第二回
Cheng Kexin

K.2

(1)

(a)

$$
\begin{aligned}
S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -x \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\left(\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix} \right)^2} \\
&= \sqrt{x^4 + x^2 + 1}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} &= \frac{{}^t\left(\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix} \right)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \\
&= \pm \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2)

対称性より、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$が互いに平行する場合だけ証明すればいい

(a)

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$とする

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

(b)

三重積の順序は影響を与えないから、$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$より、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$で作った平行四辺形の面積は0である。よって、三重積も0である

(3)

ここで、${}^t\mathbf{a} :={}^t (a_1, a_2, a_3)\,,{}^t\,\mathbf{b} :={}^t (b_1, b_2, b_3)\,,{}^t\,\mathbf{c} :={}^t (c_1, c_2, c_3)$とする

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \\ a_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1 & b_2c_3 - b_3c_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_2c_3 - b_3c_2 \\ a_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって$\mathrm{LHS} = \mathrm{RHS}$から、$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 & c_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & c_3 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & c_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & c_1 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)\,c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)\,c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 \\ a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 \\ a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1 \\ a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2 \\ a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} = \mathrm{RHS}
\end{aligned}$$

これより、$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$が得られる

反例：${}^t\mathbf{a} = {}^t(1,2,3), {}^t\mathbf{b} = {}^t(4,5,6), {}^t\mathbf{c} = {}^t(7,8,9)$
ここで

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
&= \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \\
&= 50\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - 32\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\-6\\12\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} \\
&= \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \\
&= 50\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - 122\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}78\\6\\-66\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c)

ここで、(a)を用いて、

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b} \\
&= \sum_{\mathrm{cyc}}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} \\
&= 0
\end{aligned}$$

P2.1

外積の幾何的な意味では、$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$の$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$部分は$\mathbf{b}$と$\mathbf{c}$からなる平行四辺形の$\mathbf{b},\mathbf{c}$平面と正交する方向での面積であり、$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$の内積はその方向での射影の長さ、言い換えればその平面と正交する高さ、よって、これは平行六面体の体積である

P2.2

(1)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= ((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c} - ((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d} \\
&= [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]\,\mathbf{c} - [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{d} \\
&= [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{b}]\,\mathbf{a}
\end{aligned}$$

前半と後半をそれぞれ一つの全体として考えると、二つの式が得られる

(2)Lagrange

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\left((\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d}\right) \\
&= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

P2.3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \frac{1}{|\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}|^2}\begin{pmatrix} |\mathbf{v_2}|^2 & -\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} \\ -\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} & |\mathbf{v_1}|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{v_1} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{v_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}|^2}\begin{pmatrix} |\mathbf{v_2}|^2\,(s\mathbf{v_1}+t\mathbf{v_2})\cdot\mathbf{v_1}-(\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2})\left((s\mathbf{v_1}+t\mathbf{v_2})\cdot\mathbf{v_2}\right) \\ -(\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2})\left((s\mathbf{v_1}+t\mathbf{v_2})\cdot\mathbf{v_1}\right)+|\mathbf{v_1}|^2\,(s\mathbf{v_1}+t\mathbf{v_2})\cdot\mathbf{v_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}|^2}\begin{pmatrix} s\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2+t\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\,|\mathbf{v_2}|^2-s\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2-t\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\,|\mathbf{v_2}|^2 \\ -s\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\,|\mathbf{v_1}|^2-t\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2+s\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}\,|\mathbf{v_1}|^2+t\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}|^2}\begin{pmatrix} s\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2-s\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2 \\ t\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2-t\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2-|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2}\begin{pmatrix} s\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2-s\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2 \\ t\,|\mathbf{v_1}|^2\,|\mathbf{v_2}|^2-t\,|\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}|^2 \end{pmatrix} \\
&=^t (s,t) = \mathrm{LHS}
\end{aligned}
$$

P2.4

ここで、アフィン座標系$[O;\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]$を考える
言い換えれば
${}^t\mathbf{v_1} =^t (1,0,0)\,,^t \mathbf{v_2} =^t (0,1,0)\,,^t \mathbf{v_3} =^t (0,0,1)$とし、${}^t\mathbf{x} =^t (a,b,c)$とする
そうすると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{1} \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \mathrm{LHS}
\end{aligned}
$$

事実として、一次独立という条件は一番左の分母の行列式を0でないことを確保するだけである

P2.5

まず、直感的な理解では、Tはある可逆変換を表し、左側は変換したあとのベクトルからなる平行四辺形の変換後のベクトルから計算する面積で、右側は元の平行四辺形の面積を$det\,(T)$倍、${}^tT^{-1}$の方向に変換すした面積である
$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$と一次独立な$\mathbf{v_3}$とする

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RHS} \cdot (T\mathbf{v_3}) &= (detT) \left({}^tT^{-1} (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2})\right) \cdot (T\mathbf{v_3}) \\
&= (detT) (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \left({}^t \left({}^tT^{-1}\right) (T\mathbf{v_3})\right) \\
&= (detT) (\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}) \cdot \mathbf{v_3} \\
&= (detT) \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T\mathbf{v_1} & T\mathbf{v_2} & T\mathbf{v_3} \end{bmatrix} \\
&= ((T\mathbf{v_1}) \times (T\mathbf{v_2})) \cdot (T\mathbf{v_3}) \\
&= \mathrm{LHS} \cdot (T\mathbf{v_3})
\end{aligned}
$$

特に、Tが直交行列なら、${}^tT^{-1} = T$ よって、結論が成立する