§1

1.1

(1)

$\sin, \cos$ は C^∞ であるから、σ も C^∞ である
$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u^2\cos v \\ -2u^2\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$u \in (0,\infty), v \in (0,2\pi)$ から $\cos v = \sin v = 0$ をみたす v は存在しない
よって、$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) \neq \mathbf{0}$、$\sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v)$ は線形独立である
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in (0,\infty) \times (0,2\pi), \sigma(u,v) = \sigma(u',v')$ とする

$$\sigma(u,v) = \sigma\left(u',v'\right)$$
$$\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'\cos v' \\ u'\sin v' \\ 2u'^2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases} \Longrightarrow \sigma$ は単射である
以上より、$\sigma(D)$ は σ でパラメーター表示された曲面片である

(2)

$x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z$ から、$\forall p \in S, p \in T$. また $u \in (0,\infty), v \in (0,2\pi)$ から、$y = u\sin v \neq 0$（実際、ここの $y \neq 0$ の意味は、定義域の中ですべて $y = 0$ をみたす点を除くものである. 言い換えれば、$x \geq 0, y = 0$ を除く（$x = 0$ は $v = \pi$ であるとき））
よって、$S \subset T \backslash C$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T\backslash C$ とする.xy 平面で極座標変換をすると
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix} \Longrightarrow z = x^2 + y^2 = u^2$
また、極座標変換より $u > 0$. なお、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \notin C$ から、$v \neq 2n\pi$
よって、$v \in (0,2\pi)$. 言い換えれば、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S, T\backslash C \subset S$
以上より、$S = T\backslash C$

(3)

$$p = \sigma(1,\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \sigma_u(1,\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_v(1,\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \sigma_u(1,\pi) \times \sigma_v(1,\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \pi := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2(x+1) + (z-1) = 0 \right\}$$

(4)

$$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos v \\ -2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix}, \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\| = u\sqrt{4u^2+1}$$

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \begin{pmatrix} -2u \cos v \\ -2u \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$