Contents

1 実数と複素数

Def 1. $S \subset \mathbb{R}$ とする.

$$S^* = \{x \in \mathbb{R} : S \subset (-\infty, x]\}, S_* = \{x \in \mathbb{R} : S \subset [x, \infty)\}$$

· $x \in S^*$ のとき、x は S の上界である

· $x \in S_*$ のとき、x は S の下界である

· $S^* \neq \emptyset$ のとき、S は上に有界である

· $S_* \neq \emptyset$ のとき、S は下に有界である

· S は上にも下にも有界であるとき、S は有界である

Def 2. $S \subset \mathbb{R}$ とする.

· $x \in S \cap S^*$ のとき、x は S の最大数である、$\max S$ で書く

· $x \in S \cap S_*$ のとき、x は S の最小数である、$\min S$ で書く

Thm 1. $S \subset \mathbb{R}$ かつ $S \neq \emptyset$ とする

· $S^* \neq \emptyset$ のとき、S^* の最小数 $\min S^*$ が存在する

· $S_* \neq \emptyset$ のとき、S_* の最大数 $\max S_*$ が存在する

Def 3. $S \subset \mathbb{R}$ かつ $S \neq \emptyset$ とする

· $S^* \neq \emptyset, \sup S = \min S^*$. また $S^* = \emptyset, \sup S = \infty$

· $S_* \neq \emptyset, \inf S = \max S_*$. また $S_* = \emptyset, \inf S = -\infty$

Def 4. $\{x_{n]}\}$ は実数列とする

· $x_n \leq x_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$ のとき、$\{x_{n]}\}$ は非減少である

· $x_{n+1} \leq x_n\,(n \in \mathbb{N})$ のとき、$\{x_n\}$ は非増加である

Def 5. $\{x_n\}$ は実数列とし、$a \in \mathbb{R}$ とする
任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$n \geq n_0$ ならば $|x_n - a| < \epsilon$ が成り立つとき、$\{x_n\}$ は a に収束するといい、$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ または $x_n \to a$ と表す
なお、$x_n \to a$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき、$\{x_n\}$ は収束する、または $\{x_n\}$ は収束列であるという

Thm 2. $\{x_n\}$ は実数列とする

· $\{x_n\}$ が非減少かつ上に有界ならば、$\{x_n\}$ は収束する

· $\{x_n\}$ が非増加かつ下に有界ならば、$\{x_n\}$ は収束する

Def 6. $\{x_n\}$ は有界な実数列とする.$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha_n = \inf\{x_k : k \geq n\}, \beta_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$$

と定めると、$\alpha_1 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \beta_1$ である

· $\{\alpha_n\}$ は非減少かつ上に有界だから収束する. この極限値 $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$ を $\{x_n\}$ の下極限という

· $\{\beta_n\}$ は非増加かつ下に有界だから収束する. この極限値 $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$ を $\{x_n\}$ の上極限という

Thm 3. $\{x_n\}$ は有界な実数列とする. 以下同値：

· $\{x_n\}$ は収束列

· $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$

Def 7. $\{x_n\}$ は実数列とする.
任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$m, n \geq n_0$ ならば $|x_m - x_n| < \epsilon$ が成り立つとき、$\{x_n\}$ は ***Cauchy*** 列である

Cor 1. *Cauchy* 列は有界である

Thm 4. $\{x_n\}$ は実数列とする. 以下同値：

· $\{x_n\}$ は収束列である

· $\{x_n\}$ は *Cauchy* 列である

Def 8.

$$\mathbb{C} = \left\{x + yi : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ に対して

· x を z の実部といい、$\mathrm{Re}z$ で表す

· y を z の虚部といい、$\mathrm{Im}z$ で表す

· $x - yi$ を z の共役複素数といい、$\overline{z}$ で表す

· $\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値といい、$|z|$ で表す

2 ノルム空間

Def 9. X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. 写像 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ がノルムであるとは、以下の条件が成り立つことである：

- $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$. また、$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルム空間とは、線形空間とノルムの組 $(X, \|\cdot\|)$ である

Def 10. $x, y \in \mathbb{K}^N$ に対して、内積は

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

参考文献