Problem 1. G, H を群とし、$\phi : G \to H$ を準同型写像とする．$N = \mathrm{Ker}\phi$ とする

1. N が G の正規部分群にあることを示せ
2. このとき、次のことを注意して準同型定理を証明せよ
   (a) $\pi : G \to G/N$ を標準的な準同型写像とするとき、$\phi = \overline{\phi} \circ \pi$ をみたす写像 $\overline{\phi} : G/N \to H$ が矛盾なく定義できること
   (b) $\overline{\phi}$ が準同型写像になること
   (c) $\overline{\phi}$ が単射になること
   (d) $\overline{\phi}$ が群の同型 $G/\mathrm{Ker}\,(\phi) \cong \mathrm{Im}\,(\phi)$

Proof.

1. $N = Ker\,(\phi) = \{g \in G | \phi\,(g) = e_H\}$ で
$\forall g \in G, \forall n \in N, \phi\left(gng^{-1}\right) = \phi\,(g)\,\phi\,(n)\,\phi\left(g^{-1}\right) = \phi\,(g)\,e_H\phi\,(g)^{-1} = \phi\,(g)\,\phi\,(g)^{-1} = e_H$ から $gng^{-1} \in N$ で $N \triangleleft G$
2. (a) $\forall a\mathrm{Ker}\phi, b\mathrm{Ker}\phi$ を取り、$a\mathrm{Ker}\phi = b\mathrm{Ker}\phi$ とすると $b^{-1}a\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\phi$ から $b^{-1}a \in \mathrm{Ker}\phi$．$\phi$ は準同型であるから $e = \phi\left(b^{-1}a\right) = \phi\,(b)^{-1}\,\phi\,(a)$ があるから $\phi\,(a) = \phi\,(b)$
   (b) $\forall gN, g'N \in G/N, \overline{\phi}\,(gn \cdot g'N) = \overline{\phi}\,(gg'N) = \phi\,(gg') = \phi\,(g)\,\phi\,(g') = \overline{\phi}\,(gN)\,\overline{\phi}\,(g'N)$
   (c) $\overline{\phi}$ が単射である $\iff$ $\mathrm{Ker}\overline{\phi} = e = \{N\}$ $\iff$ $\left\{gN \middle| \overline{\phi}\,(gN) = e_H\right\} = \{N\}$ $\iff$ $\{gN | \phi\,(g) = e_H\} = \{N\}$ $\iff$ $\{g | \phi\,(g) = e_H\}\,N = \{N\}$ で、これは $NN = N$ は自明であるから $\overline{\phi}$ は単射
   また、定義からやると $\overline{\phi}\,(a\mathrm{Ker}\phi) = \overline{\phi}\,(b\mathrm{Ker}\phi)$ とおくと $\phi\,(a) = \phi\,(b)$ で $\phi\left(b^{-1}a\right) = \phi\,(b)^{-1}\,\phi\,(a) = e$ があって、$b^{-1}a \in N$ になり、これにより $b^{-1}aN = N$ で $aN = bN$．言い換えれば $a\mathrm{Ker}\phi = b\mathrm{Ker}\phi$ であって、単射である
   なお、$\overline{\phi}$ の定義より任意の H の元に対して、ϕ により存在性を保証しているから、$\overline{\phi}$ は全射である
   (d) 以上の証明より、ある全単射 $\overline{\phi}$ が存在し、この $\overline{\phi}$ は $G/N = G/\mathrm{Ker}\phi$ から $H = \mathrm{Im}\phi$ への写像であるから $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$

□

Problem 2. 加法群の準同型 $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を考える

1. $\phi(1) = k \in \mathbb{Z}$ とするとき $\forall m \in \mathbb{Z}, \phi(m)$ を求めよ
2. ϕ が単射になるための k の条件を求めよ．またこのときの $\mathrm{Im}(\phi)$ を求めよ
3. ϕ が全射になるための k の条件を求めよ

Proof.

1. $\phi(2) = \phi(1+1) = \phi(1) + \phi(1) = k + k = 2k$ であるから
$\phi(m) = \phi(m \times 1) = m \times \phi(1) = mk$
2. $\phi(a) = \phi(b)$ とすると、$ak = bk$ で、ϕ は単射であるから $k \neq 0$
$\mathrm{Im}\phi = \{\phi(m) = km | m \in \mathbb{Z}\} = k\mathbb{Z}$
3. ϕ は全射であるから、$\forall m_2 \in \mathbb{Z}, \exists m_1 \in \mathbb{Z}, s.t. \phi(m_1) = m_2$
$\phi(m_1) = km_1$ であるから、$\forall m_2 \in \mathbb{Z}, \exists m_1 \in \mathbb{Z}, s.t. km_1 = m_2 \iff m_1 = \dfrac{m_2}{k} \in \mathbb{Z}$ であるから、$k = \pm 1$

$\square$

Problem 3. 位数 8 のアーベル群の全ての同型類を求めよ．このうち巡回群であるものはどれか

Proof. $8 = 2^3$ であるから $\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ で巡回群になるのは $\mathbb{Z}_8$ だけ □

Problem 4. $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする．ただし、$i = \sqrt{-1}$ とするとき、$z = x + iy$ ならば $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である

1. C が $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ の部分群になることを示せ
2. $\phi : \mathbb{C}^\times \to C$ を $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$ とすると、ϕ は準同型写像であることを示せ
3. ϕ が全射であることを示せ
4. $z \in C$ の ϕ による逆像 $\{w \in \mathbb{C} | \phi(w) = z\}$ を記述せよ
5. $\mathrm{Ker}\,(\phi)$ を求めよ．ϕ に準同型定理を適用して得られる同型を述べよ

Proof.

1. 1 は $\mathbb{C}^\times$ の単位元で、$\forall c \in C, 1c = c1 = c$ だから 1 も C の単位元である
   $\forall z_1, z_2 \in C, z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ で、$z_1 := e^{i\theta_1}, z_2 := e^{i\theta_2}$ とすると $z_1 z_2 = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ であるから $|z_1 z_2| = 1$、よって $z_1 z_2 \in C$
   $\forall z \in C, \left|z^{-1}\right| = \dfrac{1}{|z|} = 1$ から $z^{-1} \in C$
   以上より、C は $\mathbb{C}^\times$ の部分群である
2. $\forall a, b \in \mathbb{C}^\times, \phi(ab) = \dfrac{ab}{|ab|} = \dfrac{ab}{|a|\,|b|} = \dfrac{a}{|a|} \cdot \dfrac{b}{|b|} = \phi(a)\,\phi(b)$ から、ϕ は準同型写像である
3. $\forall z_2 \in C$ 定義より $z_2 = \dfrac{z_1}{|z_1|}$ をみたす $z_1 \in \mathbb{C}^\times$ が存在するので ϕ は全射である
4. $\{\omega \in \mathbb{C} | \phi(\omega) = z\} = \left\{\omega \in \mathbb{C} \middle| \dfrac{\omega}{|\omega|} = z\right\}$ で、$|\omega| > 0$ から $\{\omega \in \mathbb{C} | \phi(\omega) = z\} = \mathbb{C}^\times$
5. $\mathrm{Ker}\phi = \{c \in \mathbb{C}^\times | \phi(c) = 1\} = \mathrm{Ker}\phi = \left\{c \in \mathbb{C}^\times \middle| \dfrac{c}{|c|} = 1\right\} = \mathbb{R}_{>0}$ であるから $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}_{>0} \cong C$

□

Problem 5. 1. G を群とする．$x, y \in G$ が共役であるとは $\exists g \in G, s.t. x = gyg^{-1}$ となることである．共役が G 上の同値関係であることを示せ

2. この同値関係で $x \in G$ を含む同値類 $C(x)$ を x の共役類という．同じ共役類に入る元は同じ位数をもつことを示せ

3. $x \in G, x \in \quad Z(G) \iff |C(x)| = 1$ を示せ．ただし $Z(G)$ は G の中心である

4. $x \in G, Z_G(x) = \{g \in G | gx = xg\}$ とおく．x を含む共役類 $C(x)$ の濃度が $[G : Z_G(x)]$ に等しいことを示せ

Proof. 1. (a) $\forall x \in G, exe^{-1} = exe = x$ から $x \sim x$

(b) $\forall x, y \in G, x \sim y$ とすると、$\exists g \in G, s.t. x = gyg^{-1}$ で $xg = gy$ があり $y = g^{-1}xg = g^{-1}x\left(g^{-1}\right)^{-1}$ だから、$y \sim x$

(c) $\forall x, y, z \in G, x \sim y, y \sim z$ と仮定すると $\exists g, h \in G, s.t. x = gyg^{-1}$ で $y = hzh^{-1}$ から $x = gyg^{-1} = ghzh^{-1}g^{-1} = (gh)z(gh)^{-1}$ があるので $x \sim z$

以上より、$\sim$ は同値関係である

2. $\forall x, y \in C(x), x \sim y$ と仮定すると $\exists g \in G, s.t. x = gyg^{-1}$ であって、x の位数を n とすると $e = x^n = \left(gyg^{-1}\right)^n = g^n y^n g^{-n}$ がある．すると $g^n = g^n y^n$ で $e = y^n$ から、y の位数 $m \mid n$ である．逆に、$x = gyg^{-1}$ より、$g^{-1}xg = y$ があるから、同じ操作をすると $n \mid m$ から、$m = n$

3. $Z(G) = \{a \in G | \forall b \in G, ab = ba\}$ で $x \in Z(G)$ から $\forall b \in G, xb = bx \iff \forall b \in G, x = bxb^{-1}$ から、$x \sim x$ で $C(x) = \{x\}$ から $|C(x)| = 1$. 逆に $|C(x)| = 1$ とすると、$C(x) = \{x\}$ で、$x \sim x$ から $\forall g \in G, x = gxg^{-1} \iff \forall g \in G, gx = xg \iff x \in Z(G)$

4. 群作用を $g \cdot a = gag^{-1}$ とすると、$C(x) = Orbit_G(x)$ であり、この作用での $Stab_G(x) = \{a \in G | a \cdot x = x\} = \left\{g \in G \middle| gxg^{-1} = x\right\} = \{g \in G | gx = xg\} = Z_G(x)$ であるから $Orbit-Stabilizer$ の定理より、$[G : Z_G(x)] = \left|\left\{gxg^{-1} \middle| g \in G\right\}\right| = |C(x)|$

□

Problem 6. 1. S_4 の共役類の代表元を求め、各共役類の元の位数を求めよ

2. S_4 の類等式を求めよ．また、求めた群が全て共役であることを示せ
3. A_4 の Sylow3 部分群を求めよ．また、求めた群が全て共役であることを示せ
4. S_4 の部分群 $H := \langle (1\ 2)\,, (1\ 3) \rangle$ は集合 $X = \{1\ 2\ 3\ 4\}$ に自然に作用する．この作用によって X を軌道に分解せよ．また、$1 \in X$ の固定部分群を求めよ

Proof. 1. $ord\,((1)) = 1, ord\,((1\ 2)) = 2, ord\,((1\ 2\ 3)) = 3, ord\,((1\ 2)\,(3\ 4)) = 2, ord\,((1\ 2\ 3\ 4)) = 4$

2. $|S_4| = \sum_i |C_i| \iff 24 = 1 + 6 + 8 + 3 + 6$
3. $|A_4| = \frac{1}{2} 4! = 12 = 2^2 \cdot 3$ で Sylow3 部分群の個数は s とすると、$s \mid 4$ かつ $s \equiv 1 \mod 3$

□