Contents

1　曲面片

$D \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Def 1. σ が次の条件を満たすとき $S = \sigma(D)$ をσ でパラメーター表示された曲面片とよぶ
(1) σ は C^∞
(2) $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D$ に対し、$\sigma_u(a,b) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(a,b), \sigma_v \in \mathbb{R}^3$ は線形独立
(3) σ は単射

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D \text{ を固定し、曲線} \begin{cases} C_u : x = \sigma(a+t,b) \\ C_v : x = \sigma(a,b+t) \end{cases} \text{ を考える.}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{cases} \lim_{t\to 0} \dfrac{\sigma(a+t,b) - \sigma(a,b)}{t} = \sigma_u(a,b) & C_u \\ \sigma_v(a,b) & C_v \end{cases}$$

e.g. 1. $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, D = \mathbb{R}^2, \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ とする.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が線形独立なら、$\sigma(\mathbb{R}^2)$ は σ でパラメーター表示された曲面片（$\mathbf{p}$ を通り、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に平行な平面）

Proof. (1) $\sigma(u,v)$ の各成分は u, v の一次関数、故に C^∞
(2) $\sigma_u(u,v) = \mathbf{a}, \sigma_v(u,v) = \mathbf{b}$、仮定より線形独立
(3) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \in D, \sigma(c,d) = \sigma(c',d')$ とする
$\mathbf{p} + c\mathbf{a} + d\mathbf{b} = \mathbf{p} + c'\mathbf{a} + d'\mathbf{b} \implies (c-c')\mathbf{a} + (d-d')\mathbf{b} = 0$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が線形独立であるから、$c - c' = d - d' = 0$
だから $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}$ □

Rem 1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 線形独立 $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$

Proof.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形独立でない場合では、$\mathbf{a}_i = k\mathbf{b}_i$ から、すべての成分は 0 である □

e.g. 2. グラフ型曲面片
$D \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合.$f : D \to \mathbb{R} : C^\infty$ とする.
$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \right)$ とおくと

$\sigma(D) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D, z = (x, y) \right\}$ （z は $f(x, y)$ のグラフ）は σ でパラメーター表示された曲面片

Proof. (1) f は D 上 C^∞ から、σ も C^∞

(2) $\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$ より $\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

(3) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \in D, \sigma(c, d) = \sigma(c', d')$ とする

$\begin{pmatrix} c \\ d \\ f(c, d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ d' \\ f(c', d') \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}$ □

e.g. 3. 球面

$r > 0, D = (0, \pi) \times (0, \pi) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi \right\}$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}$$

$\sigma(D)$ は球面 $S^2(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}$ から $x \geq 0, y = 0$ の部分を除いた図形

Proof. (1) $\cos, \sin$ は C^∞ から、σ も D 上 C^∞

(2) $\sigma_u = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -r \sin u \sin v \\ r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= r^2 \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \\ &= r \sin u \sigma(u, v) \end{aligned}$$

σ の中ではもう一つの r があるから

$\|\sigma(u, v)\| = r > 0$ より、$(\sigma_u \times \sigma_v)(u, v) \neq 0$

(3) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \in D, \sigma(c, d) = \sigma(c', d')$ とする

第三成分では $r \cos c = r \cos c'. 0 < c, c' < \pi$ で $\cos$ は $[0, \pi]$ で全単射だから、$c = c'$

次は第 1,2 成分

$\begin{cases} r \sin c \cos d = r \sin c' \cos d' \\ r \sin c \sin d = r \sin c' \sin d' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos d = \cos d' \\ \sin d = \sin d' \end{cases} \Longrightarrow d = d'$ □

2 接平面

参考文献