§3

1

(1)

$f=x^2+y^2-z^2+r^2$ とすると $S\cap\mathbb{R}^3=S=f^{-1}(\{0\})$
$\forall p=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in S$

$$(\nabla f)(p)=\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \tag{1}$$

もし $(\nabla f)(p)=0$ となると、$x=y=z=0$ で、$r=0$
これは $r>0$ と矛盾するから $(\nabla f)(p)\neq 0$

(2)

σ_+ が局所パラメーター表示

$\forall\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\sigma_+(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix}$
$u^2+v^2-\left(r^2+u^2+v^2\right)=-r^2$ から、$\sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right)\subset S$

・ u,v と $\sqrt{r^2+u^2+v^2}$ は C^∞ から、σ_+ も C^∞

・ $\sigma_{+_u}(u,v)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix},\sigma_{+_v}(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix}$

$\sigma_{+_u}\times\sigma_{+_v}=\begin{pmatrix} -\dfrac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ -\dfrac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$ の第三成分は 0 でないから $\sigma_{+_u}\times\sigma_{+_v}\neq 0$
よって、σ_{+_u} と σ_{+_v} は線形独立

・ $\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \sqrt{r^2+u'^2+v'^2} \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{cases} u=u' \\ v=v' \end{cases}$
よって、σ_+ は単射

以上より、σ_+ は S の局所パラメーター表示である

σ_- が局所パラメーター表示

$\forall\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2,\sigma_-(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix}$
$u^2+v^2-\left(r^2+u^2+v^2\right)=-r^2$ から、$\sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)\subset S$

・ u, v と $\sqrt{r^2+u^2+v^2}$ は C^∞ から、σ_+ も C^∞

・ $\sigma_{-_u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix}, \sigma_{-_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \end{pmatrix}$

$\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$ の第三成分は 0 でないから $\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v} \neq 0$

よって、σ_{-_u} と σ_{-_v} は線形独立

・ $\begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ -\sqrt{r^2+u'^2+v'^2} \end{pmatrix}$ とすると、$\begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

よって σ_- は単射

以上より、σ_- は局所パラメーター表示

(3)

$\left(S \subset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S, x^2+y^2-z^2+r^2=0$

$\Longrightarrow z = \pm\sqrt{r^2+x^2+y^2}$

よって、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2+x^2+y^2} \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{r^2+x^2+y^2} \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$

これを言い換えると、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\left(S \supset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$

$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R}\right\} \tag{2}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} u \\ v \\ \pm\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R}\right\} \tag{3}$$

(3) に対して、$u^2+v^2-\left(\pm\sqrt{r^2+u^2+v^2}\right)^2 = r^2$ であるから

$\sigma_+(u,v) \vee \sigma_-(u,v) \in S$

以上より、$S = \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

(4)

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + r^2$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$ から

$T_pS = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x_0x + 2y_0y - 2z_0z = 0 \right\}$

(5)

σ_+ に対して

$$\frac{\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v}}{\|\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{r^2+u^2+v^2} + \frac{v^2}{r^2+u^2+v^2} + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

σ_- に対して

$$\frac{\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v}}{\|\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{r^2+u^2+v^2} + \frac{v^2}{r^2+u^2+v^2} + 1}} \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

また、$n(\sigma_+(u,v)), n(\sigma_-(u,v))$ それぞれは

$$n(\sigma_+(u,v)) = \frac{(\nabla f)(\sigma_+(u,v))}{\|(\nabla f)(\sigma_+(u,v))\|} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -2\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$= -\frac{\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v}}{\|\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v}\|} \tag{10}$$

$$n(\sigma_-(u,v)) = \frac{(\nabla f)(\sigma_-(u,v))}{\|(\nabla f)(\sigma_-(u,v))\|} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 2\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$= \frac{\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v}}{\|\sigma_{-_u} \times \sigma_{-_v}\|} \tag{13}$$

よって、単位法ベクトル場 n と共に正の向きになるのは σ_- である

2

(1)

$T_{R,r} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$

有界性：$\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 \leq r^2 \\ z^2 \leq r^2 \end{cases}$ から $\begin{cases} x^2+y^2 \leq (R+r)^2 \\ z^2 \leq r^2 \end{cases}$

言い換えれば $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{(R+r)^2 + r^2}$

閉集合：$\{x_n\} \subset T_{R,r}$ を収束列とすると $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ であり、f は連続写像であるから、$f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$

また、f に対して、$f(x) = r^2, f(x_n) = r^2$ だから、$\lim_{n\to\infty} x_n \in T_{R,r}$

以上より、$T_{R,r}$ は閉曲面である

(2)

$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}$

$\sigma_u = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -(R + r\cos u)\sin v \\ (R + r\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(R + r\cos u)\sin v \\ (R + r\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$= \begin{pmatrix} -r(R + r\cos u)\cos u\cos v \\ -r(R + r\cos u)\cos u\sin v \\ -r(R + r\cos u)\sin u\cos^2 v - r(R + r\cos u)\sin u\sin^2 v \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} -r(R + r\cos u)\cos u\cos v \\ -r(R + r\cos u)\cos u\sin v \\ -r(R + r\cos u)\sin u \end{pmatrix} \tag{16}$$

また

$$v(\sigma(u,v)) = v((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u) \tag{17}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{(R + r\cos u)\sin v}{(R + r\cos u)^2} \\ \dfrac{(R + r\cos u)\cos v}{(R + r\cos u)^2} \\ \dfrac{r\sin u}{(R + r\cos u)^2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin v}{R + r\cos u} \\ \dfrac{\cos v}{R + r\cos u} \\ \dfrac{r\sin u}{(R + r\cos u)^2} \end{pmatrix} \tag{19}$$

以上

$$\iint_S v\cdot \mathrm{d}A=\iint_{[0,2\pi]^2}\begin{pmatrix}-\dfrac{\sin v}{R+r\cos u}\\ \dfrac{\cos v}{R+r\cos u}\\ \dfrac{r\sin u}{(R+r\cos u)^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-r\,(R+r\cos u)\cos u\cos v\\ -r\,(R+r\cos u)\cos u\sin v\\ -r\,(R+r\cos u)\sin u\end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(r\cos u\sin v\cos v-r\cos u\sin v\cos v-\frac{r^2\sin^2 u}{R+r\cos u}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-r^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u}{R+r\cos u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=-2\pi r^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u}{R+r\cos u}\mathrm{d}u$$

ここで、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u}{R+r\cos u}\mathrm{d}u$ だけ考えよう

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u}{R+r\cos u}\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos^2 u}{R+r\cos u}\mathrm{d}u \tag{20}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{r^2}(R+r\cos u)(R-r\cos u)+1-\frac{R^2}{r^2}}{R+r\cos u}\mathrm{d}u \tag{21}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r^2}(R-r\cos u)+\frac{1-\frac{R^2}{r^2}}{R+r\cos u}\right)\mathrm{d}u \tag{22}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{R}{r^2}-\frac{1}{r}\cos u\right)\mathrm{d}u+\frac{r^2-R^2}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R+r\cos u}\mathrm{d}u \tag{23}$$

$$=\frac{2\pi R}{r^2}+\frac{r^2-R^2}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R+r\cos u}\mathrm{d}u \tag{24}$$

ここで、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{R+r\cos u}\mathrm{d}u$ を計算しよう

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{R+r\cos u}\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\frac{R-r\cos u}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u \tag{25}$$

$$=R\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u-r\int_0^{2\pi}\frac{\cos u}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u \tag{26}$$

$$=R\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u \tag{27}$$

後ろの $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos u}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u$ について、$\displaystyle\frac{\cos u}{R^2-r^2\cos^2 u}$ は奇関数だから積分範囲内で総和 0

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2-r^2\cos^2 u}\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^2-r^2\frac{\cos 2u+1}{2}}\mathrm{d}u \tag{28}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(R^2-\frac{r^2}{2}\right)-\frac{r^2}{2}\cos 2u}\mathrm{d}u \tag{29}$$

計算便利のため、$a=R^2-\dfrac{r^2}{2}, b=\dfrac{r^2}{2}$ とすると (28) 式は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a-b\cos 2u}\mathrm{d}u$ になり.
また、定積分の処理が面倒なので、不定積分の形で計算しよう

$$\int\frac{1}{a-b\cos 2u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\frac{1}{a-b\cos x}\mathrm{d}x \tag{30}$$

ここで、$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と変換すると $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ で
積分の上下限は共に 0 になるが、実際 2 回 $-\infty\to\infty$ の広義積分が出てくるから

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{a-b\cos x}\mathrm{d}x = 2\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-b\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{31}$$

$$= 2\int\frac{1}{a\left(1+t^2\right)-b\left(1-t^2\right)}\mathrm{d}t \tag{32}$$

$$= 2\int\frac{1}{(a-b)+(a+b)\,t^2}\mathrm{d}t \tag{33}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int\frac{1}{1+\frac{a+b}{a-b}t^2}\mathrm{d}t \tag{34}$$

そして、$\dfrac{a+b}{a-b}t^2=\tan^2\theta$ となる変数変換をすると $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\mathrm{d}\theta$ となり

$$\frac{2}{a-b}\int\frac{1}{1+\frac{a+b}{a-b}t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{a-b}\int\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\mathrm{d}\theta \tag{35}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\int\mathrm{d}\theta \tag{36}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\theta \tag{37}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}t\right) \tag{38}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan\frac{x}{2}\right) \tag{39}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan u\right) \tag{40}$$

以上より

$$\int\frac{1}{a-b\cos 2u}\mathrm{d}u = \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan u\right)+C \tag{41}$$

から

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a-b\cos 2u}\mathrm{d}u = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \tag{42}$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan u\right)\right]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\epsilon} \tag{43}$$

$$+\lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan u\right)\right]_{\frac{3\pi}{2}+\epsilon}^{2\pi} \tag{44}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 \tag{45}$$

$$= \frac{2\pi}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tag{46}$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{R + r\cos u} \mathrm{d}u = R \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b\cos 2u} \mathrm{d}u \tag{47}$$

$$= \frac{2\pi R}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tag{48}$$

$$= \frac{2\pi R}{R^2 - r^2}\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} \tag{49}$$

(24) 式に代入すると

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R + r\cos u} \mathrm{d}u = \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{R^2 - r^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R + r\cos u} \mathrm{d}u \tag{50}$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{R^2 - r^2}{r^2} \frac{2\pi R}{R^2 - r^2}\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} \tag{51}$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{2\pi R}{r^2}\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2}} \tag{52}$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{2\pi}{r^2}\sqrt{R^2 - r^2} \tag{53}$$

$$= \frac{2\pi}{r^2}\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) \tag{54}$$

だから

$$\iint_S v \cdot \mathrm{d}A = -2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R + r\cos u} \mathrm{d}u \tag{55}$$

$$= -2\pi r^2 \cdot \frac{2\pi}{r^2}\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) \tag{56}$$

$$= -4\pi^2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right) \tag{57}$$

(3)

$v = \nabla \times \omega$ をみたす ω が存在すると仮定すると、Stokes の定理より

$$\iint_S v \cdot \mathrm{d}A = \iint_S (\nabla \times \omega) \cdot \mathrm{d}A = 0 \tag{58}$$

(2) の計算結果により、$R = \sqrt{R^2 - r^2}$. 言い換えれば、$r = 0$
これは $r > 0$ と反するから. このような ω は存在しない