

# Contents

|          |       |           |
|----------|-------|-----------|
| <b>1</b> |       | <b>4</b>  |
| 1.1      | ..... | 4         |
| 1.2      | ..... | 5         |
| 1.3      | ..... | 5         |
| 1.4      | ..... | 5         |
| 1.5      | ..... | 5         |
| <b>2</b> |       | <b>6</b>  |
| 2.1      | ..... | 6         |
| 2.2      | ..... | 6         |
| 2.3      | ..... | 6         |
| <b>3</b> |       | <b>8</b>  |
| 3.1      | ..... | 8         |
| 3.2      | ..... | 8         |
| 3.3      | ..... | 9         |
| 3.4      | ..... | 9         |
| 3.5      | ..... | 9         |
| <b>4</b> |       | <b>10</b> |
| 4.1      | ..... | 10        |
| 4.2      | ..... | 11        |
| 4.3      | ..... | 11        |
| 4.4      | ..... | 11        |
| 4.5      | ..... | 11        |
| 4.6      | ..... | 13        |
| 4.7      | ..... | 13        |
| <b>5</b> |       | <b>14</b> |
| 5.1      | ..... | 14        |
| 5.2      | ..... | 14        |
| 5.3      | ..... | 15        |
| 5.4      | ..... | 16        |
| 5.5      | ..... | 16        |
| 5.6      | ..... | 17        |
| <b>6</b> |       | <b>19</b> |
| 6.1      | ..... | 19        |
| 6.2      | ..... | 20        |
| <b>7</b> |       | <b>22</b> |
| 7.1      | ..... | 22        |
| 7.2      | ..... | 22        |
| 7.3      | ..... | 22        |
| 7.4      | ..... | 22        |
| 7.5      | ..... | 22        |
| 7.5.1    | ..... | 22        |
| 7.5.2    | ..... | 22        |
| 7.5.3    | ..... | 22        |
| 7.6      | ..... | 23        |
| 7.6.1    | ..... | 23        |

|           |           |
|-----------|-----------|
| 7.6.2     | 23        |
| 7.6.3     | 23        |
| 7.6.4     | 23        |
| 7.6.5     | 23        |
| <b>8</b>  | <b>24</b> |
| 8.1       | 24        |
| 8.2       | 24        |
| 8.3       | 24        |
| 8.4       | 24        |
| 8.5       | 25        |
| 8.6       | 25        |
| 8.7       | 25        |
| 8.7.1     | 25        |
| 8.7.2     | 25        |
| 8.7.3     | 26        |
| <b>9</b>  | <b>27</b> |
| 9.1       | 27        |
| 9.1.1     | 27        |
| 9.1.2     | 27        |
| 9.2       | 27        |
| 9.2.1     | 27        |
| 9.2.2     | 27        |
| 9.3       | 28        |
| 9.4       | 28        |
| 9.5       | 28        |
| 9.6       | 28        |
| 9.7       | 29        |
| 9.7.1     | 29        |
| 9.7.2     | 29        |
| 9.7.3     | 29        |
| 9.7.4     | 29        |
| 9.7.5     | 29        |
| 9.8       | 29        |
| <b>10</b> | <b>30</b> |
| 10.1      | 30        |
| 10.2      | 30        |
| 10.2.1    | 30        |
| 10.2.2    | 30        |
| 10.2.3    | 30        |
| 10.2.4    | 30        |
| 10.2.5    | 30        |
| 10.3      | 30        |
| 10.3.1    | 30        |
| 10.3.2    | 30        |
| 10.4      | 31        |
| 10.5      | 31        |
| 10.6      | 31        |
| 10.7      | 31        |
| 10.8      | 32        |

|           |       |           |
|-----------|-------|-----------|
| <b>11</b> |       | <b>33</b> |
| 11.1      | ..... | 33        |
| 11.2      | ..... | 33        |
| 11.2.1    | ..... | 33        |
| 11.2.2    | ..... | 33        |
| 11.3      | ..... | 33        |
| 11.3.1    | ..... | 33        |
| 11.3.2    | ..... | 34        |
| 11.4      | ..... | 34        |
| 11.5      | ..... | 34        |
| <br>      |       |           |
| <b>12</b> |       | <b>36</b> |
| 12.1      | ..... | 36        |
| 12.2      | ..... | 37        |
| 12.2.1    | ..... | 37        |
| 12.2.2    | ..... | 38        |
| 12.2.3    | ..... | 38        |
| 12.2.4    | ..... | 39        |
| 12.3      | ..... | 39        |
| 12.3.1    | ..... | 39        |
| 12.3.2    | ..... | 40        |
| 12.3.3    | ..... | 40        |
| 12.3.4    | ..... | 40        |
| 12.4      | ..... | 41        |
| 12.5      | ..... | 41        |
| <br>      |       |           |
| <b>13</b> |       | <b>42</b> |
| 13.1      | ..... | 42        |
| 13.1.1    | ..... | 42        |
| 13.1.2    | ..... | 42        |
| 13.1.3    | ..... | 43        |
| 13.1.4    | ..... | 43        |
| 13.1.5    | ..... | 43        |
| 13.2      | ..... | 43        |
| 13.2.1    | ..... | 43        |
| 13.2.2    | ..... | 44        |
| 13.3      | ..... | 44        |
| 13.4      | ..... | 45        |
| 13.5      | ..... | 45        |
| 13.6      | ..... | 45        |
| 13.7      | ..... | 45        |
| 13.7.1    | ..... | 45        |
| 13.7.2    | ..... | 45        |
| 13.7.3    | ..... | 46        |

## 1

$S \subset \mathbb{R}$  に対して

$$S^* := \{x \in \mathbb{R} : S \subset (-\infty, x]\}, S_* := \{x \in \mathbb{R} : S \subset [x, \infty)\} \quad (1)$$

とおく. また  $\mathbb{N} := \{n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$  とする.

## 1.1

次の集合に対して、 $A^*, A_*$ などを求め、また、 $A \cap A^*, A \cap A_*$ などを求めよ

(1)

$$A = (-3, 1] \cup (1, 3] = (-3, 3]$$

$$A^* = [3, \infty) \quad (2)$$

$$A_* = (-\infty, -3] \quad (3)$$

(2)

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 < 2\} \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$$

$$B^* = \left[\frac{1}{3}, \infty\right) \quad (4)$$

$$B_* = \emptyset \quad (5)$$

(3)

$$C = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C^* = [2, \infty) \quad (6)$$

$$C_* = (-\infty, 0] \quad (7)$$

(4)

$$D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D^* = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \quad (8)$$

$$D_* = (-\infty, -1] \quad (9)$$

## 1.2

$$\sup A = 3 \quad (10)$$

$$\max A = 3 \quad (11)$$

$$\inf A = -3 \quad (12)$$

$$\min A \text{存在しない} \quad (13)$$

$$\sup B = \frac{1}{3} \quad (14)$$

$$\max B \text{存在しない} \quad (15)$$

$$\inf B \text{存在しない} \quad (16)$$

$$\min B \text{存在しない} \quad (17)$$

$$\sup C = 2 \quad (18)$$

$$\max C = 2 \quad (19)$$

$$\inf C = -1 \quad (20)$$

$$\min C \text{存在しない} \quad (21)$$

$$\sup D = \frac{1}{2} \quad (22)$$

$$\max D = \frac{1}{2} \quad (23)$$

$$\inf D = -1 \quad (24)$$

$$\min D = -1 \quad (25)$$

## 1.3

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

## 1.4

$\{x_n\}$  が Cauchy 列とする. 定義より、 $\epsilon = 1$  とすると、 $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \geq N, |x_n - x_m| < 1$ .  $m = 1$  とし、 $\forall n \geq N, |x_n - x_N| < 1$  から、 $\{x_n\}_{n \geq N}$  は有界である. さらに、 $x_1, \dots, x_{N-1}$  を含めても有界集合である

## 1.5

$\{x_n\}$  を収束列とし、 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  とする.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, M \in \mathbb{N}, s.t. \forall n, m \geq N_0 := \max\{N, M\}, |x_n - x| < \frac{1}{2}\epsilon, |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon$$

$$|x_n - x_m| < |x_n - x| + |x_m - x| < \epsilon \quad (26)$$

よって、 $\{x_n\}$  は Cauchy 列である

## 2

## 2.1

$$|z| = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \quad (27)$$

$$= r \quad (28)$$

## 2.2

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とする.  $x \in \mathbb{K}^N$  に対して

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j|, \|x\|_\infty = \max \{|x_j| : j = 1, 2, \dots, N\} \quad (29)$$

と定める. このとき以下が成立する

## (1)

$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$  はノルム空間である

$$\cdot \|x\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j| \geq \sum_{j=1}^N 0 = 0.$$

$$\cdot \|x\|_1 = 0 \iff \sum_{j=1}^N |x_j| = 0 \iff (\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, |x_j| = 0) \iff x = 0$$

$$\cdot \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^N, \|\alpha x\|_1 = \sum_{j=1}^N |\alpha x_j| = |\alpha| \sum_{j=1}^N |x_j| = |\alpha| \|x\|_1$$

$$\cdot \forall x, y \in \mathbb{K}^N, \|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^N |x_j| + \sum_{j=1}^N |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

## (2)

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_\infty)$  はノルム空間である

$$\cdot \|x\|_\infty = \max \{|x_j| : j = 1, 2, \dots, N\} \geq 0$$

$$\cdot \|x\|_\infty = 0 \iff \max \{|x_j| : j = 1, 2, \dots, n\} \iff x = 0$$

$$\cdot \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}, \|\alpha x\|_\infty = \max \{|\alpha x_j| : j = 1, \dots\} = |\alpha| \max \{|x_j| : j = 1, \dots\} = |\alpha| \|x\|_\infty$$

$$\cdot \forall x, y \in \mathbb{K}, \|x + y\|_\infty = \max \{|x_j + y_j| : j = 1, \dots\} \leq \max \{|x_j| : j = 1, \dots\} + \max \{|y_j| : j = 1, \dots\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

## 2.3

$u \in C[0, 1]$  に対して

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt, \|u\|_\infty = \max \{|u(t)| : t \in [0, 1]\} \quad (30)$$

と定める. このとき以下が成立する

**(1)**

$(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$  はノルム空間である

$$\cdot \forall u \in C[0, 1], \|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt \geq \int_0^1 0 dt = 0$$

$$\cdot \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in C[0, 1], \|\alpha u\|_1 = \int_0^1 |\alpha u(t)| dt = |\alpha| \int_0^1 |u(t)| dt = |\alpha| \|u\|_1$$

$$\cdot \forall u, v \in C[0, 1], \|u + v\|_1 = \int_0^1 |u(t) + v(t)| dt \leq \int_0^1 |u(t)| dt + \int_0^1 |v(t)| dt = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

**(2)**

$(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  はノルム空間である

$$\cdot \forall u \in C[0, 1], \|u\|_\infty = \max\{|u(t)| : t \in [0, 1]\} \geq 0$$

$$\cdot \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in C[0, 1], \|\alpha u\|_\infty = \max\{|\alpha u(t)| : t \in [0, 1]\} = |\alpha| \max\{|u(t)| : t \in [0, 1]\} \leq |\alpha| \|u\|_\infty$$

$$\cdot \forall u, v \in C[0, 1], \|u + v\|_\infty = \max\{|u(t) + v(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \max\{|u(t)| : t \in [0, 1]\} + \max\{|v(t)| : t \in [0, 1]\} = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

## 3

## 3.1

以下は成立

(1)

$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$  は Banach 空間

$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$  での Cauchy 列  $\{x_n\}$  に対し、 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \geq N, \|x_m - x_n\|_1 < \epsilon$

$$\iff \sum_{j=1}^N |x_m^{(j)} - x_n^{(j)}| < \epsilon.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  であるから、 $\exists x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\sum_{j=1}^N |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| = \sum_{j=1}^N \lim_{m \rightarrow \infty} |x_n^{(j)} - x_m^{(j)}| \quad (31)$$

$$\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |x_n^{(j)} - x_m^{(j)}| \quad (32)$$

$$= \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_1 \quad (33)$$

$$< \epsilon \quad (34)$$

(2)

$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$  は Banach 空間

$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$  での Cauchy 列  $\{x_n\}$  に対し、 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \|x_m - x_n\|_\infty < \epsilon$

$$\iff \max \left\{ |x_m^{(j)} - x_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq N \right\} < \epsilon$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  であるから、 $\exists x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\begin{aligned} \max \left\{ |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| : 1 \leq j \leq N \right\} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \max \left\{ |x_n^{(j)} - x_m^{(j)}| : 1 \leq j \leq N \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_\infty \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

## 3.2

$(X, \|\cdot\|)$  は体  $\mathbb{K}$  上のノルム空間、以下成立

(1)

$$u_n \rightarrow u \in X \implies \|u_n - u\| \rightarrow 0, \|u_n - u\| \geq \left| \|u_n\| - \|u\| \right| \implies \|u_n\| - \|u\| \rightarrow 0 \implies \|u_n\| \rightarrow \|u\|$$

(2)

$$u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v \implies \|u_n - u\| < \frac{\epsilon}{2\alpha}, \|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{2\beta}$$

$$\|\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha u + \beta v)\| = \|\alpha(u_n - u) + \beta(v_n - v)\| \quad (35)$$

$$\leq \|\alpha(u_n - u)\| + \|\beta(v_n - v)\| \quad (36)$$

$$= |\alpha| \|u_n - u\| + |\beta| \|v_n - v\| \quad (37)$$

$$< \epsilon \quad (38)$$

## 3.3

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (s - s_{n-1}) = 0 \quad (39)$$

## 3.4

$$0 < l < r, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \implies \forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, |a_n - l| < \epsilon$$

$$\iff l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

また、 $0 < l < r$  かつ、 $a_n < l + \epsilon \leq r$

よって、 $|a_n| < r$

## 3.5

$$\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1 \iff \neg(\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1)$$

$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1$  と仮定すると、 $\exists \{a_{n_k}\}, s.t. a_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  かつ  $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$  から  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$

$l > 1$  より矛盾だから  $\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1$

## 4

## 4.1

$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N$  に対して

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j|, \|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \|x\|_\infty = \max \{|x_j| : j = 1, \dots, N\} \quad (40)$$

と定めると、以下成立.

## (1)

Cauchy-Schwarz 不等式より

$$\left( \sum_{j=1}^N |x_j| \cdot 1 \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^N 1 \right) \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^N |x_j| \leq \sqrt{N \sum_{j=1}^N |x_j|^2} \quad (42)$$

$$= N^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

等号をとる条件は  $\forall j, |x_1| = \dots = |x_N|$   
 $x = (1, 1, \dots, 1)$  を取ればいい

## (2)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \quad (44)$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \|x\|_\infty^2 \quad (45)$$

$$= N \|x\|_\infty^2 \quad (46)$$

$$\|x\|_2 \leq N^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty \quad (47)$$

等号をとる条件は  $\forall j, |x_j| = \max \{|x_j| : j = 1, \dots, N\}$   
 $x = (1, 1, \dots, 1)$  をとればいい

## (3)

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^N |x_j| \quad (48)$$

$$\geq \max \{|x_j| : j = 1, \dots, N\} \quad (49)$$

$$= \|x\|_\infty \quad (50)$$

等号をとる条件は  $\forall j, \max \{|x_j| : j = 1, \dots, N\}$  をみたす  $j_{max}$  以外の  $j$  に対して、 $x_j = 0$   
よって、 $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$  をとればいい

## 4.2

$u \in C[a, b]$  に対して

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)| dt, \|u\|_\infty = \max\{|u(t)| : a < t < b\} \quad (51)$$

(1)

$\forall u \in C[a, b]$

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)| dt \quad (52)$$

$$\leq \int_a^b \max\{|u(t)| : a < t < b\} dt \quad (53)$$

$$= \|u\|_\infty \int_a^b dt \quad (54)$$

$$= (b - a) \|u\|_\infty \quad (55)$$

(2)

$$u_n(t) = \begin{cases} n & |t| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## 4.3

$$0 < l < r, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \implies \forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, |a_n - l| < \epsilon$$

$$\iff l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

また、 $0 < l < r$  から、 $a_n < l + \epsilon \leq r$

よって、 $|a_n| < r$

## 4.4

$$\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1 \iff \neg(\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1)$$

$\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, s.t. a_n < 1$  と仮定すると、 $\exists \{a_{n_k}\}, s.t. a_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \text{ かつ } \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \text{ から } \lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$$

$l > 1$  より矛盾だから  $\exists p \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq p, a_n \geq 1$

## 4.5

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \quad (56)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \quad (57)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \quad (58)$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \quad (59)$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{1.001^n} \right) \quad (60)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{n}{n+1} \right)^5 \right) \quad (61)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^5 \right) \quad (62)$$

$$= 1.001 > 1 \quad (63)$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right) \quad (64)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) \quad (65)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) \quad (66)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right) \quad (67)$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \quad (68)$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} \right) \quad (69)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \quad (70)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \quad (71)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{4(n+1) - 2} \quad (72)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4 - \frac{2}{n+1}} \quad (73)$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \quad (74)$$

よって、発散する

## 4.6

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (75)$$

に注意すると  $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx$   
 $\frac{1}{1+x^2}$  を Taylor 展開すると

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad (76)$$

よって

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan 1 \quad (77)$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad (78)$$

## 4.7

$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ ,  $x > 2$  から  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2(\log x)^{\alpha+1}}(\log x + \alpha) < 0$

よって、 $f(x)$  は非負減少で、積分判定法で判定できる.

i.e.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha} \text{ 収束} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx \text{ 収束}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad (79)$$

$$\cdot \alpha = 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\log R - \log \log 2) = \infty$$

$$\cdot 0 < \alpha < 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}} \right) =$$

$$\cdot \alpha > 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}} \right) = -\frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}}$$

よって、 $\alpha > 1$  のときは収束で、それ以外の条件は発散する

## 5

## 5.1

$\{a_k\}$  は収束だから  $|a_k| < M$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z^k| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |z^k| < M \cdot 1 = M$$

## 5.2

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \quad (80)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \quad (81)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \quad (82)$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \quad (83)$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{1.001^n} \right) \quad (84)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{n}{n+1} \right)^5 \right) \quad (85)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^5 \right) \quad (86)$$

$$= 1.001 > 1 \quad (87)$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right) \quad (88)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) \quad (89)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) \quad (90)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right) \quad (91)$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \quad (92)$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} \right) \quad (93)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \quad (94)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \quad (95)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{4(n+1)-2} \quad (96)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4 - \frac{2}{n+1}} \quad (97)$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \quad (98)$$

よって、発散する

### 5.3

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}, x > 2 \text{ から } f(x) > 0, f'(x) = -\frac{1}{x^2(\log x)^{\alpha+1}}(\log x + \alpha) < 0$$

よって、 $f(x)$  は非負減少で、積分判定法で判定できる.

i.e.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\alpha} \text{ 収束} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx \text{ 収束}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad (99)$$

$$\cdot \alpha = 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} (\log R - \log \log 2) = \infty$$

$$\cdot 0 < \alpha < 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}} \right) = \infty$$

$$\cdot \alpha > 1, \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(1-\alpha)R^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}} \right) = -\frac{1}{(1-\alpha)(\log 2)^{\alpha-1}}$$

よって、 $\alpha > 1$  のときは収束で、それ以外の条件は発散する

## 5.4

(1)

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-z)^{2n}}{(2n)!} \quad (100)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (101)$$

$$= \cos z \quad (102)$$

$$\sin -z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (103)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (104)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (105)$$

$$= -\sin z \quad (106)$$

(2)

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \quad (107)$$

$$\stackrel{\omega=iz}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (108)$$

$$= \cos z + i \sin z \quad (109)$$

これより

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad (110)$$

$$\sin z = \frac{1}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad (111)$$

## 5.5

(1)  $\implies$  (2)

$z_n \rightarrow z \in \mathbb{C}$  から  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, |z_n - z| < \epsilon$

$$|x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| < \epsilon \quad (112)$$

$$|y_n - y| = |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| < \epsilon \quad (113)$$

よって、 $\begin{cases} x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \\ y_n \rightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases}$

(2)  $\implies$  (1)

$$\begin{cases} x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \\ y_n \rightarrow y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{から、} \forall \epsilon > 0, \exists N := \max\{N_1, N_2\}, \text{ s.t. } \begin{cases} \forall n \geq N_1, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \\ \forall n \geq N_2, |y_n - y| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \quad (114)$$

$$= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \quad (115)$$

$$< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon \quad (116)$$

## 5.6

(1)

$$\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!} (1+1)^{2n+1} \quad (117)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \left( \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k \right) \quad (118)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} (S_{\text{odd}} + S_{\text{even}}) \quad (119)$$

次は

$$(1-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{2n+1-k} C_{2n+1}^k \quad (120)$$

$k$  は奇数のとき、 $(-1)^{2n+1-k} = 1$  で、 $k$  は偶数のとき、 $(-1)^{2n+1-k} = -1$  だから  
 $S_{\text{odd}} - S_{\text{even}} = 0$

$$\text{以上の (119) と (120) より、} \begin{cases} S_{\text{odd}} + S_{\text{even}} = 2^{2n+1} \\ S_{\text{odd}} - S_{\text{even}} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} S_{\text{odd}} = 2^{2n} \\ S_{\text{even}} = 2^{2n} \end{cases}$$

 $S_{\text{odd}}$  と  $S_{\text{even}}$  を書き直すと

$$S_{\text{odd}} = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} \quad (121)$$

$$S_{\text{even}} = \sum_{j=1}^n C_{2n+1}^{2j} \quad (122)$$

 $S_{\text{odd}}$  だけみると

$$\sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j+1} = \sum_{j=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2j+1)!(2k)!} \quad (123)$$

 $S_{\text{odd}} = S_{\text{even}}$  より (119) に代入するともとの式が証明できる

(2)

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (124)$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \quad (125)$$

よって

$$2 \sin z \cos z = 2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \right) \quad (126)$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (-1)^{j+k} \frac{z^{2n+1}}{(2j+1)!(2k)!} \quad (127)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} (-1)^n z^{2n+1} \frac{2}{(2j+1)!(2k)!} \quad (128)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (129)$$

$$= \sin(2z) \quad (130)$$

## 6

## 6.1

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \quad (131)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \quad (132)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \quad (133)$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \quad (134)$$

d'Alembert の判定法より収束する

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1.001^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{1.001^n} \right) \quad (135)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{n}{n+1} \right)^5 \right) \quad (136)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1.001 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^5 \right) \quad (137)$$

$$= 1.001 > 1 \quad (138)$$

よって、発散する

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right) \quad (139)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) \quad (140)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \right) \quad (141)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right) \quad (142)$$

$$= \frac{2}{e} < 1 \quad (143)$$

よって、収束する

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2} \right) \quad (144)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \quad (145)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{2(2n+1)} \quad (146)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{4(n+1) - 2} \quad (147)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4 - \frac{2}{n+1}} \quad (148)$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \quad (149)$$

よって、発散する

## 6.2

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} \quad (150)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \quad (151)$$

よって、絶対収束

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 3 + \frac{1}{n}} = 0$$

$$\frac{d}{dn} a_n = \frac{1 - n^2}{(n^2 + 3n + 1)^2} < 0 \text{ から、} a_n \text{ は単調減少であるまた、} \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$$

よって  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$  は収束であり、 $\frac{n}{n^2 + 3n + 1} \sim \frac{1}{n}$  から絶対収束ではない

(3)

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ かつ単調減少であるから、} \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \text{ が収束} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ が収束}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1 \quad (152)$$

よって、絶対収束

(4)

$$a_n = \frac{n}{n+1} \text{ とすると、} 0 < a_n \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ であるが、} a_{n+1} > a_n \text{ から、収束でない}$$

(5)

$a_n = \frac{1}{n \log n}$  とする

$0 < a_n, a_{n+1} < a_n$  で  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

よって、収束である

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{(n+1) \log(n+1)} \quad (153)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad (154)$$

$$= \infty > 1 \quad (155)$$

よって、条件収束

(6)

$\cos n\pi = (-1)^n$  から、もとの式は  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n}}$  ここで  $\frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$  から、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  が絶対収束であるからこの式も絶対収束

(7)

$\frac{\sqrt{n}}{n+4} > 0, \forall n \geq 4, \frac{\sqrt{n}}{n+4}$  は単調減少である。また  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}} = 0$  から、

$1 \leq n \leq 3$  を含めても収束

$n \geq 4$  に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} \quad (156)$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n} \quad (157)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (158)$$

ここの (158) 式は積分判定法より発散するから、もとの式は絶対収束しない

## 7

## 7.1

加法について,  $\forall f \in \mathcal{F}(S)$ , 定数関数  $0$  が存在し,  $(0 + f)(x) = (f + 0)(x) = f(x)$  から  $0$  は  $\mathcal{F}(S)$  の加法に関する単位元である. また  $(f - f)(x) = (-f + f)(x) = 0$  から, 逆元も存在する.  $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(S), ((f + g) + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + (g + h))(x)$  から結合律が成り立つ. なお  $\forall f, g \in \mathcal{F}(S), (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$   
 $1 \in \mathbb{K}$  で  $\forall f \in \mathcal{F}(S), (1f)(x) = 1f(x) = f(x), \forall a, b \in \mathbb{K}, ((a + b)f)(x) = (af + bf)(x) = af(x) + bf(x), \forall f, g \in \mathcal{F}(S), \forall a \in \mathbb{K}, (a(f + g))(x) = (af + ag)(x) = (af)(x) + (ag)(x) = af(x) + ag(x) = a((f + g)(x)).$  また  $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(S), a(b(f(x))) = a((bf)(x)) = (abf)(x) = (ab)f(x)$   
 以上,  $\mathcal{F}$  は  $\mathbb{K}$  上の線型空間である

## 7.2

- $\|f\|_S := \sup\{|f(x)| : x \in S\}$  で  $|f(x)| \leq 0$  から  $\|f\|_S \leq 0$   
 $\|f\|_S = 0$  とすると,  $\sup\{|f(x)| : x \in S\} = 0$  で  $|f(x)| \leq 0$  より,  $f(x) = 0$
- $\forall f \in \mathcal{B}(S), \alpha \in \mathbb{K}$  とする.  $x \in S$  に対して,  $|(\alpha f)(x)| = |\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \leq \alpha \|f(x)\|_S$

## 7.3

$f$  は  $S$  で一様収束であるから,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \leq N, \|f_n(x) - f(x)\|_S < \epsilon$  で  $\forall x \in S, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n(x) - f(x)\|_S < \epsilon$  があって, 言い換えれば,  $\forall x \in S, f_n(x) \rightarrow f(x)$  は成り立つから,  $f$  は各点収束

## 7.4

$\{f_n\}$  は  $f$  に  $S$  で一様収束とすると,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \leq N, \|f_n(x) - f(x)\|_S < \epsilon$  で  $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : n \in \mathbb{N}\} = \|f_n(x) - f(x)\|$  より (2) が成り立つ  
 逆に (2) を仮定すると,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : n \in \mathbb{N}\} = \|f_n(x) - f(x)\|$  から,  $\{f_n\}$  は一様収束である

## 7.5

## 7.5.1

$$f_n(x) = \frac{n}{1+nx} = \frac{1}{\frac{1}{n} + x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x}, (x \in (0, 2])$$

## 7.5.2

$$\left| \frac{n}{1+nx} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{-1}{x(1+nx)} \right| = \frac{1}{x(1+nx)} \text{ で } x \in (0, 2], n \in \mathbb{N} \text{ から, } x := \frac{1}{n} \text{ とすると, } x \in (0, 1] \subset (0, 2], \left| \frac{n}{1+nx} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x(1+nx)} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ から, } \{f_n\} \text{ は一様収束ではない}$$

## 7.5.3

$$x(1+nx) = nx^2 + x = n \left( x + \frac{1}{2n} \right)^2 - \frac{1}{4n} \text{ から } \forall x \in [1, 2], n+1 \leq x(1+nx) \leq 4n+2 \text{ がある}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n+2} = 0 \text{ から, はさみうち原理より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x(1+nx)} = 0, \text{ よって, } \{f_n\}$$

は  $[1, 2]$  で一様収束である

## 7.6

### 7.6.1

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

よって、 $f$  は一様収束

### 7.6.2

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} = \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\sup_{x \in (0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1]} \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \sup_{x \in (0,1]} \left\{ \frac{1}{1+nx} : n \in \mathbb{N} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1+nx} = 1 \neq 0$$

から、 $f$  は一様収束ではない

### 7.6.3

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x} = \frac{x}{1+\frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{nx}{n+x} - x \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{x^2}{n+x} : n \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

よって、一様収束である

### 7.6.4

$$f_n(x) = \left( x - \frac{1}{n} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \left( x - \frac{1}{n} \right)^2 - x^2 \right| = \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ n \in \mathbb{N}}} \left\{ \frac{1}{n} \left( 2x - \frac{1}{n} \right) \right\} = \frac{1}{n} \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

よって、一様収束である

### 7.6.5

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{x^2+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

よって、一様収束である

## 8

## 8.1

$f$  は  $[0, 1]$  で一様連続であるから,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| < \epsilon$   
 $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \chi_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)}(x)$  で,  $\forall x \in [0, 1], x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$  は一意的に存在するから,  
 $f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ . また  $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$  より,  $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{n}$ . この一様連続より,  $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| = \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \epsilon$ .  $x$  の任意性より,  $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$   
よって  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  で, 一様収束である

## 8.2

$x \in [-a, 1]$  に対して,  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, f(x) = \log(x+1)$  とおく

$$s'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^n}{x+1}, f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$s'_n(x) - f'(x) = \frac{(-x)^n}{x+1}$  を 0 から  $x$  まで積分すると

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^x (s'_n(t) - f'(t)) dt = - \int_0^x \frac{(-t)^n}{t+1} dt$$

$x \in [-a, 1], |s_n(x) - f(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{t+1} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt < \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  から,

$\|s_n(x) - f(x)\|_{[-a, 1]} < \frac{1}{n}, \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$  は  $\log(x+1)$  に一様収束する

## 8.3

$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$  で,  $f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow g$  から

両辺に  $n \rightarrow \infty$  とすると,  $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$

よって,  $f_n(x) - f(x) = (f_n(x) - f(a)) - \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt$

絶対値を取ると,  $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(a)| + \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt$

$f'_n(t)$  は  $g(t)$  に一様収束であるから  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, \sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

で  $f_n(a) \rightarrow f(a)$  は各点収束であるから  $\exists N' \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N', |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$

よって,  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + (b-a) \cdot \frac{\epsilon}{2(b-a)} = \epsilon$  から  $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  で  $f_n$  は  $f$  に

一様収束である

## 8.4

$\{f_n\}$  は 1 に一様収束であり,  $M := \sup_{x \in [0, 1]} |\log(x+1)|$  とすると,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq$

$N, \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$  で

$|f_n(x) \log(x+1) - f(x) \log(x+1)| = |f_n(x) - f(x)| \cdot |\log(x+1)| \leq \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$  から  
 $f_n(x) \log(x+1)$  は  $\log(x+1)$  に一様収束である  
 よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \log(x+1) dx = \int_0^1 \log(x+1) dx \tag{159}$$

$$= [x \log(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \tag{160}$$

$$= \log 2 - [x - \log(x+1)]_0^1 \tag{161}$$

$$= 2 \log 2 - 1 \tag{162}$$

## 8.5

これが成り立つなら  $\sin(x + e^{-n^2})$  が  $\sin x$  に一様収束であることを証明すればいい  
 $g_n(x) = \sin(x + e^{-n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin x$

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |\sin(x + e^{-n^2}) - \sin x| \tag{163}$$

$$= \sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| 2 \sin\left(\frac{e^{-n^2}}{2}\right) \cos\left(\frac{2x + e^{-n^2}}{2}\right) \right| \tag{164}$$

$$\leq 2 \sin\left(\frac{e^{-n^2}}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{165}$$

よって、 $\sin(x + e^{-n^2})$  が  $\sin x$  に一様収束である

## 8.6

$x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  で、 $\sup_{x \in [0, 1]} \left| x + \frac{1}{n} - x \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  から  $x + \frac{1}{n}$  は  $x$  に一様収束する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{n}\right) e^{-x^2} dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx \tag{166}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \tag{167}$$

## 8.7

### 8.7.1

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2n^2} + \frac{1}{n} & x \in [0, 2n] \\ 0 & x \in [2n, \infty) \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & x \in [0, 2n] \\ 0 & x \in [2n, \infty) \end{cases} = 0$$

### 8.7.2

$[2n, \infty)$  では自明であるから  $[0, 2n]$  だけ示せばいい

$$\sup_{x \in [0, 2n]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 2n]} \left| \frac{1}{n} - \frac{x}{2n^2} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ から, } \{f_n\} \text{ は } f \text{ に一様収束である}$$

## 8.7.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n} \left( \frac{1}{n} - \frac{x}{2n^2} \right) \, dx \quad (168)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n}x - \frac{1}{4n^2}x^2 \right]_0^{2n} \quad (169)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 1) = 1 \quad (170)$$

## 9

## 9.1

## 9.1.1

$f_k(x) := \frac{x^k}{k!}$  とおく.  $\sup_{x \in [0, t]} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{t^k}{k!}$  から,  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t - 1 < \infty$   
よって

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{x^k}{k!} dx \quad (171)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = e^t - 1 \quad (172)$$

## 9.1.2

$f'_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$  から,  $\sup_{x \in [0, t]} \left| \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right| = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$  より  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f'_k(x)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = e^t < \infty$   
よって

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \quad (173)$$

$$= e^x \quad (174)$$

## 9.2

## 9.2.1

$f_k(x) := \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$  とおく

$\sup_{x \in [0, t]} |f_k(x)| = \sup_{x \in [0, t]} \left| \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| = \frac{t^{2k}}{(2k)!}$  より  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} < e^{2t} < \infty$  から, 項別積分可能

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} dx \quad (175)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (176)$$

## 9.2.2

$g_k(x) := \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$  とする.  $g'_k(x) = \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

$\sup_{x \in [-t, t]} \left| \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| = \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$  より,  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} < e^{2t} < \infty$ , よって, 項別微分可能

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (177)$$

## 9.3

$$f_k(x) := \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, f'_k(x) = (-1)^{k+1} x^{k-1}$$

$$\sup_{x \in [-t, t]} \left| \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \right| = \frac{t^k}{k}, \sup_{x \in [-t, t]} |(-1)^{k+1} x^{k-1}| = t^{k-1}$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = \frac{t}{1-t} < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \|f'_k(x)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} = \frac{1}{1-t} < \infty$$

よって、項別微分可能

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{k-1} \quad (178)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad (179)$$

$$= \frac{1}{x+1} \quad (180)$$

## 9.4

$g(x, t) := f(x) \cos(xt)$  とすると,  $f \in C([a, b])$ ,  $\cos(xt) \in C(I \times [a, b])$  から  $g(x, t) \in C(I \times [a, b])$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x, t+h) - g(x, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos(x(t+h)) - f(x) \cos(xt)}{h} = -xf(x) \sin(xt) \text{ から,}$$

$f \in C([a, b])$  より,  $\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \in C(I \times [a, b])$

以上より,  $F \in C^1(I)$  で,  $F'(t)$  が存在する

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) dx \quad (181)$$

$$= - \int_a^b xf(x) \sin(xt) dx \quad (182)$$

## 9.5

$h(x, t) := |f(x) + tg(x)|^\alpha$  とする

$f, g \in C([0, 1])$  より  $h(x, t)$  は  $C^1$  から,  $F(t) \in C^1(I)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x, t+h) - h(x, t)}{h} = \alpha g(x) \operatorname{sgn}(f(x) + tg(x)) |f(x) + tg(x)|^{\alpha-1} \text{ から, } \alpha \geq 2 \text{ より連続}$$

である

よって,  $F'(t)$  が存在する

$$F'(t) = \int_0^1 \alpha g(x) \operatorname{sgn}(f(x) + tg(x)) |f(x) + tg(x)|^{\alpha-1} dx \quad (183)$$

$$= \alpha \int_0^1 g(x) (f(x) + tg(x)) |f(x) + tg(x)|^{\alpha-2} dx \quad (184)$$

## 9.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \text{ から, } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n \text{ は発散する. よって, } \rho = 0$$

## 9.7

## 9.7.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3} \text{ から, 収束半径 } \rho = 3$$

## 9.7.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n}{n+1} \right| = 1 \text{ から, 収束半径 } \rho = 1 \text{ である}$$

## 9.7.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 \text{ から, 収束半径 } \rho = \frac{1}{3} \text{ である}$$

## 9.7.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \text{ から, 収束半径 } \rho = e$$

## 9.7.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = a \text{ から, } a = 0 \text{ のとき発散で, } a \neq 0 \text{ のとき収束半径 } \rho = \frac{1}{a} \text{ である}$$

## 9.8

$f(z)$  は  $z = a$  で微分可能だから,  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$  が存在する

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (f(a) + (f(z) - f(a))) \tag{185}$$

$$= f(a) + \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) \tag{186}$$

$$= f(a) + \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{187}$$

$$= f(a) + 0 \cdot f'(a) \tag{188}$$

$$= f(a) \tag{189}$$

よって,  $f(z)$  は  $z = a$  で連続である

## 10

## 10.1

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$  から,  $\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$  は発散する. よって,  $\rho = 0$

## 10.2

## 10.2.1

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}$  から, 収束半径  $\rho = 3$

## 10.2.2

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n}{n+1} \right| = 1$  から, 収束半径  $\rho = 1$  である

## 10.2.3

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$  から, 収束半径  $\rho = \frac{1}{3}$  である

## 10.2.4

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$  から, 収束半径  $\rho = e$

## 10.2.5

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = a$  から,  $a = 0$  のとき発散で,  $a \neq 0$  のとき収束半径  $\rho = \frac{1}{a}$  である

## 10.3

## 10.3.1

d'Alembert の判定法より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  から, 収束半径  $\rho = 1$  である

## 10.3.2

$f(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$  の項別微分は  $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  であるから, 両辺で  $x$  をかけると  $\frac{x}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x = \frac{1}{2}$  を代入すると,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

## 10.4

$f(z)$  は  $z = a$  で微分可能だから,  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$  が存在する

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (f(a) + (f(z) - f(a))) \quad (190)$$

$$= f(a) + \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) \quad (191)$$

$$= f(a) + \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (192)$$

$$= f(a) + 0 \cdot f'(a) \quad (193)$$

$$= f(a) \quad (194)$$

よって,  $f(z)$  は  $z = a$  で連続である

## 10.5

$$\|u\|_{\infty} = \sup \{|u(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup \{|u(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}$$

$u$  は連続であるから, 最大値の定理より, 有界閉区間で必ず有界であるから  $\|u\|_{\infty} < \infty$

## 10.6

$$\langle u, u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \overline{u(x)} dx \quad (195)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx = \|u\|^2 \quad (196)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|u\|_{\infty}^2 dx \quad (197)$$

$$= \|u\|_{\infty}^2 \quad (198)$$

## 10.7

$$\phi_m = e^{imx}, \phi_n = e^{inx}$$

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m \overline{\phi_n} dx \quad (199)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \quad (200)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \quad (201)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx & m = n \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx & m \neq n \end{cases} \quad (202)$$

$$= \begin{cases} 1 & m = n \\ \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} & m \neq n \end{cases} \quad (203)$$

$$= \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (204)$$

$$= \delta_{mn} \quad (205)$$

## 10.8

$$\left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right| = |c_k| |e^{ikx}| = |c_k| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |c_k e^{ikx}| = |c_k|$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$  から,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  も一様収束である

## 11

## 11.1

$f(z)$  は  $z = a$  で微分可能だから,  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$  が存在する

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (f(a) + (f(z) - f(a))) \quad (206)$$

$$= f(a) + \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) \quad (207)$$

$$= f(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} (z - a) \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad (208)$$

$$= f(a) + 0 \cdot f'(a) \quad (209)$$

$$= f(a) \quad (210)$$

よって,  $f(z)$  は  $z = a$  で連続である

## 11.2

## 11.2.1

$|r^k \cos(k\theta)| \leq r^k$  から  $\sum_{k=1}^{\infty} |r^k \cos(k\theta)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r} < \infty$  であるから, 絶対収束である

また,  $f_n(\theta) := \sum_{k=1}^n r^k \cos(k\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\theta) =: f(\theta)$

$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f_n(\theta) - f(\theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k \cos(k\theta) \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \frac{r^{n+1}}{1-r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  から一様収束である

また, 各項は連続であるから,  $P_r(\theta)$  も連続であるから,  $P_r \in C(\mathbb{R})$

## 11.2.2

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ik\theta} \quad (211)$$

$$= 1 + \frac{re^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \quad (212)$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad (213)$$

## 11.3

## 11.3.1

$x = y + a$  とすると  $\int_{a-\pi}^{a+\pi} u(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(y+a) dy = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx$

最後の等号は周期性による成り立つ

## 11.3.2

$$S_r[u](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) u(y) dy \quad (214)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-y) + r^2} u(y) dy \quad (215)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} P_r(z) u(x-z) (-dz) \quad (216)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} u(x-z) P_r(z) dz \quad (217)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x-y) P_r(y) dy \quad (218)$$

## 11.4

$$\int_a^b u'(x) (v_1(x) + iv_2(x)) dx = \int_a^b u'(x) v_1(x) dx + i \int_a^b u'(x) v_2(x) dx \quad (219)$$

$$= [u(x) (v_1(x) + iv_2(x))]_a^b - \int_a^b u(x) (v_1'(x) + iv_2'(x)) dx \quad (220)$$

## 11.5

$u(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ -x & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$  から,  $X$  に属している

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx \quad (221)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \quad (222)$$

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

$k \neq 0$  のとき

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \quad (223)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \quad (224)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (225)$$

$$\int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \left[ \frac{1}{k} x \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \quad (226)$$

$$= \frac{1}{k^2} [\cos(kx)]_0^{\pi} \quad (227)$$

$$= \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) \quad (228)$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \quad (229)$$

---

$$\text{よつて, } \hat{u}_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} & k \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & k = 0 \end{cases}$$

## 12

## 12.1

$u(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ -x & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$  から,  $X$  に属している

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx \quad (230)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \quad (231)$$

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

$k \neq 0$  のとき

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \quad (232)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \quad (233)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \quad (234)$$

$$\int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \left[ \frac{1}{k} x \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \quad (235)$$

$$= \frac{1}{k^2} [\cos(kx)]_0^{\pi} \quad (236)$$

$$= \frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) \quad (237)$$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \quad (238)$$

$$\text{よって, } \hat{u}_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} & k \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & k = 0 \end{cases}$$

$$F_n[u](x) = \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k \phi_k(x) \quad (239)$$

$$= \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k e^{ikx} \quad (240)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \hat{u}_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^n \hat{u}_{-k} e^{-ikx} \quad (241)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^n \hat{u}_k (e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad (242)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^n \frac{2}{\pi k^2} (\cos(kx) + \cos(kx)) \quad (243)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^n \frac{1}{k^2} \cos(kx) \quad (244)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k| = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right| \quad (245)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} \quad (246)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad (247)$$

から  $F_n[u](x)$  は一様収束し,  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ 2 \nmid k}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \cos(kx) = |x|$

この式に  $x=0$  を代入すると,  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = 0$  から,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

## 12.2

### 12.2.1

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx \quad (248)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \quad (249)$$

$$k=0 \text{ のとき, } \hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$k \neq 0$  のとき

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \quad (250)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \quad (251)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(kx) dx \quad (252)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \quad (253)$$

$I := \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx$  とおくと

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \quad (254)$$

$$= \left[ \frac{1}{k} \sin x \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos x \sin(kx) dx \quad (255)$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos x \sin(kx) dx \quad (256)$$

$$= -\frac{1}{k} \left( \left[ -\frac{1}{k} \cos x \cos(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \right) \quad (257)$$

$$= -\frac{1}{k} \left( \left[ -\frac{1}{k} \cos x \cos(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k} I \right) \quad (258)$$

$$= -\frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) + 1) + \frac{1}{k^2} I \quad (259)$$

$$\text{よって, } \frac{k^2 - 1}{k^2} I = -\frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) + 1) \implies I = \frac{\cos(k\pi) + 1}{1 - k^2}$$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\pi} I \quad (260)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi) + 1}{1 - k^2} \quad (261)$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1 - k^2)} & k \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} & k = 0 \end{cases} \quad (262)$$

### 12.2.2

$$F_n[u](x) = \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k \phi_k(x) \quad (263)$$

$$= \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k e^{ikx} \quad (264)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k + 1}{(1 - k^2)} \cos(kx) \quad (265)$$

また

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k| = \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1 - k^2)} \right| \quad (266)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} < \infty \quad (267)$$

から,  $F_n[u](x)$  は一様収束し,  $\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \cos(kx) = |\sin x|$

$$\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} = \begin{cases} 0 & 2 \nmid k \\ \frac{2}{1 - k^2} & 2 \mid k \end{cases} \text{ から, } |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 - 4n^2} \cos(kx) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos(2nx)$$

から

$$x = 0 \text{ を代入すると, } 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \text{ から, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

### 12.2.3

$$2 \text{ より, } |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \cos(kx) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos(2nx)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ を代入すると } 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2} \text{ から}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

## 12.2.4

$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2nx)$  で、 $x = \frac{\pi}{4}$  を代入すると

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  から、 $2 \nmid n$  のとき  $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$  であることを注意すると

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2|n}}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1-16m^2}$  であるから

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{16m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

## 12.3

## 12.3.1

$$\hat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x) e^{-ikx} dx \quad (268)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|x-a|^2) e^{-ikx} dx \quad (269)$$

$$k=0 \text{ のとき, } \hat{v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|x-a|^2) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 2a|x| + a^2) dx = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2}{3}\pi^3 - 2a\pi^2 + 2a^2\pi \right) =$$

$$\frac{1}{3}\pi^2 + a^2 - a\pi$$

$k \neq 0$  のとき

$$\hat{v}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|x-a|^2) e^{-ikx} dx \quad (270)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x-a)^2 \cos(kx) dx \quad (271)$$

$$I := \int_0^{\pi} (x-a)^2 \cos(kx) dx$$

$$I = \int_0^{\pi} (x-a)^2 \cos(kx) dx \quad (272)$$

$$= \left[ \frac{1}{k} (x-a)^2 \sin(kx) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} (x-a) \sin(kx) dx \quad (273)$$

$$= -\frac{2}{k} \int_0^{\pi} (x-a) \sin(kx) dx \quad (274)$$

$$= -\frac{2}{k} \left( \left[ -\frac{1}{k} (x-a) \cos(kx) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right) \quad (275)$$

$$= \frac{2}{k^2} (\pi-a) \cos(k\pi) + \frac{2a}{k^2} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \quad (276)$$

$$= \frac{2}{k^2} (\pi-a) \cos(k\pi) + \frac{2a}{k^2} \quad (277)$$

から

$$\hat{v}_k = \begin{cases} \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi & k = 0 \\ \frac{2}{\pi k^2} ((\pi - a) \cos(k\pi) + a) & k \neq 0 \end{cases} \quad (278)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi & k = 0 \\ \frac{2}{\pi k^2} ((\pi - a)(-1)^k + a) & k \neq 0 \end{cases} \quad (279)$$

### 12.3.2

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{v}_k| = \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2}{\pi k^2} ((\pi - a)(-1)^k + a) \right| \quad (280)$$

$$= \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |a + (-1)^k (\pi - a)| \quad (281)$$

$$\leq \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (|a| + |\pi - a|) < \infty \quad (282)$$

よって,  $F_n[v](x)$  は一様収束し

$$(|x| - a)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n[v](x) \quad (283)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}_k \phi_k(x) \quad (284)$$

$$= \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} ((\pi - a)(-1)^k + a) \cdot 2 \cos(kx) \quad (285)$$

$$= \frac{1}{3}\pi^3 + a^2 - a\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (a + (-1)^k (\pi - a)) \cos(kx) \quad (286)$$

よって,  $a = \pi$  を代入すれば  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kx)$  が得られるから,  $u(x) = (|x| - \pi)^2$

### 12.3.3

$x = 0$  を  $u(x) = (|x| - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kx)$  に代入すると

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{であるから,} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### 12.3.4

$x = \pi$  を  $u(x)$  に代入すれば  $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$  から  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

## 12.4

$A \subset [0, \infty)$  から  $A^2 \subset [0, \infty)$  で,  $A$  と  $A^2$  の上界が共に存在する

$\forall r \in A, r \leq \sup A$  から  $r^2 \leq (\sup A)^2$  が得られ,  $(\sup A)^2$  は  $A^2$  の上界である.  $A^2$  上限が最小であるから  $\sup A^2 \leq (\sup A)^2$

逆に,  $\sup A$  の定義より,  $\forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A, s.t. \sup A - \epsilon < a_\epsilon \leq \sup A$  があって,  $(\sup A - \epsilon)^2 \leq a_\epsilon^2 \leq (\sup A)^2$  が成り立つ.  $a_\epsilon^2 \in A^2$  から左の不等号について  $(\sup A)^2 - 2\epsilon \sup A + \epsilon^2 < a_\epsilon^2$  となり,  $\epsilon \rightarrow 0+$  のとき,  $(\sup A)^2 \leq \sup A^2$

以上より,  $\sup A^2 = (\sup A)^2$

## 12.5

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum_{k=1}^{\infty} |c_n| r^n < \infty \right\}, \rho' = \sup \left\{ t \geq 0 : \sum_{k=1}^{\infty} |c_n| t^{2n} < \infty \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n} \text{ について, } s = |z|^2 \text{ とおくと, } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^{2n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| s^n$$

定義より,  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| s^n < \infty \iff s < \rho, \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| s^n = \infty \iff s > \rho$  から

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^{2n}| < \infty \iff |z|^2 < \rho \iff |z| < \sqrt{\rho}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^{2n}| = \infty \iff |z|^2 > \rho \iff |z| > \sqrt{\rho}$$

$$\text{よって } \rho' = \sup \left\{ t \geq 0 : |z| = t \implies \sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^{2n}| < \infty \right\} = \sqrt{\rho}$$

## 13

## 13.1

## 13.1.1

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_k(x) e^{-ikx} dx \quad (287)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{-ikx} dx \quad (288)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \quad (289)$$

$$k=0 \text{ のとき, } \hat{u} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$k \neq 0 \text{ のとき, } I = \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \text{ とおくと}$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) dx \quad (290)$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos x \sin(kx) dx \quad (291)$$

$$= -\frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} I \right) \quad (292)$$

$$\text{から, } \frac{k^2-1}{k^2} I = -\frac{1}{k^2} (\cos(k\pi) + 1) \text{ 従って } I = \frac{\cos(k\pi) + 1}{1-k^2}$$

$$\text{よって } \hat{u}_k = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & k=0 \\ \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} & k \neq 0 \end{cases}$$

## 13.1.2

$$F_n[u](x) = \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \cos(kx) \quad (293)$$

で

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k| = \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \right| < \infty \quad (294)$$

から,  $F_n[u](x)$  は一様収束し

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \cos(kx) \quad (295)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} \cos(2nx) \quad (296)$$

$$x=0 \text{ を代入すると } 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \text{ から, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

## 13.1.3

2 より,  $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} \cos(2nx)$  で

$x = \frac{\pi}{2}$  を代入すると,  $1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$  から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

## 13.1.4

同様に  $x = \frac{\pi}{4}$  を代入し,  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  から

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1-16m^2} \quad \text{で,} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4m-1)(4m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{16m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

## 13.1.5

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2 = \frac{4}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \right)^2 \quad (297)$$

$$= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)^2}{(1-k^2)^2} \quad (298)$$

$$= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2} \quad (299)$$

で,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}$  から

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = 4 - \frac{1}{2}\pi^2$$

## 13.2

## 13.2.1

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & k=0 \\ \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} & k \neq 0 \end{cases}$$

$$F_n[u](x) = \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k \phi_k(x) \quad (300)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kx) \quad (301)$$

で, 12.1 で一様収束性はもう証明したから

$$|x| = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2 \pi} \cos((2n-1)x) \quad (302)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) \quad (303)$$

両辺で  $x$  に関して,  $0$  から  $\frac{\pi}{2}$  積分すると, 左側は  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x| dx = \frac{\pi^2}{8}$  で, 右側は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dx - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) dx \quad (304)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} dx \quad (305)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (306)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \quad (307)$$

よって,  $\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$  から,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

### 13.2.2

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right)^2 \quad (308)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2}{\pi (2n-1)^2} \right)^2 \quad (309)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad (310)$$

となり, Parseval より  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$  から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

### 13.3

$$\left\| u - \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k \right\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u - \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ であり}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k, \phi_m \right\rangle = \langle u, \phi_m \rangle \text{ (Schwarz の不等式)}$$

$|m| \leq n$  のとき  $\left\langle \sum_{k=-n}^n c_k \phi_k, \phi_m \right\rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \langle \phi_k, \phi_m \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \delta_{km} = c_m$  から, 最小になるのは  $c_m = \langle u, \phi_m \rangle$  である

## 13.4

## 13.5

## 13.6

## 13.7

## 13.7.1

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh x dx = \frac{1}{2\pi} [\sinh x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

以下,  $k \neq 0$  とする

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-ikx} dx \quad (311)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{-ikx} dx \quad (312)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos(kx) dx \quad (313)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh x \cos(kx) dx \quad (314)$$

$$I = \int_0^{\pi} \cosh x \cos(kx) dx \quad (315)$$

$$= \left( \frac{1}{k} [\cosh x \sin(kx)]_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sinh x \sin(kx) dx \right) \quad (316)$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sinh x \sin(kx) dx \quad (317)$$

$$= -\frac{1}{k} \left( -\frac{1}{k} [\sinh x \cos(kx)]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cosh x \cos(kx) dx \right) \quad (318)$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2k^2} \cos(k\pi) - \frac{1}{k^2} I \quad (319)$$

から,  $I = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1 + k^2} \cos(k\pi) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1 + k^2} (-1)^k \mathcal{C}$

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} & k = 0 \\ \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1 + k^2)} (-1)^k & k \neq 0 \end{cases} \quad (320)$$

## 13.7.2

$$F_n[u](x) = \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k e^{ikx} \quad (321)$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(1 + k^2)} (-1)^k \cos(kx) \quad (322)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_k| = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1-k^2)} (-1)^k \right| \quad (323)$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4\pi} + \frac{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-k^2} \right| < \infty \quad (324)$$

よって、 $F_n[u](x)$  は一様収束し

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)} (-1)^k \cos(kx) \quad (325)$$

で、 $x = \pi$  を代入すると、 $\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)}$  があって

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{\pi e^{\pi} + \pi e^{-\pi} - e^{\pi} + e^{-\pi}}{2\pi} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{(\pi - 1)e^{\pi} + (\pi + 1)e^{-\pi}}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}$$

### 13.7.3

$x = 0$  を代入すると、 $1 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)} (-1)^k$  で

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)} (-1)^{k+1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} - 1 \text{ となるから}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$