§6
Cheng Kexin

P6.1

(6.1)

定義より、$\begin{cases}\mathbf{T}=\dot{c}\left(s\right)\\ \ddot{c}=\widetilde{\kappa}\mathbf{N}\end{cases}$ から、$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}=\ddot{c}=\widetilde{\kappa}\mathbf{N}$
また、$\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{T}$で$\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=0$
両辺でsについて微分すると
$\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{N}+\mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{N}}=\widetilde{\kappa}+\mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{N}}=0$
内積の意味を考えて言い換えれば、$\dot{\mathbf{N}}$が$\mathbf{T}$への射影の長さは$-\widetilde{\kappa}$であるから
i.e.$\dot{\mathbf{N}}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=-\widetilde{\kappa}\mathbf{T}$

(6.2)

一つ目の微分方程式は(6.1)と同じで導けるから略
二つ目の微分方程式について、$\dot{\mathbf{N}}$のFrenet枠での表示を考えると
$\dot{\mathbf{N}}=a\mathbf{T}+b\mathbf{N}+c\mathbf{B}$(ここでの$a,b,c$はそれぞれ$s$に関する関数である)
内積の定義より
$\begin{cases}a=\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{T}\\ b=\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{N}\\ c=\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{B}\end{cases}$
$\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{N}+\mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{N}}=\widetilde{\kappa}+a=0$
$|\mathbf{N}|=1,\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}=1$の両辺を微分すると$2\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{N}=b=0$
$\tau=\dot{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{B}=c$
以上より、$\dot{\mathbf{N}}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}=-\widetilde{\kappa}\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathbf{T}\times\mathbf{N}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{N}+\mathbf{T}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}\\&=\widetilde{\kappa}\left(\mathbf{N}\times\mathbf{N}\right)+\mathbf{T}\times\left(-\widetilde{\kappa}\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}\right)\\&=\tau\mathbf{B}\end{aligned}$$

P6.2

(1)

sが弧長パラメーター$\Longleftrightarrow \|c'(s)\| = 1$

$$
\begin{aligned}
\left|c'(s)\right| &= \sqrt{\left(\cos\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right)\right)^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

よって、sは確実に弧長パラメーターである

(2)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\kappa} &= \ddot{c} \cdot \mathbf{N} \\
&= \begin{pmatrix} -\widetilde{\kappa}\sin\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \\ \widetilde{\kappa}\cos\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \\ \sin\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\widetilde{\kappa}\sin\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \\ \widetilde{\kappa}\cos\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \\ \cos\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \end{pmatrix} \\
&= \widetilde{\kappa}\sin^2\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) + \widetilde{\kappa}\cos^2\left(\int_0^t \widetilde{\kappa}(u)\,\mathrm{d}u + a\right) \\
&= \widetilde{\kappa}
\end{aligned}
$$

P6.3

$\kappa = K$が一定とする
もし$K = 0$、$\ddot{c} = 0$から、cは直線である
$K \geq 0$かつ$K \neq 0$から、$K = \dfrac{1}{r}$で表示できる(ここで、$r > 0$)
そうなると、cは半径rの円である
以上より、曲率が一定のとき、cは直線と円しかなれない
(別解)

$$
\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = K\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = -K\mathbf{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{T} = \dfrac{e^{-Ks}}{2}\left(C_1\left(e^{2Ks} + 1\right) + C_2\left(e^{2Ks} - 1\right)\right) \\ \mathbf{N} = \dfrac{e^{-Ks}}{2}\left(C_1\left(e^{2Ks} - 1\right) + C_2\left(e^{2Ks} + 1\right)\right) \end{cases}
$$

$K=0, \begin{cases} \mathbf{T}=C_1 \\ \mathbf{N}=C_2 \end{cases}$ で、接方向は変化しないから直線である
$K \neq 0$?

P6.4

(1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\kappa} &= \ddot{c}\cdot\mathbf{N} \\
&= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \dot{\theta}\sin^2\theta + \dot{\theta}\cos^2\theta \\
&= \dot{\theta}
\end{aligned}$$

(2)[1]

$\ddot{\theta}=A$とする
$\dot{\theta}=As+B, \theta=\frac{A}{2}s^2+Bs+C$
$\begin{cases} x=\int \mathrm{d}s\cos\theta = \int \mathrm{d}s\cos\frac{A}{2}s^2+Bs+C \\ y=\int \mathrm{d}s\sin\theta = \int \mathrm{d}s\sin\frac{A}{2}s^2+Bs+C \end{cases}$

P6.5

曲線$c(s)$をマクローリン展開すると
$c(s)=c(0)+\dot{c}(0)s+\frac{1}{2}\ddot{c}(0)s^2+\frac{1}{6}\dddot{c}(0)s^3+\circ\left(s^3\right)$
ここで
$\begin{cases} \dot{c}=\mathbf{T} \\ \ddot{c}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dot{c}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}=\kappa\mathbf{N} \\ \dddot{c}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\kappa\mathbf{N})=\dot{\kappa}\mathbf{N}+\kappa\dot{\mathbf{N}}=\dot{\kappa}\mathbf{N}+\kappa(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B})=\dot{\kappa}\mathbf{N}-\kappa^2\mathbf{T}+\kappa\tau\mathbf{B} \end{cases}$
これらを展開した式に代入すると

[1] The Euler spiral: a mathematical history,2008,Levien, Raph,Levien:EECS-2008-111, http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-111.html

$$
\begin{aligned}
c\left(0\right) &= c\left(0\right) + \dot{c}\left(0\right)s + \frac{1}{2}\ddot{c}\left(0\right)s^{2} + \frac{1}{6}\dddot{c}\left(0\right)s^{3} + \circ\left(s^{3}\right) \\
&= c\left(0\right) + s\mathbf{T}\left(0\right) + \frac{1}{2}s^{2}\left(\kappa\left(0\right)\mathbf{N}\left(0\right)\right) \\
&+ \frac{1}{6}s^{3}\left(\dot{\kappa}\left(0\right)\mathbf{N}\left(0\right) - \kappa^{2}\left(0\right)\mathbf{T}\left(0\right) + \kappa\left(0\right)\tau\left(0\right)\mathbf{B}\left(0\right)\right) + \circ\left(s^{3}\right)
\end{aligned}
$$