第 7 回

K6

(1)

(a)

$$
\begin{aligned}
|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| &= |A\mathbf{x} + \mathbf{b} - A\mathbf{y} - \mathbf{b}| \\
&= |A(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \\
&= |A|\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \overset{Orthogonality}{=} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|
\end{aligned}
$$

(b)

D と $T(D)$ の面積をそれぞれ S, S' とする

$$
\begin{aligned}
S' &= \|T(\mathbf{x}) \times T(\mathbf{y})\| \\
&= \|(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) \times (A\mathbf{y} + \mathbf{b})\| \\
&= \|(A\mathbf{x}) \times (A\mathbf{y} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (A\mathbf{y} + \mathbf{b})\| \\
&= \|(A\mathbf{x}) \times (A\mathbf{y}) + (A\mathbf{x}) \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (A\mathbf{y}) + \mathbf{b} \times \mathbf{b}\|
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathbf{b}$ は平行移動を表すベクトルであるから、二つ目と三つ目の項はなくなり（面積を表さない)、四つ目の項は 0 であるから

$$
S' = \|(A\mathbf{x}) \times (A\mathbf{y})\| = |A|\,\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| \overset{Orthogonality}{=} \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = S
$$

別解
変換 T は任意の二つの点の距離を保つから、この変換はベクトルの長さを保っている
以下は、$\mathbf{x} = \overline{AB}, = \overline{AC}$ とする、変換した後の像は $T(\mathbf{x}) = \overline{A'B'}, T(\mathbf{y}) = \overline{A'C'}$ である
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \angle BAC, \langle T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) \rangle = \angle B'A'C'$
$|A'B'| = |AB|, |A'C'| = |AC|, |B'C'| = |BC| \Longrightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
$\Longrightarrow \angle BAC = \angle B'A'C'$
そして変換する前からなる角と変換した後の角はそれぞれ θ, θ' とすると

$$
\begin{aligned}
S' &= |T(\mathbf{x})|\,|T(\mathbf{y})| \sin\theta' \\
&= |A|^2 |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \sin\theta \\
&= |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \sin\theta \\
&= S
\end{aligned}
$$

(2)

(a)

$(\Longrightarrow)$
$\kappa = 0$ と仮定すると、c は直線であるから、$|t(s)| = 1$ と矛盾する
よって、曲率は 0 ではない

$(\Longleftarrow)$
$\kappa \neq 0 \Longrightarrow c''(s) = \kappa \mathbf{N} \neq 0$
$\Longrightarrow c'(s) = \int c'' \mathrm{d}s \neq 0$
$\Longrightarrow \left| c'(s) \right| \neq 0$
よって、$c(s)$ は正則曲線である

(b)

$$\begin{aligned}
\kappa_t &= \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}_t}{\mathrm{d}s} \right\| \\
&= \left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} \|\mathbf{T}\| - \mathbf{T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|\mathbf{T}\|}{\|\mathbf{T}\|^2} \right\| \\
&= \left\| \frac{(\kappa \mathbf{N} + \tau \mathbf{B}) \|\mathbf{T}\| - \mathbf{T} \left(\frac{\mathbf{T} \cdot (\kappa \mathbf{N} + \tau \mathbf{B})}{\|\mathbf{T}\|} \right)}{\|\mathbf{T}\|^2} \right\| \\
&= \left\| \frac{\kappa \mathbf{N} + \tau \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|^2} \right\| \\
&= \left\| \frac{\kappa \mathbf{N} + \tau \mathbf{B} - \kappa \|\mathbf{T}\| \mathbf{T}_t}{\|\mathbf{T}\|^2} \right\| \\
&= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}
\end{aligned}$$

実際、s は $t(s)$ のパラメーター表示ではないから、$\kappa_t(s)$ は実の「曲率」ではないので
$\kappa_t = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2}$

P7.1

A は直交行列であるから

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

そして、$\det A = \pm 1$ より

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \det A = 1 \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} & \det A = -1 \end{cases}$$

また、平行移動でも任意二点間の距離を変わらないから、平行移動ベクトル $\mathbf{b}$ を加えても構わない

実際これについて、合同変換の第二基本定理により、平面上の距離を保つ変換は平行移動、回転、反射またはそれらの合成であることがわかる. さらに、上の計算結果の $\det A = 1$ のは回転行列であり、$\det A = -1$ のは反射行列であるそれ以外の変換（例えば Shear Transformation,Dilatation Transformation）は角度を保っているが、任意二点間の距離は変化したので、合同変換ではない. なお、その一意性は線形代数の直交行列の一意性から得られる

P7.2

(1)

P2.5 と全く同じ (実際それより簡単)

$$\begin{aligned}[Av_1, Av_2, Av_3] &= Av_1 \times Av_2 \cdot Av_3 \\ &= |T| \left({}^tA^{-1}(v_1 \times v_2)\right) \cdot (Av_3) \\ &= |A|(v_1 \times v_2) \cdot \left({}^t\left({}^tA^{-1}\right)(Av_3)\right) \\ &= |A|(v_1 \times v_2) \cdot v_3 \\ &= |A|[v_1, v_2, v_3]\end{aligned}$$

(2)

Lem. 合同変換は方向が変換しない同じ曲線にある三つの点をもう一つの曲線に写像し、順序を変わらない

Proof. A, B, C が変換した後の点はそれぞれ A', B', C' であり、任意両点間の距離は変化しないから
もとの曲線での点の順序を $A \to B \to C$ とすると
$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC} \iff \overline{A'C'} \leq \overline{A'B'} + \overline{B'C'} \implies$ もう一つの曲線では $A' \to B' \to C'$ □

これを使って、$e_1 \to e_2 \to e_3$ の順で通った方向がある円を考えると、変換した円は $Ae_1 \to Ae_2 \to Ae_3$ の順を通った円であるから、これも右手系である
反射変換では、上の不等式は $\overline{C'A'} \leq \overline{B'A'} + \overline{C'B'}$ になるから、順序は逆にする
そうなると左手系になる
別解
$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}\det(Ae_1, Ae_2, Ae_3) &= \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \det A = \pm 1\end{aligned}$$

$\implies \det A = 1, \det(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = 1 > 0 \implies$ 右手系
$\implies \det A = -1, \det(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = -1 < 0 \implies$ 左手系

P7.3

(1)

P6.3 に参照
$(\Longrightarrow)$
c を直線とすると、$c' = constant \implies \kappa = c'' = 0$
$(\Longleftarrow)$
$\kappa = 0$ とすると、$c' = constant$ であって、定理より曲がることがない直線である

(2)

P5.3 に参照

($\Longrightarrow$)

c を平面曲線とする、合同変換の平行移動より、$z=0$ である平面に移れるから

$$
\begin{aligned}
\tau &= \mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} \\
&= \mathbf{N}' \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \\
&= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'y'' - y'x'' \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

($\Longleftarrow$)

$$
\begin{aligned}
0 &= \tau \\
&= \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} \\
&= \left(\dot{\mathbf{T}} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{N}} \right) \cdot \mathbf{N} \\
&= (\kappa \mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})) \cdot \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \dot{\mathbf{B}} = 0 \Longrightarrow \mathbf{B} = constant =: b$

よって、曲線は $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| b \cdot (\mathbf{x} - b) = 0 \right\}$ に制限している

すなわち、平面曲線である

P7.4

(1)

$$s = \int_0^t \left| c'(u) \right| \mathrm{d}u = t\sqrt{r^2 + a^2} \Longrightarrow t = \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$c(s) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, a \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \right)$$

$$\mathbf{T} = c'(s) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} \right)$$

実際ここでチェックすると確かに球面上にある

それで、ここの球面表示はある緯度での測地線である（$z = \dfrac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$ と球面の交わり）

(2)

まず場合わけにしよう

ステレオ投影を考えると $\tau = 0$ では、曲線は平面曲線であって、球面への射影は：赤道（直線）、一般の閉じた曲線（一般的な曲線）

$\tau \neq 0$ では [1][2] より、これは振動平面の円である

少しめんどくさいから具体的な過程を略にする

P7.5

$$F(s) := (\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}), H(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \text{とする}$$

Lem. $\forall F \in Matrix_{3\times 3}(\mathbb{R})$,ODE

$$\dot{F} = FH, F(a) = F_0$$

の解は一意的に存在している．なお、$F_0 \in SO(3) \Longrightarrow \forall$ 曲線 $c, F(s) \in SO(3)$

Proof. A の転置を ${}^tA$ で表記する
存在性と一意性は ODE の初期値問題より自明であるから、以下は後半を証明する
$F(a) \in SO(3)$ とすると、$F(s)^t F(s) = I_3$ は $s = a$ で成り立つから
両辺を微分し、${}^tH = -H$ を注意すると
$F^t\dot{F} + \dot{F}^tF = F^tH^tF + FH^tF = 0$ は常に成立しているから
$\Longrightarrow F(s)^t F(s) = I_3 \Longrightarrow F(s) \in SO(3)$ は常に成立する □

これを用いると
存在性：
$\exists F(s) \in SO(3), s.t. F(c) = I_3$
その $F(s)$ の一列目をとり、$v(s) \in \mathbb{R}^3$ で書く
$\forall s, |\dot{c}(s)| = 1$ を注意すると
任意に $c(a) \in \mathbb{E}^3$ をとり（パラメーター表示の c)、その $v(s)$ を導関数とする積分 $\gamma(s)$ が存在する
Frenet 枠と比較すると、γ が s での κ, τ は $\kappa(s), \tau(s)$ であるから、存在性が証明できた
一意性：
∃ 合同変換（厳密にいうと $\det T = 1$ の合同変換）$T : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$,s.t.$\tilde{c} = T \circ c$ が $s = a$ で成立する
κ, τ は変換した後でも変わらないから、$\tilde{c}$ の Frenet 枠が Lem での初期値を与えられ
元の c の初期値も同じなので、ODE の初期値問題の一意性より、この $\tilde{c}$ も一意的に存在している

参考文献

[1] Ahmad T. Ali. New special curves and their spherical indicatrices. Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 1(2):28--38, 2011.

[2] Süha Yilmaz, Emin Özyilmaz, and Melih Turgut. New spherical indicatrices and their characterizations. Analele Stiintifice ale Universitătii Ovidius Constanta, 18(2):337--354, 2010.