5.1

(1)

$f \overset{def}{:=} x\sin\dfrac{z}{k} - y\cos\dfrac{z}{k} = 0$ とする、$\forall \mathbf{p} \in S, \forall\epsilon > 0, \forall U = N(\mathbf{p}, \epsilon) \cap S = f^{-1}(\{0\})$
また、$\nabla f = \begin{pmatrix} \sin\frac{z}{k} \\ -\cos\frac{z}{k} \\ \frac{x}{k}\cos\frac{z}{k} + \frac{y}{k}\sin\frac{z}{k} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin\frac{z}{k} = 0 \\ -\cos\frac{z}{k} = 0 \\ \frac{x}{k}\cos\frac{z}{k} + \frac{y}{k}\sin\frac{z}{k} = 0 \end{cases}$
$\sin\frac{z}{k} = -\cos\frac{z}{k} = 0$ をみたす $z \in \mathbb{R}$ は存在しないから、$(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq 0$
以上より、S は正則曲面である

(2)

$\cos v, \sin v : C^\infty$ から、$\sigma : C^\infty$
$\sigma_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ k \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k\sin v \\ -k\cos v \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\sin v = \cos v = 0$ をみたす v は存在しないから、$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ で、σ_u と σ_v は線形独立

$$\begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ kv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'\cos v' \\ u'\sin v' \\ kv' \end{pmatrix}$$

とすると、第三成分から $v = v'$ で、第一成分または第二成分に代入すると、$u = u'$
よって、σ は単射である. 以上より、σ は局所パラメーター表示である

(3)

$S \subset \sigma\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ とすると $x \sin\dfrac{z}{k} - y\cos\dfrac{z}{k} = 0$
このとき、$v = \dfrac{z}{k}, u = x\cos v + y\sin v$ とすると

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) &= \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ kv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(x\cos\frac{z}{k} + y\sin\frac{z}{k}\right)\cos\frac{z}{k} \\ \left(x\cos\frac{z}{k} + y\sin\frac{z}{k}\right)\sin\frac{z}{k} \\ k\frac{z}{k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \sigma\left(\mathbb{R}^2\right)\end{aligned}$$

$S \supset \sigma\left(\mathbb{R}^2\right)$

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ kv \end{pmatrix}$$

とする

$$\begin{aligned}x\sin\frac{z}{k} - y\cos\frac{z}{k} &= (u\cos v)\sin v - (u\sin v)\cos v \\ &= 0\end{aligned}$$

から、$\sigma\left(\mathbb{R}^2\right) \subset S$
　以上より $S = \sigma\left(\mathbb{R}^2\right)$

5.2

(1)

$f = x^2 - y^2 - r^2$ とすると $\forall\mathbf{p} \in S, \forall\epsilon > 0, \forall U = N(\mathbf{p}, \epsilon) \cap S = f^{-1}(\{0\})$
$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 0 \end{pmatrix}$ で、$\forall\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S, x^2 = y^2 + r^2 > 0$ から、$(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq 0$
以上より、S が正則曲面である

(2)

σ_+ と σ_- は第一成分の符号だけ違っているから、σ_+ だけ確認すればいい
$\cosh u, \sinh u, v : C^\infty$ から $\sigma_+ : C^\infty$

$\sigma_{+_u} = \begin{pmatrix} r\sinh u \\ r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_{+_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v} &= \begin{pmatrix} r\sinh u \\ r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cosh u \\ -r\sinh u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$r\cosh u = r\sinh u = 0$ をみたす u は存在しないから、$\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v} \neq 0$ で、σ_{+_u} と σ_{+_v} は線形独立

$$\begin{pmatrix} r\cosh u \\ r\sinh u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cosh u' \\ r\sinh u' \\ v' \end{pmatrix}$$

よって $u = u', v = v'$ だから、σ_+ は単射である

(3)

$S \subset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ とすると $x^2 - y^2 = r^2$

$x^2 \mapsto (r\cosh u)^2, y \mapsto r\sinh u, z \mapsto v$ をみたす全単射が存在するから、$\mathbf{p} \in \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$S \supset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \int \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$ とする

$(r\cosh u)^2 - (r\sinh u)^2 = (-r\cosh u)^2 - (r\sinh u)^2 = r^2\left(\cosh^2 u - \sinh^2 u\right) = r^2$

よって、$\mathbf{p} \in S$

5.1

(1)

$f := x^2 + y^2 - a^2\cosh^2\dfrac{z}{a}$ とすると、$\forall \mathbf{p} \in S, \forall \epsilon > 0, \forall U = N(\mathbf{p}, \epsilon) \cap S = f^{-1}(\{0\})$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2a\sinh\dfrac{z}{a}\cosh\dfrac{z}{a} \end{pmatrix}$ で、$(\nabla f)(\mathbf{p}) = 0$ となる $\mathbf{p}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$ だから $(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq 0$

(2)

$\cosh u, \cos v, \sin v : C^\infty$ から $\sigma : C^\infty$

$\sigma_u = \begin{pmatrix} a\sinh u\cos v \\ a\sinh u\sin v \\ a \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -a\cosh u\sin v \\ a\cosh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \begin{pmatrix} a\sinh u\cos v \\ a\sinh u\sin v \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cosh u\sin v \\ a\cosh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a^2\cosh u\cos v \\ -a^2\cosh u\sin v \\ a^2\sinh u\cosh u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\cosh u > 0$ かつ $\cos v = \sin v = 0$ をみたす $v \in (0, 2\pi)$ は存在しないから、$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$
よって、σ_u と σ_v は線形独立

$$\begin{pmatrix} a\cosh u\cos v \\ a\cosh u\sin v \\ au \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cosh u'\cos v' \\ a\cosh u'\sin v' \\ au' \end{pmatrix}$$

とすると、$u = u'$ で、$\begin{cases} \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \end{cases}, v = v'$
よって、σ は単射である

5.2

(1)

$f = x^2 + y^2 - z^2 - r^2$ とすると、$\forall \mathbf{p} \in S, \forall\epsilon > 0, \forall U = N(\mathbf{p}, \epsilon) \cap S = f^{-1}(\{0\})$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$ で、$(\nabla f)(\mathbf{p}) = 0$ をみたす $\mathbf{p}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で S に属しないから、$(\nabla f)(p) \neq 0$

(2)

$\cosh u, \sinh u, \cos v, \sin v : C^\infty$ から $\sigma : C^\infty$

$\sigma_u = \begin{pmatrix} r\sinh u\cos v \\ r\sinh u\sin v \\ r\cosh u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -r\cosh u\sin v \\ r\cosh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= \begin{pmatrix} r\sinh u\cos v \\ r\sinh u\sin v \\ r\cosh u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\cosh u\sin v \\ r\cosh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r^2\cosh^2 u\cos v \\ -r^2\cosh^2 u\sin v \\ r^2\sinh u\cosh u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\cosh u > 0$ かつ $\cos v = \sin v = 0$ をみたす $v \in (0, 2\pi)$ は存在しないから、$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$
よって、σ_u と σ_v は線形独立

$$\begin{pmatrix} r\cosh u\cos v \\ r\cosh u\sin v \\ r\sinh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cosh u'\cos v' \\ r\cosh u'\sin v' \\ r\sinh u \end{pmatrix}$$

第三成分より $u = u', \begin{cases} \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \end{cases}, v = v'$

よって、σ は単射である

5.3

(1)

$f = x^2 + y^2 - z^2 + r^2$ とすると、$\forall \mathbf{p} \in S, \forall \epsilon > 0, \forall U = N(\mathbf{p}, \epsilon) \cap S = f^{-1}(\{0\})$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} = 0$ をみたす $\mathbf{p}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$ から、$(\nabla f)(\mathbf{p}) \neq 0$

(2)

σ_+ と σ_- は第三成分の符号の違いだけあるから、σ_+ だけ考えればいい

$u, v, \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} : C^\infty$ から $\sigma_+ : C^\infty$

$\sigma_{+_u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix}, \sigma_{+_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dfrac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ -\dfrac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第三成分は 0 ではないから、$\sigma_{+_u} \times \sigma_{+_v} \neq 0$

よって、σ_{+_u} と σ_{+_v} は線形独立

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \sqrt{r^2 + u'^2 + v'^2} \end{pmatrix}$$

とする. 第一成分と第二成分の比較より、$\begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$

よって、σ_+ は単射である

(3)

$S \subset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ とすると、$x^2 + y^2 - z^2 + r^2 = 0$

$u^2 + v^2 - \left(\pm\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}\right)^2 = -r^2$ で、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$S \supset \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$

$u^2 + v^2 - \left(\pm\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}\right)^2 = -r^2$ で、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$

以上より、$S = \sigma_+\left(\mathbb{R}^2\right) \cup \sigma_-\left(\mathbb{R}^2\right)$