Contents

1 実数と複素数

Def 1. $S \subset \mathbb{R}$ とする.

$$S^* = \{x \in \mathbb{R} : S \subset (-\infty, x]\}, S_* = \{x \in \mathbb{R} : S \subset [x, \infty)\}$$

· $x \in S^*$ のとき、x は S の上界である

· $x \in S_*$ のとき、x は S の下界である

· $S^* \neq \emptyset$ のとき、S は上に有界である

· $S_* \neq \emptyset$ のとき、S は下に有界である

· S は上にも下にも有界であるとき、S は有界である

Def 2. $S \subset \mathbb{R}$ とする.

· $x \in S \cap S^*$ のとき、x は S の**最大数**である、$\max S$ で書く

· $x \in S \cap S_*$ のとき、x は S の**最小数**である、$\min S$ で書く

Thm 1. $S \subset \mathbb{R}$ かつ $S \neq \emptyset$ とする

· $S^* \neq \emptyset$ のとき、S^* の最小数 $\min S^*$ が存在する

· $S_* \neq \emptyset$ のとき、S_* の最大数 $\max S_*$ が存在する

Def 3. $S \subset \mathbb{R}$ かつ $S \neq \emptyset$ とする

· $S^* \neq \emptyset, \sup S = \min S^*$. また $S^* = \emptyset, \sup S = \infty$

· $S_* \neq \emptyset, \inf S = \max S_*$. また $S_* = \emptyset, \inf S = -\infty$

Def 4. $\{x_{n]}\}$ は実数列とする

· $x_n \leq x_{n+1}\,(n \in \mathbb{N})$ のとき、$\{x_{n]}\}$ は非減少である

· $x_{n+1} \leq x_n\,(n \in \mathbb{N})$ のとき、$\{x_n\}$ は非増加である

Def 5. $\{x_n\}$ は実数列とし、$a \in \mathbb{R}$ とする
任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$n \geq n_0$ ならば $|x_n - a| < \epsilon$ が成り立つとき、$\{x_n\}$ は a に収束するといい、$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ または $x_n \to a$ と表す
なお、$x_n \to a$ をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在するとき、$\{x_n\}$ は収束する、または $\{x_n\}$ は収束列であるという

Thm 2. $\{x_n\}$ は実数列とする

· $\{x_n\}$ が非減少かつ上に有界ならば、$\{x_n\}$ は収束する

· $\{x_n\}$ が非増加かつ下に有界ならば、$\{x_n\}$ は収束する

Def 6. $\{x_n\}$ は有界な実数列とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha_n = \inf\{x_k : k \geq n\}, \beta_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$$

と定めると、$\alpha_1 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \beta_1$ である

· $\{\alpha_n\}$ は非減少かつ上に有界だから収束する. この極限値 $\liminf_{n\to\infty} x_n$ を $\{x_n\}$ の下極限という

· $\{\beta_n\}$ は非増加かつ下に有界だから収束する．この極限値 $\limsup_{n\to\infty} x_n$ を $\{x_n\}$ の上極限という

Thm 3. $\{x_n\}$ は有界な実数列とする．以下同値:

· $\{x_n\}$ は収束列

· $\lim_{n\to\infty}\inf x_n = \lim_{n\to\infty}\sup x_n$

Def 7. $\{x_n\}$ は実数列とする．
任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$m, n \geq n_0$ ならば $|x_m - x_n| < \epsilon$ が成り立つとき、$\{x_n\}$ は Cauchy 列である

Cor 1. Cauchy 列は有界である

Thm 4. $\{x_n\}$ は実数列とする．以下同値:

· $\{x_n\}$ は収束列である

· $\{x_n\}$ は Cauchy 列である

Proof. (i)$\Longrightarrow$(ii)
$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ とすると、$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n, m \geq N, d(x_n, x) < \frac{1}{2}\epsilon, d(x_m, x) < \frac{1}{2}\epsilon$
よって $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \epsilon$
(ii)$\Longrightarrow$(i) は背理法で考えよう
$\{x_n\}$ は収束列でないと仮定すると、$\{x_n\}$ が Cauchy 列より、有界である．
$\alpha_n := \inf\{x_k : k \geq n\}, \beta_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$
$\alpha = \liminf_{n\to\infty} x_n, \beta = \limsup_{n\to\infty} x_n$ とおく
背理法の仮定より、収束でないから $\alpha < \beta$ である
$\epsilon_0 = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)$ とおく、$\{x_n\}$ は Cauchy 列であるから
$\exists n \in \mathbb{N}, s.t. \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \epsilon_0$
また、$\alpha_{n_0} < \alpha + \epsilon_0$ だから、$\exists p \in \mathbb{N}, s.t. p \geq n_0$ かつ $x_p < \alpha + \epsilon_0$
同様に、$\beta - \epsilon_0 < \beta_{n_0}$ だから
$\exists q \in \mathbb{N}, s.t. q \geq n_0$ かつ $\beta - \epsilon_0 < x_q$
このとき $p, q \geq n_0$ かつ $|x_p - x_q| = x_q - x_p > \epsilon_0$ だから
仮定と矛盾する．ゆえに $\{x_n\}$ は収束列である □

Def 8.

$$\mathbb{C} = \left\{x + yi : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ に対して

· x を z の実部といい、Rez で表す

· y を z の虚部といい、Imz で表す

· $x - yi$ を z の共役複素数といい、$\overline{z}$ で表す

· $\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値といい、$|z|$ で表す

e.g. 1. $r_1, r_2 \geq 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とし

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とする．このとき、$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

Proof.

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 ((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))
\end{aligned}
$$

□

e. g. **2.** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対し、$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Proof. 以下は $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ だけ示す

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}
$$

□

2 ノルム空間

Def 9. X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. 写像 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ がノルムであるとは、以下の条件が成り立つことである:

- $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$. また、$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ノルム空間とは、線形空間とノルムの組 $(X, \|\cdot\|)$ である

Def 10. $x, y \in \mathbb{K}^N$ に対して、内積は

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Prop 1. $x, y \in \mathbb{K}^N$ に対し、Schwarz の不等式 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ を示せ

Proof. $y = 0$ のときは自明であるから、以下は $y \neq 0$ のときを考えよう
$y \neq 0$ とする、$t \in \mathbb{K}$ に対して

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \langle x - ty, x - ty \rangle = \|x\|^2 - t\langle y, x \rangle - \bar{t}\langle x, y \rangle + |t|^2 \|y\|^2$$

□

Def 11. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし、$\{u_n\}$ を X の点列とする

- $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0$ を満たす $u \in X$ が存在するとき、$\{u_n\}$ は X の収束列である.
- $\forall \epsilon > 0$ に対し、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、$m, n \geq n_0$ ならば $\|u_m - u_n\| < \epsilon$ が成り立つとき、$\{u_n\}$ は X の Cauchy 列である
- X の任意の Cauchy 列が収束列であるとき、X は完備である
- 完備なノルム空間を Banach 空間とする

Problem 1. 収束列は Cauchy 列である

Proof. $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ とする. $\{x_n\}$ は収束列であるから
$\forall \epsilon > 0, \exists M, N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq M, N, d(x_M, x) < \frac{1}{2}\epsilon, d(x_N, x) < \frac{1}{2}\epsilon$
$d(x_M, x_N) \leq d(x_M, x) + d(x_N, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ □

Problem 2. Cauchy 列は有界である

Proof. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を Cauchy 列とする. $\epsilon = 1$ とすると、$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \geq N, |x_n - x_m| < 1$.
特に $m = 1$ と固定すると、$\forall n \geq M, |x_n - X_N| \leq 1$. よって、$\{x_n\}_{\geq N}$ は有界である. なお、$x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ を含めても有界集合である □

e.g. 3. $\mathbb{R}^N$ は Banach 空間である

Proof. $\{x_n\}\, n\in\mathbb{N}$ を $\mathbb{R}^N$ の Cauchy 列とし、$x_n=\left(x_n^1,\cdots,x_n^N\right)$ とする.
$j\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対して、$\left|x_m^j-x_n^j\right|\leq\|x_m-x_n\|$
だから $\left\{x_n^j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である
$\mathbb{R}$ は完備だから、$\exists x^j\in\mathbb{R}, s.t. \left|x_n^j-x_n\right|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$
ここで $x=\left(x^1,\cdots,x^N\right)$ とおくと、$x\in\mathbb{R}^N$ であり、$\|x_n-x\|^2=\sum_{j=1}^N\left|x_n^j-x^j\right|^2\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$
だから、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^N$ の収束列である □

Prop 2. $\mathbb{C}^N$ は Banach 空間

Prop 3. $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする、以下を示せ
(1) $\left(\mathbb{K}^N,\|\cdot\|_1\right)$ は Banach 空間である
(2) $\left(\mathbb{K}^N,\|\cdot\|_\infty\right)$ は Banach 空間である

e.g. 4. $(C[-1,1],\|\cdot\|_1)$ は Banach 空間でないことを示せ

Proof. $I=[-1,1]$ とおく、$n\in\mathbb{N}$ に対して、$u_n(t)=\begin{cases}0 & (-1\leq t\leq 0)\\ nt & \left(0<t<\frac{1}{n}\right)\\ 1 & \left(\frac{1}{n}\leq t\leq 1\right)\end{cases}$ と定める.
$\Longrightarrow u_n\in C(I)$.
また、$m,n\in\mathbb{N}, n<m$ に対して、$\|u_m-u_n\|_1=\int_0^{\frac{1}{n}}|u_m(t)-u_n(t)|\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n}$ だから
$\{u_n\}$ は $(C(I),\|\cdot\|)$ の Cauchy 列である.
次は $\{u_n\}$ は $(C(I),\|\cdot\|_1)$ の収束列ではないことを示す.
$\{u_n\}$ は $(C(I),\|\cdot\|_1)$ の収束列であると仮定する.
このとき、$\exists u\in C(I), s.t. \lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_1=0$
$-1\leq t\leq 0$ のとき、$u_n(t)=0\,(n\in\mathbb{N})$ だから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0|u_n(t)|\,\mathrm{d}t&=\int_{-1}^0|u_n(t)-u(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leq\int_{-1}^1|u_n(t)-u(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\|u_n-u\|_1\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

よって、$\int_{-1}^0|u(t)|\,\mathrm{d}t=0$ であり、$u\in C(I)$ であるから
$u(t)=0\,(-1\leq t\leq 0)$
次に $\delta\in(0,1)$ を任意にとる、$n\geq\frac{1}{\delta}$ のとき、$\frac{1}{n}\leq\delta$ だから

$$\begin{aligned}\int_\delta^1|u(t)-1|\,\mathrm{d}t&=\int_\delta^1|u(t)-u_n(t)|\,\mathrm{d}t\\&\leq\|u_n-u\|_1\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

よって、$\int_\delta^1|u(t)-1|\,\mathrm{d}t=0$ であり、$u\in C(I)$ だから $u(t)=1\,(\delta\leq t\leq 1)$
ここで $\delta\in(0,1)$ は任意だから、$u(t)=\begin{cases}1 & (0<t\leq 1)\\ 0 & (-1\leq t\leq 0)\end{cases}$ であり、$u\notin C(I)$ となり、矛盾
故に、$\{u_n\}$ は $(C(I),\|\cdot\|_1)$ の収束列ではない □

3 級数

以下、K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$(X, \|\cdot\|)$ は体 K 上の Banach 空間とする

Def 12. $\{a_n\}$ は X の点列とし、$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbb{N})$ とおく
X の点列 $\{S_n\}$ が収束するとき、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する
また、収束しないとき発散するという

Thm 5. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するならば $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, (in \quad X)$

Proof. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおき、$S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S, (in \quad X)$ とすると
$a_n = S_n - S_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0, (in \quad X)$ □

Thm 6. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ がともに収束すると仮定する
このとき、$\alpha, \beta \in K$ に対して、$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ は収束し、$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Proof. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) &= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \\
&\longrightarrow \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k
\end{aligned}
$$

□

Thm 7. $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ ならば、$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ は収束する

Proof. $\forall \epsilon > 0$ を任意にとる. $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ だから、$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \sum_{k=N}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon$
$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく、$m > n \geq N$ のとき

$$
\begin{aligned}
\|s_m - s_n\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty} \|a_k\| \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

よって、$\{s_n\}$ は X の Cauchy 列であり、X は完備だから、$\{s_n\}$ は収束する □

Def 13. $\sum_{k=1}^{\infty}\|a_k\|<\infty$ のとき、$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は絶対収束するという

Thm 8. $\left(d'Alembert\text{の判別法}\right)$
$a_n \in X\setminus\{0\},(n\in\mathbb{N})$ とし、極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}=l$ が存在すると仮定する．このとき、

(1) $l<1$ ならば、$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は絶対収束する

(2) $l>1$ ならば、$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は発散する

Proof. (1) $l<r<1$ をみたす r っをとる．$\lim_{n\to\infty}\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}=l$ だから、$p\in\mathbb{N}$ が存在し、$n\geq p$ ならば、$\|a_{n+1}\|\leq\|a_n\|r$
$k\in\mathbb{N}$ に対して、$\|a_{p+k}\|\leq\|a_p\|r^k$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\| &= \sum_{n=1}^{p}\|a_n\|+\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{p+k}\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{p}\|a_n\|+\|a_p\|\sum_{k=1}^{\infty}r^k \\ &<\infty\end{aligned}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}=l>1$ だから、$q\in\mathbb{N}$ が存在し、$n\geq q$ ならば $\|a_{n+1}\|\geq\|a_n\|$
$n\geq q$ のとき $\|a_n\|\geq\|a_q\|>0$ だから、$\{a_0\}$ は 0 に収束しない
よって $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は収束しない □

Thm 9. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束すると仮定する．また、$\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ は全単射とする．
このとき、$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\phi(k)}$ は絶対収束し、$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\phi(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

Proof. $n\in\mathbb{N}$ に対して、$p(n)=\max\{\phi(1),\cdots,\phi(n)\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\|a_{\phi(k)}\right\| &\leq \sum_{l=1}^{p(n)}\|a_l\| \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty}\|a_l\| \\ &<\infty\end{aligned}$$

よって、$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\phi(k)}$ は絶対収束する．
次に、$n\in\mathbb{N}$ に対して、$q(n)=\max\left\{\phi^{-1}(1),\cdots,\phi^{-1}(n)\right\}$ とおくと

$\left\{\phi^{-1}(j) : j = 1, 2, \cdots, n\right\} \subset \{1, 2, \cdots, q(n)\}$ から、$\{1, 2, \cdots, n\} \subset \{\phi(k) : k = 1, 2, \cdots, q(n)\}$
よって

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} - \sum_{l=1}^{n} a_l\right\| &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)} - \sum_{k=1}^{q(n)} a_{\phi(k)}\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{q(n)} a_{\phi(k)} - \sum_{l=1}^{n} a_l\right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\|a_{\phi(k)}\right\| + \sum_{l=n+1}^{\infty} \|a_l\| \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l$ □

e. g. 5. $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ のとき、等比級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は $\dfrac{1}{1-z}$ に収束することを示せ

解. $z \neq 1, n \in \mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$ だから

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| &= \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}\end{aligned}$$

よって、$|z| < 1$ のとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$ □

e. g. 6. $z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1$ のとき、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は収束しないことを示せ

解. $|z| \geq 1$ より、$\left|z^k\right| = |z|^k \geq 1\,(k \in \mathbb{N})$ だから、$\left\{z^k\right\}$ は 0 に収束しない
よって、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ は収束しない □

e. g. 7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \log 2$ を用いて、以下を示せ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

解. $n \in \mathbb{N}, x \neq -1$ に対して、$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \dfrac{1}{1+x} - (-1)^n \dfrac{x^n}{1+x}$
これを x に関して 0 から 1 まで積分すると $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$
ここで、$\displaystyle\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ から、証明終わり □

4 指数関数

e.g. 8. $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束することを示せ

Proof. $z=0$ のときは自明であるから、以下は $z \neq 0$ とする. $a_n = \frac{z^n}{n!}$ とおくと

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

から、d’Alembert の判定法より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は絶対収束する □

e.g. 9. $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ は絶対収束することを示せ

Proof. $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \right| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2k)!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

□

Def 14. $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

e.g. 10. $z \in \mathbb{C}$ に対して、$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を示せ

Proof. $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(iz)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
&= \cos z + i \sin z
\end{aligned}$$

□

Prop 4. $z \in \mathbb{C}$ に対して

(1) $\cos(-z) = \cos z, \sin(-z) = -\sin z$

(2) $\cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

Thm 10. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を複素数列とし

$c_n = \displaystyle\sum_{j+k=n} a_j b_k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と定める．また、$\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ はともに絶対収束すると仮定する

このとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束し、$\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Proof. $\alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|, \beta = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ とおく．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} |c_n| &\leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{j+k=n} |a_j b_k| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} |a_j| |b_k| \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m} |a_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{m} |b_k|\right) \\
&\leq \alpha\beta
\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束する．

また

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{2m} c_n - \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{2m} \sum_{j+k=n} a_j b_k - \left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{k=0}^{m} |a_j| |b_k| + \sum_{k=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{m} |a_j| |b_k| \\
&\leq \beta \sum_{j=m+1}^{2m} |a_j| + \alpha \sum_{k=m+1}^{2m} |b_k| \\
&\xrightarrow{m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{2m} c_n \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)
\end{aligned}$$

□

e.g. 11. $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、$e^z e^w = e^{z+w}$ を示せ

Proof. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

$$
\begin{aligned}
e^z e^w &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n} \frac{z^j w^k}{j!k!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= e^{z+w}
\end{aligned}
$$

□

Prop 5. $0 < r < 1, \theta \in \mathbb{R}$ とする. 以下が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(k\theta) &= \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \\
\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin(k\theta) &= \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}
\end{aligned}
$$

5 関数空間

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{N}$ とする．集合 S 上の $\mathbb{K}$ 値関数全体を $\mathcal{F}(S), (\mathcal{F}(S,\mathbb{K}))$ で表す．すなわち、
$f \in \mathcal{F}(S) \iff f : S \to \mathbb{K}$
$f, g \in \mathcal{F}(S), \alpha \in \mathbb{K}$ に対して $\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \end{cases}$ と定めると、$\mathcal{F}(S)$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる．
また、S 上の有界な関数全体を $\mathcal{B}(S)$ で表す．
すなわち、$f \in \mathcal{F}(S)$ に対して、$f \in \mathcal{B}(S) \iff \sup\{|f(x)| : x \in S\} < \infty$

Prop 6. $\mathcal{B}(S)$ は線形空間 $\mathcal{F}(S)$ の部分空間である．また、$\|f\|_S = \sup\{|f(x)| : x \in S\}$ と定めると、$(\mathcal{B}(S), \|\cdot\|_S)$ はノルム空間となる

Proof. 定数関数 0 は明らかに $\mathcal{B}(S)$ に属する．$f, g \in \mathcal{B}(S)$ とする、$x \in S$ に対して、$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_S + \|g\|_S$. よって $f+g \in \mathcal{B}(S)$ かつ $\|f+g\|_S \leq \|f\|_S + \|g\|_S$
$f \in \mathcal{B}(S), \alpha \in \mathbb{K}$ とする．$x \in S$ に対して

$$\begin{aligned} |(\alpha f)(x)| &= |\alpha f(x)| \\ &= |\alpha|\,|f(x)| \\ &\leq |\alpha|\,\|f\|_S \end{aligned}$$

よって、$\alpha f \in \mathcal{B}(S)$ かつ $\|\alpha f\|_S \leq |\alpha|\,\|f\|_S$
さらに、$\alpha \neq 0$ のとき、$\|f\|_S = \left\|\frac{1}{\alpha}\alpha f\right\|_S \leq \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha f\|_S$
だから $|\alpha|\,\|f\|_S \leq \|\alpha f\|_S$
これは $\alpha = 0$ のときも成り立つので $\|\alpha f\|_S = |\alpha|\,\|f\|_S$
最後に $f \in \mathcal{B}(S)$ に対して、$0 \leq \|f\|_S < \infty$
また、$\|0\|_S = 0$ は明らか．さらに $\|f\|_S = 0$ のとき、$\forall x \in S$ に対して、$|f(x)| \leq \|f\|_S = 0$ だから $f(x) = 0\,(x \in S)$
よって $f = 0$ □

Def 15. $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(S)$

参考文献