) = 1 \neq 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \det \mathrm{D}_{{}^t(y,z)} F(0,0,0) \neq 0$

よって、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$で陰関数定理を用いて$y = y(x), z = z(x)$で表示できる

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} &= \psi' = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{e^{y+z}\cos^2 x \cos z + \sin x \sin y \left(e^{y+z}\cos x + 2z\right)} AB \end{aligned}$$

Where

$A = \begin{pmatrix} \cos x \cos z & -e^{y+z}\cos x - 2z \\ \sin x \sin y & e^{y+z}\cos x \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \left(e^{y+z} - 1\right)\sin x \\ \sin x \sin z - \cos x \cos y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

A6.1

(1)

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = 1$から$\Gamma$は有界であり

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$にすると、$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$から、$\Gamma$は閉集合である

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma, \mathrm{D}g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank} Dg(x,y,z) = 0$になるのは$x = y = z = 0$だけで$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma$から

$\forall^t (x,y,z) \in \Gamma, \mathrm{rank}\mathrm{D}g = 1$

$f|_\Gamma$が$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$で極値をとると

$\exists\lambda \in \mathbb{R}, s.t. f'(a,b,c) = \lambda \mathrm{D}g(a,b,c)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda a \\ 1 = 2\lambda b \\ 1 = 2\lambda c \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ b = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ c = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad or \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ c = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

よってfは$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$で極小値$-\sqrt{3}$をとり、$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$で極大値$\sqrt{3}$をとる

(2)

$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-2z \end{pmatrix}$とする

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9z^2} < \infty$から、$\Gamma$は有界

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$にすると

$\begin{pmatrix} x_0 + y_0 = 0 \\ y_0 = 2z_0 \end{pmatrix}$から、$\Gamma$は閉集合である

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Gamma, \mathrm{D}g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$から、$\mathrm{rank}\mathrm{D}g = 2$

$f|_\Gamma$は$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$で極値をとると

$\exists\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} s.t. f'(a,b,c) = \lambda \mathrm{D}g(a,b,c)$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a = \lambda_1 \\ 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 = -2\lambda_2 \\ a + b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{3}{4} \\ c = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

よって、fは$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{8} \end{pmatrix}$で最小値$-\dfrac{9}{16}$をとり、制約条件で上限が存在しない
から、最大値は存在しない

(3)

$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, g = ax + by + cz + d$
Γについての有界閉は平面から得たので、以下は計算だけ
$f|_\Gamma$は$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$で極値をとるとする
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, s.t. f'(i, j, k) = \lambda \mathrm{D}g(i, j, k)$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2(i - x_0) \\ 2(j - y_0) \\ 2(k - z_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2(i - x_0) = \lambda a \\ 2(j - y_0) = \lambda b \\ 2(k - z_0) = \lambda c \\ ai + bj + ck + d = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i = x_0 - \dfrac{a}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \\ j = y_0 - \dfrac{b}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \\ k = z_0 - \dfrac{c}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \end{cases}$$

$x, y, z \to \infty$のときfは収束しないから、最大値はない
fは$\begin{pmatrix} x_0 - \dfrac{a}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \\ y_0 - \dfrac{b}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \\ z_0 - \dfrac{c}{a^2 + b^2 + c^2}(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \end{pmatrix}$で最小値$\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$を
とる

(4)

$g=x+y+z-10$とする
$\mathrm{D}g=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix},\mathrm{rank}\mathrm{D}g=1$
$f|_{\Gamma}$が$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$で極値をとると
$\exists\lambda\in\mathbb{R},s.t.f'(a,b,c)=\lambda\mathrm{D}g(a,b,c)$
$\Longrightarrow\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
$\Longrightarrow\begin{cases}bc=\lambda a\\ac=\lambda b\\ab=\lambda c\\a+b+c=10\end{cases}\qquad\Longrightarrow$

$$\begin{cases}a=10\\b=0\\c=0\end{cases}\quad or\begin{cases}a=0\\b=10\\c=0\end{cases}\quad or\begin{cases}a=0\\b=0\\c=10\end{cases}\quad or\begin{cases}a=-10\\b=10\\c=10\end{cases}\quad or\begin{cases}a=10\\b=-10\\c=10\end{cases}\quad or\begin{cases}a=10\\b=10\\c=-10\end{cases}\quad or\begin{cases}a=\frac{10}{3}\\b=\frac{10}{3}\\c=\frac{10}{3}\end{cases}$$

よって,fは$\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{10}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}$で極大値$\frac{1000}{27}$をとり
$\begin{pmatrix}-10\\10\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\-10\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\10\\-10\end{pmatrix}$で極小値$-1000$をとる

(5)

$g=xyz-10$
$\mathrm{D}g=\begin{pmatrix}yz&xz&xy\end{pmatrix}$で
$\mathrm{rank}\mathrm{D}g=0$となる点は$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$だけで$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\neq\Gamma$から
$\mathrm{rank}\mathrm{D}g$は常に1である
$f|_{\Gamma}$は$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$で極値をとると

$\exists\lambda\in\mathbb{R}, s.t. f'(a,b,c)=\lambda\mathrm{D}g$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}1=\lambda bc\\1=\lambda ac\\1=\lambda ab\\abc=10\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=\sqrt[3]{10}\\b=\sqrt[3]{10}\\c=\sqrt[3]{10}\end{cases}$$

ここで、$x\overset{y,z\to 0}{\longrightarrow}\infty, f(x,y,z)\to\infty$から

fは$\begin{pmatrix}\sqrt[3]{10}\\\sqrt[3]{10}\\\sqrt[3]{10}\end{pmatrix}$で極小値$3\sqrt[3]{10}$をとり、極大値は存在しない

B6.2

(1)

$\mathrm{D}g=\begin{pmatrix}2x_1 & \cdots & 2x_N\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}\mathrm{D}g=0$になるのは$x_1=\cdots=x_N$だけであるから

$\mathrm{rank}\mathrm{D}g=1$

$f|_\Gamma$は$\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_N\end{pmatrix}$で極値をとると

$\exists\lambda\in\mathbb{R}, s.t. f'(a_1,\cdots,a_N)=\lambda\mathrm{D}g(a_1,\cdots,a_N)$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}2a_1a_2^2\cdots a_N^2\\\vdots\\a_1^2\cdots 2a_N^2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2a_1\\\vdots\\2a_N\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2a_1\cdots a_N^2=2\lambda a_1\\\vdots\\a_1^2\cdots 2a_N=2\lambda a_N\\\displaystyle\sum_{k=1}^N a_k^2=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{\sqrt{N}}\\\quad\vdots\\a_N=\dfrac{1}{\sqrt{N}}\end{cases}$$ ここで$x_k\geq 0$から、$x_i=$

0とするとfが0になるから、求めた極値は最大値である

$$\mathrm{LHS} = e^{\dfrac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_N}{N}}$$

から、元の不等式は

$$\log \mathrm{RHS} = \log \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \geq \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_N}{N}$$

これはJensen不等式より成り立つ、また等号条件はすべてのa_iが等しいである

(2)

$\mathrm{D}g = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$から$\mathrm{rankD} = 1$

$f|_\Gamma$は$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$で極値をとるとする

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, s.t. f'(a_1, \cdots, a_N) = \lambda \mathrm{D}g(a_1, \cdots, a_N)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -1 - \log a_1 = \lambda \\ \vdots \\ -1 - \log a_N = \lambda \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{N} \\ \vdots \\ a_N = \dfrac{1}{N} \end{cases}$$

最大値性は、$x_i \in (0,1)$で$\log x_i$の影響がより強いことから得られる

B6.3

(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{J}G &= \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} \\ &= e^x \cos^2 y + e^x \sin^2 y \\ &= e^x > 0 \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2, y_1 < y_2$に対して、
$(e^{x_1} \cos y_1, e^{x_1} \sin y_1) = (e^{x_2} \cos y_2, e^{x_2} \sin y_2)$とすると

$$\begin{cases} e^{x_1}\cos y_1 = e^{x_2}\cos y_2 \\ e^{x_1}\sin y_1 = e^{x_2}\sin y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$ 単射である

全射については、値域の$\mathbb{R}^2$中の$(0,0)$に対して、$g(a,b) = (0,0)$をみたす$a,b \in \mathbb{R}$は存在しないから、全射ではない

(2)

$\mathrm{D}F^{-1}(\mathbf{y}) := (g_{i,j}(\mathbf{y}))_{1\le i,j\le N}$の各成分は有界であるから
Fは逆関数F^{-1}が存在しF^{-1}は微分できる
i.e.F, F^{-1}はともにC^1級である
i.e.FはC^1級微分同相写像

(3)[1][2]

$(\Longrightarrow)$ここでFはC^1級同相写像とすると
定義よりF^{-1}が存在し、F, F^{-1}がともにC^1級である
$\therefore \det \mathrm{D}F \neq 0$
また、$\|F\| \overset{\|x\|\to\infty}{\not\longrightarrow} \infty$と仮定すると
B-Wより、$\exists \{x_n\}, s.t. \|x_n\| \to \infty \Rightarrow \|F(x_n)\| \not\to \infty$
i.e.F^{-1}は有限集合から無限集合への写像であるから、有界性と矛盾する
i.e. $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|F\| = \infty$
$(\Longleftarrow)$
$\forall x \in \mathbb{R}^N, \mathrm{J}_F(x) \neq 0, \lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|F\| = \infty$とする
$G(x) = F(x) - y$とする
Fは無界で、$\mathrm{J}_F \neq 0$から、∇Gが存在する
$-\nabla G$方向に沿ってGは小さくなるから、$\exists p \in \mathbb{R}^N s.t. G(p) = 0$($G$の無界性より)
Gは全射である
単射性について、$\mathrm{J}_F(x) \neq 0$と陰関数定理より得られる
よって、Fが同相写像であって、F^{*1}が存在する
また、FがC^1級であるから、F^{-1}もC^1級であるから、FはC^1級同相写像である

[1] W. B. Gordon. On the diffeomorphisms of Euclidean space. Amer. Math. Monthly, 79:755–759, 1972.

[2] Ruzhansky, Michael & Sugimoto, Mitsuru. (2014). On global inversion of homogeneous maps. Bulletin of Mathematical Sciences. 5. 13-18. 10.1007/s13373-014-0059-1.

(4)

ここで、$\phi(t) = \begin{cases} \log(1+t) & t \geq 0 \\ -\log(1-t) & t < 0 \end{cases}$

$F = \begin{pmatrix} \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \\ \vdots \\ \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \end{pmatrix}$で、$\mathrm{J}_F \neq 0$より、有界でないことが保障できる
よって$\forall k \in [1, N], F_k$は$C^1$級である
よって、FはC^1級同相写像である(発散することとC^1であることより)

B6.4

(1)

$\forall x \in C, a_k := \left(x, y^k\right) = \phi(a_{k-1})$とする、また、$a_0$を固定する
$\forall k \geq 1, d(a_k, a_{k-1}) \leq \cdots \leq \lambda^{k-1} d(a_1, a_0)$
よって、a_kはLipschitz連続であって、一様連続であるから、コーシー列である
すなわち、点列はある点Aに収束する
$\phi(A) = \phi\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) = \lim_{k\to\infty} \phi(a_k) = \lim_{k\to} a_{k+1} = A$から、その$A$は収束点である
また、一意性に対して、$0 \leq \lambda < 1$に対いて、α, βに収束すれば$d(\alpha, \beta) = 0$から、必ず$\alpha = \beta$である

(2)[3]

$\|A\| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A^n = 0$

$$(E + A)\left(E - A + A^2 - \cdots\right) = E + A^M = \sum_{k=0}^{M} (-A)^k$$

$$E + \lim_{M\to\infty} A^M = E + 0 = E$$

$$\Longrightarrow (E + A) \sum_{k=0}^{M} (-A)^k = E$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{M} (-A)^k = (E + A)^{-1}$$

[3]Neumann's Lemma

i.e.$\|A\|_2 < 1 \Longrightarrow \left\|(E+A)^{-1} - \sum_{k=0}^{M}(-A)^k\right\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(3)

$J(x,y) := (\mathrm{D}_x F)(x,y) - (\mathrm{D}_x F)(x_0,y_0)$
$(\mathrm{D}_x F)^{-1} \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left((-\mathrm{D}_x F)^{-1}(x_0,y_0)\,\mathrm{J}(x,y)\right)^k (\mathrm{D}_x F)^{-1}(x_0,y_0)$
$A_0 = (\mathrm{D}_x F)(x_0,y_0)\,.y \in O$を固定すると
$\phi(x,y) = x - A_0^{-1}F(x,y)$の不動点$x_1 \in C$を存在すれば$F(x_1,y)=0$

$$
\begin{aligned}
&\|\phi(x_1,y) - \phi(x_2,y)\| \\
&= A_0^{-1}\left((\mathrm{D}_x F)(x_0,y_0)(x_1-x_2) - (F(x_1,y) - F(x_2,y))\right) \\
&\leq \|A_0^{-1}\|\left(\|(\mathrm{D}_x F)(x_0,y_0) - (\mathrm{D}_x F)(x_2,y)\|\|x_1-x_2\|\right. \\
&\left.+ \|(\mathrm{D}_x F)(x_2,y)(x_1-x_2) - (F(x_1,y) - F(x_2,y))\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|
\end{aligned}
$$

そこで、(1)の縮小写像より、$\phi(x_0,y) = x_0$をみたすのはただ一つ存在している