§2

E2.1

(i)

$\cos u, \sin u$ は C^∞ から、σ も C^∞
$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) &= \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\cos u = \sin u = 0$ をみたす $u \in (0, 2\pi)$ は存在しないから、$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) \neq \mathbf{0}$
よって $\sigma_u(u,v)$ と $\sigma_v(u,v)$ は線形独立である
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in D, \sigma(u,v) = \sigma(u',v')$ をする

$$\begin{gathered}\sigma(u,v) = \sigma(u',v') \\ \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos u' \\ r\sin u' \\ v' \end{pmatrix}\end{gathered}$$

よって、$\cos u = \cos u', \sin u = \sin u', v = v' \Longrightarrow \tan u = \tan u', v = v' \Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$
よって、σ は単射である
以上より、$\sigma(D)$ は σ でパラメーター表示された曲面片である

(ii)

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 u + r^2\sin^2 u = r^2 \Rightarrow \sigma(u,v) \in S_r, u \in (0,2\pi) \Rightarrow y \neq 0\,(\iff x \neq r)$
$\Longrightarrow \sigma(D) \subset S_r \backslash C$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S_r \backslash C$ とすると $x^2 + y^2 = r^2 \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$
極座標変換をすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \end{pmatrix} \wedge u \neq 2n\pi$
u の周期性を考えるとこれは $u \in (0, 2\pi)$ で $v = z$ とすれば $v \in \mathbb{R}$ も明らかに成立するから
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \sigma(D)\,(\iff S_r \backslash C \subset \sigma(D))$

E2.2

$\sin, \cos$ は C^∞ から σ も C^∞

$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ b\cos u\sin v \\ -c\sin u \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ b\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) &= \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ b\cos u\sin v \\ -c\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ b\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc\sin^2 u\cos v \\ ac\sin^2 u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$a,b,c>0, u\in(0,\pi) \Longrightarrow \sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) \iff \sin v = \cos v = 0$
$v\in(0,2\pi)$ から、これをみたす v は存在しない
よって $\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) \neq \mathbf{0}$
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in D, \sigma(u,v) = \sigma(u',v')$ とする

$$\sigma(u,v) = \sigma\left(u',v'\right)$$
$$\begin{pmatrix} a\sin u\cos v \\ b\sin u\sin v \\ c\cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin u'\cos v' \\ b\sin u'\sin v' \\ c\cos u' \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \sin u\cos v = \sin u'\cos v' \\ \sin u\sin v = \sin u'\sin v' \\ \cos u = \cos u' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \\ u = u' \qquad u\in(0,\pi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$
よって、σ は単射である
以上より、$\sigma(D)$ は σ でパラメーター表示された曲面片である

P2.1

多項式だから C^∞ のは自明である
$\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u+2v \\ 3u^2+6uv \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 3u^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\sigma_u\times\sigma_v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2u+2v \\ 3u^2+6uv \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 3u^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6u^2v \\ -3u^2 \\ 2u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$u,v\neq 0 \Longrightarrow \sigma_u\times\sigma_v \neq 0$
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in D$ とする.

$$\begin{pmatrix} u \\ u^2+2uv \\ u^3+3u^2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ u'^2+2u'v' \\ u'^3+3u'^2v' \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

P2.2

e^x は C^∞ から、σ も C^∞
$\sigma_u = \begin{pmatrix} e^u - e^{-u} \\ e^u + e^{-u} \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \begin{pmatrix} e^u - e^{-u} \\ e^u + e^{-u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^u + e^{-u} \\ e^{-u} - e^u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第 1 成分は常に 0 以上であるから、$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$
$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in D$ とする.

$$\begin{pmatrix} e^u + e^{-u} \\ e^u - e^{-u} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{u'} + e^{-u'} \\ e^{u'} - e^{-u'} \\ v' \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

P2.3

(i)

$\cos v, \sin v : C^\infty$ から σ も C^∞
$\sigma_u = \begin{pmatrix} a \cos v \\ b \sin v \\ 2u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -au \sin v \\ bu \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \begin{pmatrix} a \cos v \\ b \sin v \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -au \sin v \\ bu \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2bu^2 \cos v \\ -2au^2 \sin v \\ abu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$u \neq 0, abu \neq 0, \sigma_u \times \sigma_v \neq 0$
$\begin{pmatrix} au \cos v \\ bu \sin v \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au' \cos v' \\ bu' \sin v' \\ u'^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

(ii)

$0 \notin (0, 2\pi) \Longrightarrow \sin v \neq 0 \Longrightarrow y \neq 0$

$a, b, u > 0$ から、$\begin{pmatrix} au\cos v \\ bu\sin v \end{pmatrix} \notin (0, \infty) \times \{0\}$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{(au\cos v)^2}{a^2} + \dfrac{(bu\sin v)^2}{b^2} = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2 = z$

$\therefore \sigma(D) \subset S \backslash C$

$\sigma(u, v) \in S \backslash C$ とする

$\begin{pmatrix} au\cos v \\ bu\sin v \\ u^2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \right\}$ は常に成立する

$\sigma(u, v) \notin C \Longrightarrow bu\sin v \neq 0 \Longrightarrow v \neq 2n\pi$

$\Longrightarrow \sigma(u, v) \in \sigma(D) \Longrightarrow \sigma(D) \supset S \backslash C$

$\therefore \sigma(D) = S \backslash C$