Contents

1 No.1

$S \subset \mathbb{R}$ に対して

$$S^* := \{x \in \mathbb{R} : S \subset (-\infty, x]\}, S_* := \{x \in \mathbb{R} : S \subset [x, \infty)\} \tag{1}$$

とおく. また $\mathbb{N} := \{n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ とする.

1.1

次の集合に対して、A^*, A_* などを求め、また、$A \cap A^*, A \cap A_*$ などを求めよ

(1)

$A = (-3, 1] \cup (1, 3] = (-3, 3]$

$$A^* = [3, \infty) \tag{2}$$
$$A_* = (-\infty, -3] \tag{3}$$

(2)

$B = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 < 2\} \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

$$B^* = \left[\frac{1}{3}, \infty\right) \tag{4}$$
$$B_* = \emptyset \tag{5}$$

(3)

$C = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

$$C^* = [2, \infty) \tag{6}$$
$$C_* = (-\infty, 0] \tag{7}$$

(4)

$D = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$D^* = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \tag{8}$$
$$D_* = (-\infty, -1] \tag{9}$$

1.2

$$\sup A = 3 \tag{10}$$
$$\max A = 3 \tag{11}$$
$$\inf A = -3 \tag{12}$$
$$\min A \text{存在しない} \tag{13}$$
$$\sup B = \frac{1}{3} \tag{14}$$
$$\max B \text{存在しない} \tag{15}$$
$$\inf B \text{存在しない} \tag{16}$$
$$\min B \text{存在しない} \tag{17}$$
$$\sup C = 2 \tag{18}$$
$$\max C = 2 \tag{19}$$
$$\inf C = -1 \tag{20}$$
$$\min C \text{存在しない} \tag{21}$$
$$\sup D = \frac{1}{2} \tag{22}$$
$$\max D = \frac{1}{2} \tag{23}$$
$$\inf D = -1 \tag{24}$$
$$\min D = -1 \tag{25}$$

1.3

$\liminf_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}, \limsup_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

1.4

$\{x_n\}$ が Cauchy 列とする. 定義より、$\epsilon = 1$ とすると、$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \geq N, |x_n - x_m| < 1.$ $m = 1$ とし、$\forall n \geq N, |x_n - x_N| < 1$ から、$\{x_n\}_{n \geq N}$ は有界である. さらに、$x_1, \cdots, x_{N-1}$ を含めても有界集合である

1.5

$\{x_n\}$ を収束列とし、$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ とする.
$\forall \epsilon > 0, \exists N, M \in \mathbb{N}, s.t. \forall n, m \geq N_0 := \max\{N, M\}, |x_n - x| < \frac{1}{2}\epsilon, |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon$

$$|x_n - x_m| < |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon \tag{26}$$

よって、$\{x_n\}$ は Cauchy 列である

2 No.2

2.1

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} \tag{27}$$
$$= r \tag{28}$$

2.2

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ とする.$x \in \mathbb{K}^N$ に対して

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |x_j|\,, \|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \cdots, N\} \tag{29}$$

と定める. このとき以下が成立する

(1)

$\left(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1\right)$ はノルム空間である

- $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |x_j| \geq \sum_{j=1}^{N} 0 = 0.$
- $\|x\|_1 = 0 \iff \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |x_j| = 0 \iff (\forall j \in \{1, 2, \cdots, N\}, |x_j| = 0) \iff x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^N, \|\alpha x\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |\alpha x_j| = |\alpha| \sum_{j=1}^{N} |x_j| = |\alpha| \|x\|_1$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}^N, \|x + y\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{N} |x_j| + \sum_{j=1}^{N} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

(2)

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_\infty)$ はノルム空間である

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \cdots, N\} \geq 0$
- $\|x\|_\infty = 0 \iff \max\{|x_j| : j = 1, 2, \cdots, n\} \iff x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}, \|\alpha x\|_\infty = \max\{|\alpha x_j| : j = 1, \cdots\} = |\alpha| \max\{|x_j| : j = 1, \cdots\} = |\alpha| \|x\|_\infty$
- $\forall x, y \in \mathbb{K}, \|x + y\|_\infty = \max\{|x_j + y_j| : j = 1, \cdots\} \leq \max\{|x_j| : j = 1, \cdots\} + \max\{|y_j| : j = 1, \cdots\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

2.3

$u \in C[0, 1]$ に対して

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,\mathrm{d}t, \|u\|_\infty = \max\{|u(t)| : t \in [0, 1]\} \tag{30}$$

と定める. このとき以下が成立する

(1)

$\left(C\left[0,1\right], \|\cdot\|_1\right)$ はノルム空間である

- $\forall u \in C\left[0,1\right], \|u\|_1 = \int_0^1 \left|u\left(t\right)\right| \mathrm{d}t \geq \int_0^1 0 \mathrm{d}t = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in C\left[0,1\right], \|\alpha u\|_1 = \int_0^1 \left|\alpha u\left(t\right)\right| \mathrm{d}t = \left|\alpha\right| \int_0^1 \left|u\left(t\right)\right| \mathrm{d}t = \left|\alpha\right| \|u\|_1$
- $\forall u, v \in C\left[0,1\right], \|u+v\|_1 = \int_0^1 \left|u\left(t\right) + v\left(t\right)\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left|u\left(t\right)\right| \mathrm{d}t + \int_0^1 \left|v\left(t\right)\right| \mathrm{d}t = \|u\|_1 + \|v\|_1$

(2)

$\left(C\left[0,1\right], \|\cdot\|_\infty\right)$ はノルム空間である

- $\forall u \in C\left[0,1\right], \|u\|_\infty = \max\left\{\left|u\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} \geq 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in C\left[0,1\right], \|\alpha u\|_\infty = \max\left\{\left|\alpha u\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} = \left|\alpha\right| \max\left\{\left|u\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} \leq \left|\alpha\right| \|u\|_\infty$
- $\forall u, v \in C\left[0,1\right], \|u+v\|_\infty = \max\left\{\left|u\left(t\right) + v\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} \leq \max\left\{\left|u\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} + \max\left\{\left|v\left(t\right)\right| : t \in \left[0,1\right]\right\} = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

3 No.3

3.1

以下は成立

(1)

$\left(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1\right)$ は Banach 空間
$\left(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1\right)$ での Cauchy 列 $\{x_n\}$ に対し、$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \geq N, \|x_m - x_n\|_1 < \epsilon$
$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \left|x_m^{(j)} - x_n^{(j)}\right| < \epsilon.$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるから、$\exists x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \left|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}\right| &= \sum_{j=1}^{N} \lim_{m\to\infty} \left|x_n^{(j)} - x_m^{(j)}\right| && (31)\\
&\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left|x_n^{(j)} - x_m^{(j)}\right| && (32)\\
&= \liminf_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_1 && (33)\\
&< \epsilon && (34)
\end{aligned}$$

(2)

$\left(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty\right)$ は Banach 空間
$\left(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty\right)$ での Cauchy 列 $\{x_n\}$ に対し、$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \|x_m - x_n\|_\infty < \epsilon$
$\Longleftrightarrow \max\left\{\left|x_m^{(j)} - x_n^{(j)}\right| : 1 \leq j \leq N\right\} < \epsilon$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるから、$\exists x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$

$$\begin{aligned}
\max\left\{\left|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}\right| : 1 \leq j \leq N\right\} &= \lim_{m\to\infty} \max\left\{\left|x_n^{(j)} - x_m^{(j)}\right| : 1 \leq j \leq N\right\}\\
&= \lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_\infty\\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

3.2

$(X, \|\cdot\|)$ は体 $\mathbb{K}$ 上のノルム空間、以下成立

(1)

$u_n \to u \in X \Longrightarrow \|u_n - u\| \to 0, \|u_n - u\| \geq |\|u_n\| - \|u\|| \Longrightarrow \|u_n\| - \|u\| \to 0 \Longrightarrow \|u_n\| \to \|u\|$

(2)

$u_n \to u, v_n \to v \Longrightarrow \|u_n - u\| < \dfrac{\epsilon}{2\alpha}, \|v_n - v\| < \dfrac{\epsilon}{2\beta}$

$$\begin{aligned} \|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha u + \beta v)\| &= \|\alpha (u_n - u) + \beta (v_n - v)\| && (35) \\ &\leq \|\alpha (u_n - u)\| + \|\beta (v_n - v)\| && (36) \\ &= |\alpha| \|u_n - u\| + |\beta| \|v_n - v\| && (37) \\ &< \epsilon && (38) \end{aligned}$$

3.3

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \lim_{n\to\infty} s_n = s$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (s - s_{n-1}) = 0 \tag{39}$$

3.4

$0 < l < r, \lim_{n\to\infty} a_n = l \Longrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, |a_n - l| < \epsilon$
$\Longleftrightarrow\ l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$
また、$0 < l < r$ から、$a_n < l + \epsilon \leq r$
よって、$|a_n| < r$

3.5

$\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1 \iff \neg (\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1)$
$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1$ と仮定すると、$\exists \{a_{n_k}\}, s.t. a_{n_k} \overset{n_k\to\infty}{<} 1$
$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ かつ $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ から $\lim_{n_k\to\infty} a_{n_k} = l$
$l > 1$ より矛盾だから $\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1$

4 No.4

4.1

$x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{K}^N$ に対して

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^{N}|x_j|\,,\|x\|_2=\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},\|x\|_\infty=\max\{|x_j|:j=1,\cdots,N\} \tag{40}$$

と定めると、以下成立.

(1)

Cauchy-Schwarz 不等式より

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|\cdot 1\right)^2\leq\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{N}1\right) \tag{41}$$

$$\sum_{j=1}^{N}|x_j|\leq\sqrt{N\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2} \tag{42}$$

$$=N^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

等号をとる条件は $\forall j,|x_1|=\cdots=|x_N|$
$x=(1,1,\cdots,1)$ を取ればいい

(2)

$$\|x\|_2^2=\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2 \tag{44}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{N}\|x\|_\infty^2 \tag{45}$$

$$=N\|x\|_\infty^2 \tag{46}$$

$$\|x\|_2\leq N^{\frac{1}{2}}\|x\|_\infty \tag{47}$$

等号をとる条件は $\forall j,|x_j|=\max\{|x_j|:j=1,\cdots,N\}$
$x=(1,1,\cdots,1)$ をとればいい

(3)

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^{N}|x_j| \tag{48}$$

$$\geq\max\{|x_j|:j=1,\cdots,N\} \tag{49}$$

$$=\|x\|_\infty \tag{50}$$

等号をとる条件は $\forall j,\max\{|xj|:j=1,\cdots,N\}$ をみたす j_{max} 以外の j に対して、$x_j=0$
よって、$x=(1,0,0,\cdots,0)$ をとればいい

4.2

$u \in C[a,b]$ に対して

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|\,\mathrm{d}t, \|u\|_\infty = \max\{|u(t)| : a < t < b\} \tag{51}$$

(1)

$\forall u \in C[a,b]$

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \int_a^b |u(t)|\,\mathrm{d}t && (52)\\
&\le \int_a^b \max\{|u(t)| : a < t < b\}\,\mathrm{d}t && (53)\\
&= \|u\|_\infty \int_a^b \mathrm{d}t && (54)\\
&= (b-a)\|u\|_\infty && (55)
\end{aligned}$$

(2)

$$u_n(t) = \begin{cases} n & |t| \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

4.3

$0 < l < r, \lim_{n\to\infty} a_n = l \Longrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \ge p, |a_n - l| < \epsilon$
$\iff\ l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$
また、$0 < l < r$ から、$a_n < l + \epsilon \le r$
よって、$|a_n| < r$

4.4

$\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \ge p, a_n \ge 1 \iff \neg(\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \ge p, s.t. a_n < 1)$
$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \ge p, s.t. a_n < 1$ と仮定すると、$\exists\{a_{n_k}\}, s.t. a_{n_k} \overset{n_k\to\infty}{<} 1$
$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ かつ $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ から $\lim_{n_k\to\infty} a_{n_k} = l$
$l > 1$ より矛盾だから $\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \ge p, a_n \ge 1$

4.5

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2} && (56)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2} && (57)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right) && (58)\\
&= \frac{1}{2} < 1 && (59)
\end{aligned}$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5}\cdot\frac{n^5}{1.001^n}\right) \tag{60}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1.001\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\right) \tag{61}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1.001\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5\right) \tag{62}$$

$$= 1.001 > 1 \tag{63}$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}\right) \tag{64}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) \tag{65}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \tag{66}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right) \tag{67}$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \tag{68}$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}\right) \tag{69}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \tag{70}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \tag{71}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{4(n+1)-2} \tag{72}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{4-\frac{2}{n+1}} \tag{73}$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \tag{74}$$

よって、発散する

4.6

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \tag{75}$$

に注意すると $\arctan x = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$ を Taylor 展開すると

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \tag{76}$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan 1 \tag{77}$$

$$= \frac{\pi}{4} \tag{78}$$

4.7

$f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^{\alpha}}, x > 2$ から $f(x) > 0, f'(x) = -\dfrac{1}{x^2(\log x)^{\alpha+1}}(\log x + \alpha) < 0$
よって、$f(x)$ は非負減少で、積分判定法で判定できる.
i.e.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}} \text{ 収束} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\mathrm{d}x \text{ 収束}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t \tag{79}$$

· $\alpha = 1, \displaystyle\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R\to\infty}(\log R - \log\log 2) = \infty$

· $0 < \alpha < 1, \displaystyle\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}}\right) = \infty$

· $\alpha > 1, \displaystyle\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}}\right) = -\frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}}$

よって、$\alpha > 1$ のときは収束で、それ以外の条件は発散する

5 No.5

5.1

$\{a_k\}$ は収束だから $|a_k| < M$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k z^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left|z^k\right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left|z^k\right| < M \cdot 1 = M$

5.2

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \tag{80}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \tag{81}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \tag{83}$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{1.001^n}\right) \tag{84}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1.001 \left(\frac{n}{n+1}\right)^5\right) \tag{85}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1.001 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5\right) \tag{86}$$

$$= 1.001 > 1 \tag{87}$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!}\right) \tag{88}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) \tag{89}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \tag{90}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right) \tag{91}$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \tag{92}$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{\left(2\left(n+1\right)\right)!}\cdot\frac{(2n)!}{5^n\left(n!\right)^2}\right) \tag{93}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5\left(n+1\right)^2}{\left(2n+2\right)\left(2n+1\right)} \tag{94}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5\left(n+1\right)}{2\left(2n+1\right)} \tag{95}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5\left(n+1\right)}{4\left(n+1\right)-2} \tag{96}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{4-\frac{2}{n+1}} \tag{97}$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \tag{98}$$

よって、発散する

5.3

$f\left(x\right) = \dfrac{1}{x\left(\log x\right)^\alpha}, x > 2$ から $f\left(x\right) > 0, f'\left(x\right) = -\dfrac{1}{x^2\left(\log x\right)^{\alpha+1}}\left(\log x + \alpha\right) < 0$
よって、$f\left(x\right)$ は非負減少で、積分判定法で判定できる.
i.e.

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\left(\log k\right)^\alpha}\text{ 収束 } \Longleftrightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x\left(\log x\right)^\alpha}\mathrm{d}x\text{ 収束}$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\left(\log x\right)^\alpha}\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \tag{99}$$

- $\alpha = 1, \displaystyle\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\log t\right]_{\log 2}^\infty = \lim_{R\to\infty}\left(\log R - \log\log 2\right) = \infty$
- $0 < \alpha < 1, \displaystyle\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\left(1-\alpha\right)t^{\alpha-1}}\right]_{\log 2}^\infty = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1-\alpha\right)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)\left(\log 2\right)^{\alpha-1}}\right) = \infty$
- $\alpha > 1, \displaystyle\int_{\log 2}^\infty \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\left(1-\alpha\right)t^{\alpha-1}}\right]_{\log 2}^\infty = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1-\alpha\right)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{\left(1-\alpha\right)\left(\log 2\right)^{\alpha-1}}\right) = -\dfrac{1}{\left(1-\alpha\right)\left(\log 2\right)^{\alpha-1}}$

よって、$\alpha > 1$ のときは収束で、それ以外の条件は発散する

5.4

(1)

$$
\begin{aligned}
\cos(-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-z)^{2n}}{(2n)!} && (100)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} && (101)\\
&= \cos z && (102)\\
\sin -z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} && (103)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} && (104)\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} && (105)\\
&= -\sin z && (106)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
e^{\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} && (107)\\
&\overset{\omega=iz}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} && (108)\\
&= \cos z + i \sin z && (109)
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) && (110)\\
\sin z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) && (111)
\end{aligned}
$$

5.5

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$z_n \longrightarrow z \in \mathbb{C}$ から $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, |z_n - z| < \epsilon$

$$
\begin{aligned}
|x_n - x| &= |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(z_n - z)| < \epsilon && (112)\\
|y_n - y| &= |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z_n - z)| < \epsilon && (113)
\end{aligned}
$$

よって、$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R} \\ y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R} \\ y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}$ から、$\forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_1, N_2\}, s.t. \begin{cases} \forall n \geq N_1, |x_n - x| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{2}} \\ \forall n \geq N_2, |y_n - y| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \tag{114}$$
$$= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \tag{115}$$
$$< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon \tag{116}$$

5.6

(1)

$$\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}(1+1)^{2n+1} \tag{117}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}\right) \tag{118}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)!}(S_{odd} + S_{even}) \tag{119}$$

次は

$$(1-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{2n+1-k} C_{2n+1}^{k} \tag{120}$$

k は奇数のとき、$(-1)^{2n+1-k} = 1$ で、k は偶数のとき、$(-1)^{2n+1-k} = -1$ だから
$S_{odd} - S_{even} = 0$
以上の (119) と (120) より、$\begin{cases} S_{odd} + S_{even} = 2^{2n+1} \\ S_{odd} - S_{even} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S_{odd} = 2^{2n} \\ S_{even} = 2^{2n} \end{cases}$
S_{odd} と S_{even} を書き直すと

$$S_{odd} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \tag{121}$$
$$S_{even} = \sum_{j=1}^{n} C_{2n+1}^{2j} \tag{122}$$

S_{odd} だけみると

$$\sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{2j+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2j+1)!\,(2k)!} \tag{123}$$

$S_{odd} = S_{even}$ より (119) に代入するともとの式が証明できる

(2)

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, z^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{124}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!} \tag{125}$$

よって

$$2\sin z \cos z = 2\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, z^{2k}}{(2k)!}\right) \tag{126}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (-1)^{j+k}\, \frac{z^{2n+1}}{(2j+1)!\,(2k)!} \tag{127}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (-1)^n\, z^{2n+1} \frac{2}{(2j+1)!\,(2k)!} \tag{128}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, z^{2n+1} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{129}$$

$$= \sin(2z) \tag{130}$$

6 No.6

6.1

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2} \tag{131}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2n^2} \tag{132}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right) \tag{133}$$
$$= \frac{1}{2} < 1 \tag{134}$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5}\cdot\frac{n^5}{1.001^n}\right) \tag{135}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1.001\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\right) \tag{136}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1.001\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^5\right) \tag{137}$$
$$= 1.001 > 1 \tag{138}$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}\right) \tag{139}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(2(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) \tag{140}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \tag{141}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right) \tag{142}$$
$$= \frac{2}{e} < 1 \tag{143}$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}\right) \tag{144}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \tag{145}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \tag{146}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{4(n+1)-2} \tag{147}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{4-\frac{2}{n+1}} \tag{148}$$
$$= \frac{5}{4} > 1 \tag{149}$$

よって、発散する

6.2

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n} \tag{150}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \tag{151}$$

よって、絶対収束

(2)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3+\frac{1}{n}} = 0$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}a_n = \frac{1-n^2}{(n^2+3n+1)^2} < 0$ から、a_n は単調減少であるまた、$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$
よって $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+3n+1}$ は収束であり、$\frac{n}{n^2+3n+1} \sim \frac{1}{n}$ から絶対収束ではない

(3)

$f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ かつ単調減少であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ が収束 $\iff \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ が収束

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1 \tag{152}$$

よって、絶対収束

(4)

$a_n = \frac{n}{n+1}$ とすると、$0 < a_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるが、$a_{n+1} > a_n$ から、収束でない

(5)

$a_n = \dfrac{1}{n\log n}$ とする
$0 < a_n, a_{n+1} < a_n$ で $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
よって、収束である

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} \tag{153}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{154}$$
$$= \infty > 1 \tag{155}$$

よって、条件収束

(6)

$\cos n\pi = (-1)^n$ から、もとの式は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n}}$ ここで $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ から、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ が絶対収束であるからこの式も絶対収束

(7)

$\dfrac{\sqrt{n}}{n+4} > 0, \forall n \geq 4, \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$ は単調減少である. また $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\frac{4}{\sqrt{n}}} = 0$ から、$1 \leq n \leq 3$ を含めても収束
$n \geq 4$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+4} \tag{156}$$
$$\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n} \tag{157}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{158}$$

ここの (158) 式は積分判定法より発散するから、もとの式は絶対収束しない