Contents

練習問題

1

1.1

(i)

$$(1+2i)\,(2-i) = 2+4i-i+2 = 4+3i \tag{1}$$

$\mathrm{Re} = 4, \mathrm{Im} = 3$

(ii)

$$\frac{i}{1+i} + \frac{1-i}{i} = \frac{i\,(1-i)}{2} - i\,(1-i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - i - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \tag{2}$$

$\mathrm{Re} = -\dfrac{1}{2}, \mathrm{Im} = -\dfrac{1}{2}$

(iii)

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \frac{-2i}{2i} = -1 \tag{3}$$

$\mathrm{Re} = -1, \mathrm{Im} = 0$

1.2

(i)

$\left|1-\sqrt{2}i\right| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$
$\overline{1-\sqrt{2}i} = 1+\sqrt{2}i$
$\dfrac{1}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}i$

(ii)

$\left|-\sqrt{5}+2i\right| = \sqrt{5+4} = 3$
$\overline{-\sqrt{5}+2i} = -\sqrt{5}-2i$
$\dfrac{1}{-\sqrt{5}+2i} = \dfrac{-\sqrt{5}-2i}{9} = -\dfrac{\sqrt{5}}{9} - \dfrac{2}{9}i$

(iii)

$\left|-\dfrac{3}{1+\sqrt{2}i}\right| = \left|-\left(1-\sqrt{2}i\right)\right| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$
$\overline{\dfrac{-3}{1+\sqrt{2}i}} = \overline{-1+\sqrt{2}i} = -1-\sqrt{2}i$
$\dfrac{1}{-\frac{3}{1+\sqrt{2}i}} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}i$

(iv)

$\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{-i\left(1+i\right)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$
$\left|\dfrac{-i}{1+i}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\overline{\dfrac{-i}{1+i}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$
$\dfrac{1}{\frac{-i}{1+i}}=-1+i$

1.3

$z=a+bi$ とする．$\mathrm{Re}z=a,\mathrm{Im}z=b,|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
よって $\sqrt{a^2+b^2}=|a|+|b|$
両辺に平方すると $a^2+b^2=a^2+b^2+2\left|a\right|\left|b\right|\Longrightarrow|a|=0$ または $|b|=0$
よって $z=r\exp\left(i\dfrac{n\pi}{2}\right),r\in\mathbb{R}_{\geq0},n\in\mathbb{Z}$

1.4

$z=a+bi$ とし，$z+\dfrac{1}{z}=a+bi+\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\left(a+\dfrac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)i$
$z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=0\Longleftrightarrow a^2+b^2=1\Longleftrightarrow|z|=1$

1.5

(i)

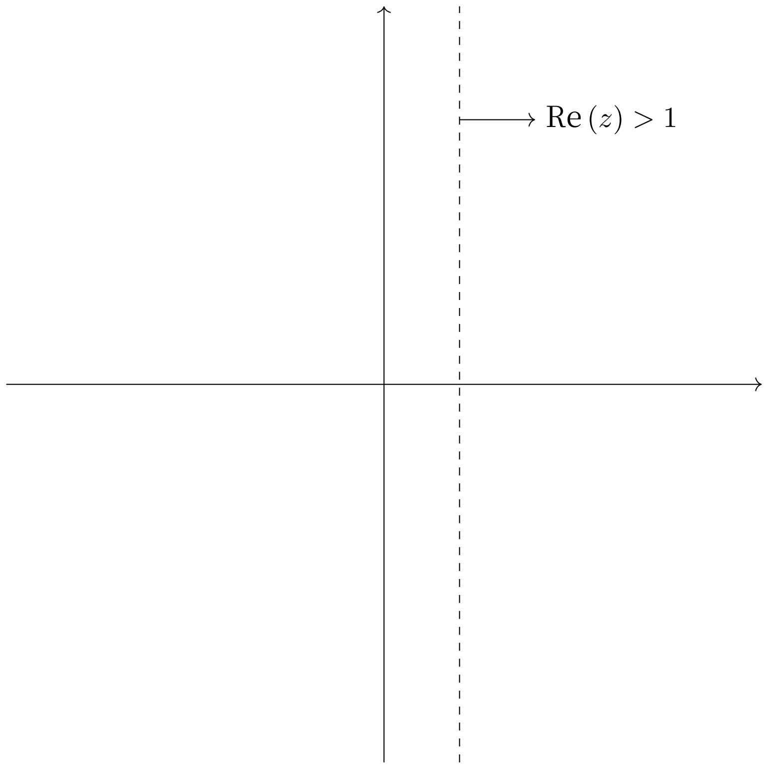
$z=a+bi,w=c+di$ とすると $z\pm w=\left(a\pm c\right)+\left(b\pm d\right)i$ で
$\left|z\pm w\right|^2=\left(a\pm c\right)^2+\left(c\pm d\right)^2=a^2\pm2ac+c^2+b^2\pm2bd+d^2=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\pm2\left(ac+bd\right)=\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\pm2\mathrm{Re}\left(z\overline{w}\right)$

(ii)

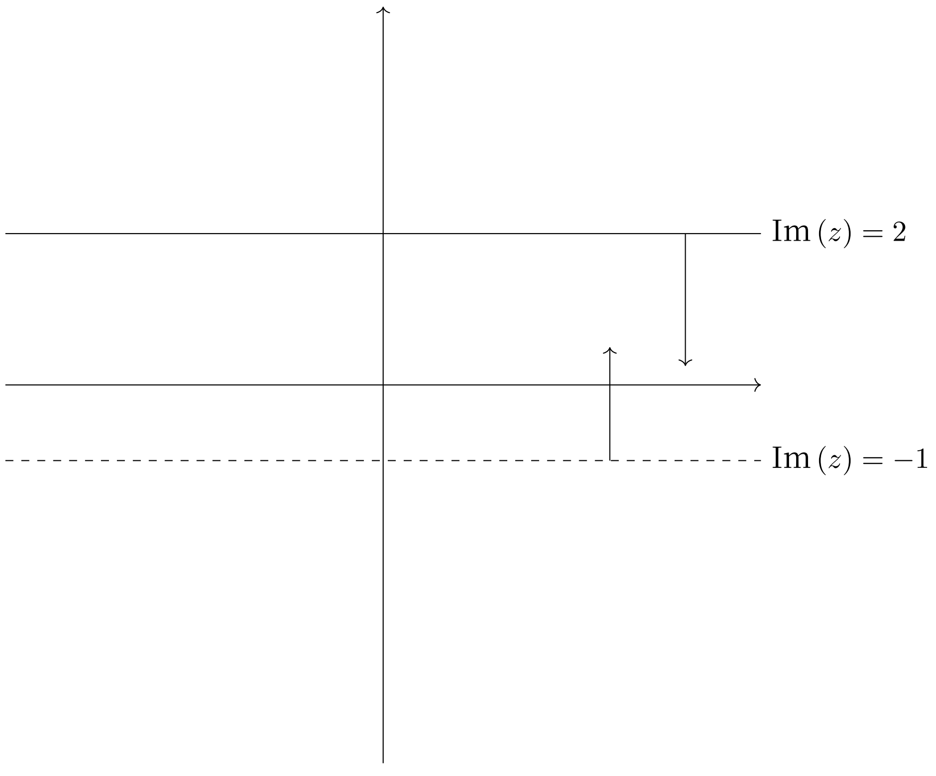
$2\left|z\right|\left|w\right|\leq\dfrac{1}{c}\left|z\right|^2+c\left|w\right|^2$ から，(i) より自明

1.6

(i)

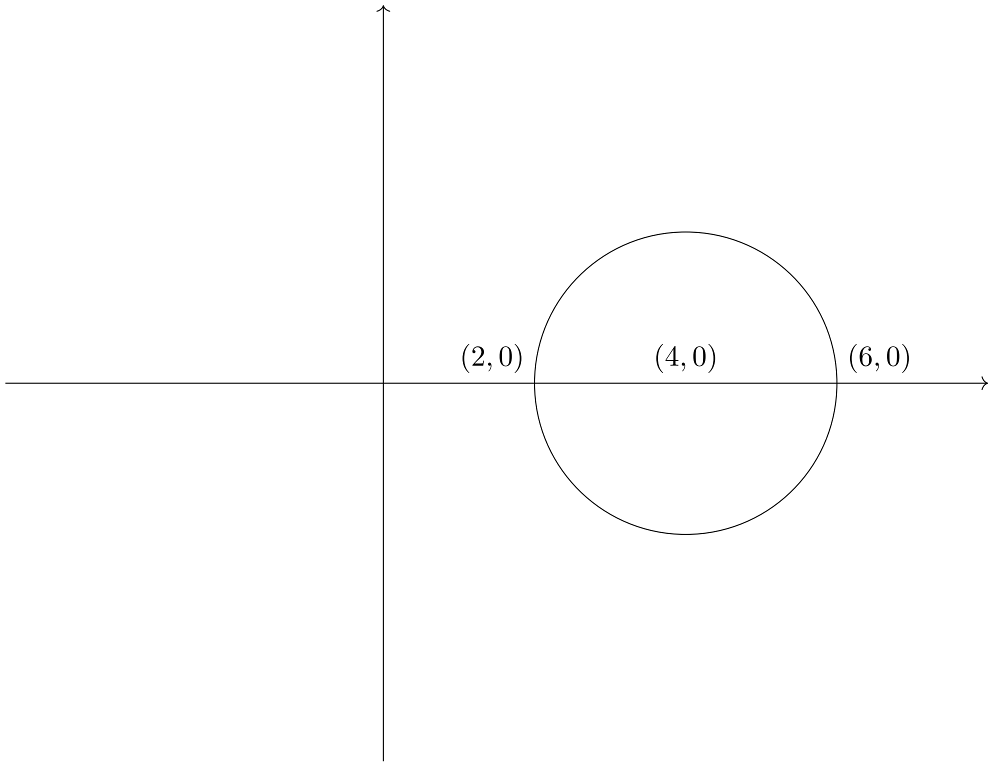


(ii)

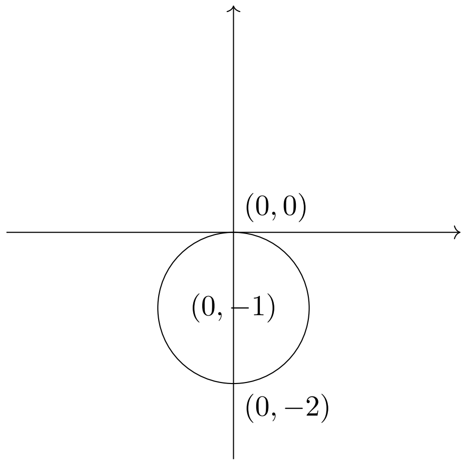


(iii)

$\left|\dfrac{z}{z-3}\right| = 2 \Longrightarrow |z|^2 = 4\,|z-3|^2 \Longrightarrow x^2+y^2 = 4\,(x-3)^2+4y^2 \Longrightarrow 3x^2-24x+36+3y^2=0$
$\Longrightarrow x^2-8x+12+y^2=0 \Longrightarrow (x-4)^2+y^2=4$



(iv)



1.7

(i)

$-1-i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{5}{4}i\pi\right)$

(ii)

$10 + \sqrt{3}i = \sqrt{103}\exp(i\alpha), \cos\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{103}}, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{103}}$

(iii)

$-2 + i = \sqrt{5}\exp(i\beta), \cos\beta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

1.8

領域にならないものは (iv) だけ（$D(i,1) \cap D(-i,1) = \emptyset$）

2

2.1

(1)

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\left(z^2+z+1\right)=3 \tag{4}$$

(2)

$$\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{(z+i)(z-i)} \tag{5}$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{2}i \tag{6}$$

(3)

$$\lim_{z\to i}\frac{z\overline{z}-iz-i\overline{z}-1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(\overline{z}-i)}{(z-i)(z+i)} \tag{7}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{\overline{z}-i}{z+i}=-1 \tag{8}$$

2.2

(1)

$z=x+yi$ とすると，$\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{x-yi}{x+yi}=\begin{cases}\xrightarrow{\text{実軸に沿う}} \frac{x}{x}=1\\ \xrightarrow{\text{虚軸に沿う}} \frac{-y}{y}=-1\end{cases}$ から，$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ は存在しない

(2)

$z=x+yi$ とし，$\dfrac{z\mathrm{Re}\,(iz)}{|z|^2}=\dfrac{-y\,(x+yi)}{x^2+y^2}=-\dfrac{xy}{x^2+y^2}-\dfrac{y^2i}{x^2+y^2}\longrightarrow\begin{cases}\xrightarrow{y=0,x\to 0} 0\\ \xrightarrow{x=0,y\to 0} -i\end{cases}$ から，$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z\mathrm{Re}\,(iz)}{|z|^2}$ は存在しない

(3)

$z=x+yi$ とし，$\dfrac{z\mathrm{Im}\,(\overline{z})}{|z|}=\dfrac{-y\,(x+yi)}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y^2i}{\sqrt{x^2+y^2}}\longrightarrow\begin{cases}\xrightarrow{y=0,x\to 0} 0\\ \xrightarrow{x=0,y\to 0} 0\end{cases}$ から，$\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z\mathrm{Im}\,(\overline{z})}{|z|}=0$

2.3

(1)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n+1} = 3, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 = e^2$ から，
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{n+1}+i\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right) = 3+e^2 i$

(2)

$\sin x \sim x$ から $3n\sin\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3, \frac{n^2}{3n^2+4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ から，$\lim_{n\to\infty}\left(3n\sin\frac{1}{n}+i\frac{n^2}{3n^2+4}\right) = 3+\frac{1}{3}i$

(3)

$n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ から収束しない

2.4

(1)

$n=0$ のとき，$LHS = \frac{1-z}{1-z} = 1 = RHS$
$n=k$ のときが成り立つと仮定すると，$\frac{1-z^{k+1}}{1-z} = 1+z+\cdots+z^k$
$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} RHS &= 1+z+\cdots+z^k+z^{k+1} && (9)\\ &= \frac{1-z^{k+1}}{1-z}+z^{k+1} = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}+\frac{z^{k+1}-z^{k+2}}{1-z} && (10)\\ &= \frac{1-z^{k+2}}{1-z} = LHS && (11)\end{aligned}$$

帰納法の仮定より成り立つ

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \lim_{n\to\infty}(1+z+\cdots+z^n) && (12)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} && (13)\\ &= \frac{1}{1-z} && (14)\end{aligned}$$

3

3.1

(1)

$\forall z_0 \in \mathbb{C}, |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$ から，$\delta = \epsilon$ とすれば，$|\overline{z} - \overline{z_0}| = |z - z_0| < \delta = \epsilon$．よって，$\overline{z}$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である

(2)

$\forall z_0 \in \mathbb{C}, ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$ があるから，$\delta = \epsilon$ とすれば，$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \delta = \epsilon$．よって，$|z|$ は $\mathbb{C}$ 上で連続である

(3)

$z = x + yi$ とすると, $|\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}z_0| = |x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq |z - z_0|$ だから, $\delta = \epsilon$ とすればいい

(4)

(3) と同様に，$|y - y_0| \leq |z - z_0|$ だから，$\delta = \epsilon$ とすればいい

3.2

f は連続であるから, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall z_0 \in D, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ が成り立つ. よって, $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ が成り立ち, $|f|$ は連続である. また, $\mathrm{Re}f$ と $\mathrm{Im}f$ はともに連続であるから, $\overline{f}$ も連続である. ($\left|\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}\right| = \left|\overline{f(z) - f(z_0)}\right| = |f(z) - f(z_0)|$)

3.3

f は $D \subset \mathbb{C}$ で連続であるので，$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall z_0 \in D, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f が D で上界を持たないと仮定すると，$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], s.t. f(x_n) > n$ だから，B-W 定理より，$\{x_n\}$ は部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．すると，この部分列の極限を x とすると，D は閉集合であるから，$x \in D$．連続性より，$\{f(x_{n_k})\} \longrightarrow f(x)$ であるが，$\forall k, f(x_{n_k}) > n_k \geq k$ から，$\{f(x_{n_k})\}$ は発散する．矛盾．よって，f は D で上に有界である．同様に，f は下界もあるから，$|f| := \max\{\sup|f|, \inf|f|\}$ とすれば，最大値を持つ

3.4

(1)

$$(-i)^n = \begin{cases} -i & 1 \equiv n \pmod 4 \\ -1 & 2 \equiv n \pmod 4 \\ i & 3 \equiv n \pmod 4 \\ 1 & 0 \equiv n \pmod 4 \end{cases}$$ から，周期的に振動するので収束しない

(2)

$\dfrac{1}{n+i}=\dfrac{1}{n^2+1}(n-i)\Longrightarrow\left|\dfrac{1}{n-i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$ から，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+i}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n}$ で，発散する

(3)

$\left|\dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\left|\dfrac{n+1}{2n}\right|\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$ から，絶対収束する

3.5

(1)

$\left|\dfrac{z^n}{n\sqrt{n+1}}\right|=\dfrac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}}\stackrel{z\in D}{\leq}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}=:M_n$ とすれば，M-判定法より絶対収束する

(2)

$|z^n|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n,|1-z^n|\geq 1-|z^n|\geq 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geq\dfrac{1}{2}$
$\Longrightarrow\left|\dfrac{z^n}{1-z^n}\right|\leq\dfrac{|z|^n}{1-|z|^n}\leq\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\leq\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=:M_n$ とすれば，M-判定法より絶対収束する

(3)

$\left|\dfrac{1}{n^2+z^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2-R^2}=\dfrac{1}{n^2\left(1-\frac{R^2}{n^2}\right)},n\geq N>R$ から，$\left|\dfrac{R^2}{n^2}\right|<1$
$\Longrightarrow\left|\dfrac{1}{n^2+z^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{n}\right)^{2n}<\infty$ から，一様収束

3.6

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^{3n}\stackrel{b_n:=a_{n+1}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{3n}\stackrel{w=z^3}{=}\sum_{n=0}^{\infty}b_nw^n$
収束半径の定義より，$R=\dfrac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}}$
また，$b_n=a_{n+1}$ から，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}|b_n|^{\frac{1}{n}}=\limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R}$
よって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nw^n$ は $|w|<R$ で収束する．言い換えれば，$\left|z^3\right|<R$ であれば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^{3n}$ は収束する．よって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^{3n}$ の収束半径は $\sqrt[3]{R}$ である

3.7

(1)

$$a_n = \frac{1}{n+1} \Longrightarrow r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n+1}\right| = 1$$

(2)

$$a_n = \frac{(1+i)^2}{n^2} \Longrightarrow r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{2n^2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3)

$$a_n = \frac{(-i)^n}{(2n+1)!} \Longrightarrow r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(2n+3)(2n+2)\,i\right| = \infty$$

4

4.1

(1)

$f(z) = 3z^2 - iz$

$$\lim_{z\to 2i} \frac{f(z) - f(2i)}{z - 2i} = \lim_{z\to 2i} \frac{3z^2 - iz + 10}{z - 2i} \tag{15}$$
$$= \lim_{z\to 2i} \frac{(z - 2i)(3z + 5i)}{z - 2i} \tag{16}$$
$$= \lim_{z\to 2i} (3z + 5i) = 11i \tag{17}$$

(2)

$f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

$$\lim_{z\to i} \frac{f(z) - f(i)}{z - i} = \lim_{z\to i} \frac{\frac{1+z}{1-z} - \dfrac{1+i}{1-i}}{z - i} \tag{18}$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{\frac{1+z}{1-z} - i}{z - i} \tag{19}$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{1 + z - i(1-z)}{(1-z)(z-i)} \tag{20}$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{(z-i)(1+i)}{(1-z)(z-i)} \tag{21}$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{1+i}{1-z} = \frac{1+i}{1-i} = i \tag{22}$$

(3)

$f(z) = \dfrac{2z+3i}{z-i}$

$$\lim_{z\to 1-4i} \frac{f(z) - f(1-4i)}{z - (1-4i)} = \lim_{z\to 1-4i} \frac{2z + 3i - \frac{27}{26} - \frac{5}{26}i}{z^2 + (-1+3i)z + 4 + i} \tag{23}$$
$$= \lim_{z\to 1-4i} \frac{(z - 1 + 4i)\left(\frac{25}{26} - \frac{5}{26}i\right)}{(z - 1 + 4i)(z - i)} \tag{24}$$
$$= \lim_{z\to 1-4i} \frac{\frac{25}{26} - \frac{5}{26}i}{z - i} \tag{25}$$
$$= \left(\frac{25}{26} - \frac{5}{26}i\right) \cdot \frac{1}{1 - 5i} = \frac{25}{338} + \frac{30}{169}i \tag{26}$$

(4)

$f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+z}$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to -i} \frac{f(z) - f(-i)}{z+i} &= \lim_{z \to -i} \frac{\frac{z^2+1}{z^2+z}}{z+i} && (27)\\
&= \lim_{z \to -i} \frac{z-i}{z^2+z} && (28)\\
&= \frac{-2i}{-1-i} = 1+i && (29)
\end{aligned}$$

4.2

(1)

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(3z^2 - 2z + 4\right) = 6z - 2$

(2)

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((2i+1)z^3 + (3i-2)z\right) = 3(1+2i)z^2 + (3i-2)$

(3)

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right) = \dfrac{(i-z)+(i+z)}{(i-z)^2} = \dfrac{2i}{(i-z)^2}$

4.3

1. $n=0$ のとき，$z^0 \equiv 1 \Longrightarrow \left(z^0\right)' = 0 = 0 \cdot z^{-1}$
2. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき，$\left(z^1\right)' = 1 = 1 \cdot z^0$，$n=k$ も成立すると仮定すると，$\left(z^k\right)' = kz^{k-1}$ で，$n = k+1$ のとき，$\left(z^{k+1}\right)' = (z \cdot z^n) = 1 \cdot z^n + z \cdot nz^{n-1} = (n+1)z^n$，よって，帰納法より成立
3. $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ のときは，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ のときと同じであるから，略

4.4

$z = x + yi$ とする

(1)

$f(z) = \overline{z} = x - yi \overset{C-R}{\Longrightarrow} \begin{cases} u_x = 1, u_y = 0 \\ v_x = 0, v_y = -1 \end{cases}$ から，$u_x = 1 \neq v_y = -1$．よって，微分可能でない

(2)

$f(z) = \mathrm{Re}z = x \overset{C-R}{\Longrightarrow} \begin{cases} u_x = 1, u_y = 0 \\ v_x = 0, v_y = 0 \end{cases}$ から，$u_x = 1 \neq v_y = 0$．よって，微分可能でない

(3)

$f(z) = \mathrm{Im}z = y \overset{C-R}{\Longrightarrow} \begin{cases} u_x = 0, u_y = 0 \\ v_x = 0, v_y = 1 \end{cases}$ から，$u_x = 0 \neq v_y = 1$．よって，微分可能でない

4.5

$z = x + yi$ とすると

$$f(z) = \frac{(\overline{z})^2}{z} = \frac{(x - yi)^2}{x + yi} \tag{30}$$
$$= \frac{x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i}{x^2 + y^2} \tag{31}$$
$$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i\frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} \tag{32}$$

$\begin{cases} u_x = \dfrac{x^4 + 6x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^2}, u_y = -\dfrac{8x^3y}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_x = -\dfrac{8xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, v_y = \dfrac{-3x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$

$x = 0, y \to 0$ と $y = 0, x \to 0$ とすると，$u_x = 0 = v_y, u_y = 0 = -v_x$ から，$C - R$ 式がみたす

定義より，$f'(0) = \lim_{z \to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}^2}{z^2}$ で，$z = re^{i\theta}$ とすると，極限の結果は θ に依存するので，角度にのより異なる値になるから，原点では微分できない

4.6

$z = x + yi, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする．f は正則なので，$u_x = v_y, u_y = -v_x$

$g(z) = \overline{f(z)} = \overline{u(x, y) + iv(x, y)} = u(x, y) - iv(x, y)$ で

$\begin{cases} u'(x, y) := u(x, y) \\ v'(x, y) := -v(x, y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_x = u_x = v_y = -v'_y \\ u'_y = u_y = -v_x = v'_x \end{cases}$

4.7

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \tag{33}$$
$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r \sin\theta + u_y r \cos\theta \tag{34}$$
$$v_r = v_x x_r + v_y y_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \tag{35}$$
$$v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta = -v_x r \sin\theta + v_y r \cos\theta \tag{36}$$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}, \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

4.8

(1)

$u_x = 2x - 6y, u_y = -6x - 2y, v_x = 2y + 6x, v_y = 2x - 6y \Longrightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$ から，整関数である

(2)

$u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y, v_y = e^x \cos y \Longrightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$ から，整関数である

5

5.1

(1)

$$r = = \lim n \to \infty \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{37}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \tag{38}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{39}$$

$$f'(z) = 0 + 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z) \tag{40}$$

(2)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{41}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1 \tag{42}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) z^n = 2 + 3z + 4z^2 + 5z^3 + \cdots \tag{43}$$

$$f'(z) = 0 + 3 + 8z + 15z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) z^{n-1} \tag{44}$$

(3)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{45}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) = \infty \tag{46}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \tag{47}$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n)!} z^{2n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \tag{48}$$

(4)

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{49}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+3)(2n+2) = \infty \tag{50}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \tag{51}$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{52}$$

5.2

(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z} &(53)\\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right) &(54)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+m=n} 1\right) z^n &(55)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} &(56)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{57}
$$

は $D\,(0,1)$ で正則であるから，項別微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} &(58)\\
\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} &(59)
\end{aligned}
$$

5.3

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-z_0+z_0)} &= \frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} &(60)\\
&= \frac{1}{1-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} &(61)
\end{aligned}
$$

から，$\left|\dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n &(62)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} &(63)
\end{aligned}
$$

で，$\dfrac{1}{(1-z)^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}\right) && (64)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(z-z_0)^{n-1}}{(1-z_0)^{n+1}} && (65)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,(z-z_0)^{n}}{(1-z_0)^{n+2}} && (66)
\end{aligned}
$$

6

6.1

(1)

$$e^z = 1 + i = \sqrt{2} \exp\left(i\left(2n\pi + \frac{1}{4}\pi\right)\right) \tag{67}$$

$$z = \ln\sqrt{2} + i\left(2n\pi + \frac{1}{4}\pi\right) \tag{68}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(2n\pi + \frac{1}{4}\pi\right) \tag{69}$$

(2)

$$e^{2z} = 1 + \sqrt{3}i = 2\exp\left(i\left(2n\pi + \frac{1}{3}\pi\right)\right) \tag{70}$$

$$2z = \ln 2 + i\left(2n\pi + \frac{1}{3}\pi\right) \tag{71}$$

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(n\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \tag{72}$$

(3)

$$e^{3z} + \left(1 - \sqrt{3}i\right)e^z = 0 \tag{73}$$

$$e^z\left(e^{2z} + \left(1 - \sqrt{3}i\right)\right) = 0 \tag{74}$$

$$e^{2z} = -1 + \sqrt{3}i = 2\exp\left(i\left(2n\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \tag{75}$$

$$2z = \ln 2 + i\left(2n\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \tag{76}$$

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(n\pi + \frac{1}{3}\pi\right) \tag{77}$$

(4)

$$e^{4z} - ie^{2z} = 0 \tag{78}$$

$$e^{2z}\left(e^{2z} - i\right) = 0 \tag{79}$$

$$e^{2z} = i = \exp\left(i\left(2n\pi + \frac{1}{2}\pi\right)\right) \tag{80}$$

$$2z = i\left(2n\pi + \frac{1}{2}\pi\right) \tag{81}$$

$$z = i\left(n\pi + \frac{1}{4}\pi\right) \tag{82}$$

6.2

$\forall z \in \mathbb{C}, z := x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ とすると

$$\left|e^z\right| = \left|e^{x+yi}\right| = \left|e^x e^{yi}\right| = \left|e^x\right| \cdot \left|e^{yi}\right| = e^x \cdot 1 = e^x = e^{\mathrm{Re} z} \tag{83}$$
$$e^{\mathrm{Re}\left(z^2\right)} = e^{\mathrm{Re}\left(x^2-y^2+2xyi\right)} = e^{x^2-y^2} \le e^{x^2+y^2} = e^{|z|^2} \tag{84}$$

から

$$\left|e^{z^2}\right| = e^{\mathrm{Re}\left(z^2\right)} \le e^{|z|^2} \tag{85}$$

6.3

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{86}$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{87}$$
$$|\sin(x+yi)|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \tag{88}$$
$$= \sin^2 x \left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y \tag{89}$$
$$= \sin^2 x + \sinh^2 y \tag{90}$$
$$|\cos(x+yi)|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \tag{91}$$
$$= \cos^2 x \left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y \tag{92}$$
$$= \cos^2 x + \sinh^2 y \tag{93}$$

で，$\sin^2 x, \cos^2 x \le 1$ より，$\begin{cases} |\sin z|^2 \le 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y \\ |\cos z|^2 \le 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y \end{cases}$ であり，$z = x + yi \in \overline{D(0, R)}$ であるから，$|y| \le R$ となる．よって，$\max\{|\sin z|, |\cos z|\} \le \cosh R$

6.4

(1)

$$\sin 2z = 0 \tag{94}$$
$$\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 0 \tag{95}$$
$$e^{2iz} = e^{-2iz} \tag{96}$$
$$e^{4iz} = 1 = \exp(2n\pi i) \tag{97}$$
$$4iz = 2n\pi i \tag{98}$$
$$z = \frac{n\pi}{2} \tag{99}$$

(2)

$$\sin z = -1 \tag{100}$$
$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -1 \tag{101}$$
$$e^{iz} - e^{-iz} = -2i \tag{102}$$
$$e^{2iz} + 2ie^{iz} - 1 = 0 \tag{103}$$
$$\left(e^{iz} + i\right)^2 = 0 \tag{104}$$
$$e^{iz} = -i = \exp\left(i\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) \tag{105}$$
$$iz = i\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \tag{106}$$
$$z = 2n\pi + \frac{3\pi}{2} \tag{107}$$

(3)

$$\cos(-z) = 3 \tag{108}$$
$$\frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = 3 \tag{109}$$
$$e^{2iz} - 6e^{iz} + 1 = 0 \tag{110}$$
$$e^{iz} = 3 \pm 2\sqrt{2} = \exp\left(\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + 2n\pi i\right) \tag{111}$$
$$iz = \ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + 2n\pi i \tag{112}$$
$$z = -i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + 2n\pi \tag{113}$$

(4)

$$\cos(z + i) = 0 \tag{114}$$
$$\frac{e^{i(z+i)} + e^{-i(z+i)}}{2} = 0 \tag{115}$$
$$e^{iz-1} + e^{-(iz-1)} = 0 \tag{116}$$
$$e^{2iz-2} = -1 = \exp(i(2n\pi + \pi)) \tag{117}$$
$$2iz - 2 = i(2n\pi + \pi) \tag{118}$$
$$z = -i + \left(n\pi + \frac{1}{2}\pi\right) \tag{119}$$

(5)

$$\begin{aligned}
\cosh z &= i && (120)\\
\frac{e^z + e^{-z}}{2} &= i && (121)\\
e^{2z} - 2ie^z + 1 &= 0 && (122)\\
e^z &= \left(1 \pm \sqrt{2}\right) i = \exp\left(\ln\left(1 \pm \sqrt{2}\right) + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) && (123)\\
z &= \ln\left(1 \pm \sqrt{2}\right) + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) && (124)
\end{aligned}$$

6.5

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y && (125)\\
\cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y && (126)\\
|\sin(x + yi)|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y && (127)\\
&= \sin^2 x \left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y && (128)\\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y && (129)\\
|\cos(x + yi)|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y && (130)\\
&= \cos^2 x \left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y && (131)\\
&= \cos^2 x + \sinh^2 y && (132)
\end{aligned}$$

7

7.1

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Log}(-x) &= \ln|-x| + i\arg(-x) && (133)\\
&= \ln x + i\pi && (134)
\end{aligned}
$$

7.2

(1)

$z = -e^{i} = e^{i(\pi+1)}$ から，$\arg z = \pi + 1 + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$ で

$$
\begin{aligned}
\log z &= \ln|z| + i\arg z = \ln 1 + i(\pi + 1 + 2n\pi) && (135)\\
&= i(\pi+1) && (136)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}(\log z) = 0, \mathrm{Im}(\log z) = \pi + 1 + 2n\pi$

(2)

$z = 1 + i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{1}{4}i\pi\right)$ から，$\arg z = \frac{1}{4}\pi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$ で

$$
\begin{aligned}
\log z &= \ln|z| + i\arg z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{1}{4}\pi + 2n\pi\right) && (137)\\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{1}{4}\pi + 2n\pi\right) && (138)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}(\log z) = \frac{1}{2}\ln 2, \mathrm{Im}(\log z) = \frac{1}{4}\pi + 2n\pi$

(3)

$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\exp\left(i\frac{2}{3}\pi\right)$ から，$\arg z = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$ で

$$
\begin{aligned}
\log z &= \ln|z| + i\arg z = \ln 2 + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) && (139)\\
&= \ln 2 + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) && (140)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}(\log z) = \ln 2, \mathrm{Im}(\log z) = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$

7.3

(1)

$$
\begin{aligned}
2^{i} &= e^{i\log 2} && (141)\\
&= \cos(\log 2) + i\sin(\log 2) && (142)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}\left(2^{i}\right) = \cos(\log 2), \mathrm{Im}\left(2^{i}\right) = \sin(\log 2)$

(2)

$$
\begin{aligned}
(1+i)^i &= e^{i\log(1+i)} && (143)\\
&= \exp\left(i\log\left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) && (144)\\
&= \exp\left(i\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)\right) && (145)\\
&= \exp\left(i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right) && (146)\\
&= e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right) && (147)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}\left((1+i)^i\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right), \mathrm{Im}\left((1+i)^i\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)$

(3)

$$
\begin{aligned}
i^{\frac{1}{2}} &= \exp\left(\frac{1}{2}\log i\right) && (148)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right) && (149)\\
&= \exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) && (150)\\
&= \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) && (151)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} && (152)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}\left(i^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{Im}\left(i^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)

$$
\begin{aligned}
\log\left(i^i\right) &= \log\left(e^{i\log i}\right) && (153)\\
&= \exp\left(i\log\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right) && (154)\\
&= e^{-\frac{\pi}{2}} && (155)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}\left(\log\left(i^i\right)\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}, \mathrm{Im}\left(\log\left(i^i\right)\right)=0$

(5)

$$
\begin{aligned}
\left(e^{i\pi}\right)^i &= (-1)^i && (156)\\
&= e^{i\log(-1)} && (157)\\
&= \exp\left(i\log\left(e^{i\pi}\right)\right) && (158)\\
&= e^{-\pi} && (159)
\end{aligned}
$$

から，$\mathrm{Re}\left(\left(e^{i\pi}\right)^i\right)=e^{-\pi}, \mathrm{Im}\left(\left(e^{i\pi}\right)^i\right)=0$

8

8.1

(1)

$$\int_{-2}^{1} t\left(t^2-2i\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4 - it^2\right]_{-2}^{1} \tag{160}$$

$$= -\frac{15}{4} + 3i \tag{161}$$

から，$\mathrm{Re} = -\frac{15}{4}, \mathrm{Im} = 3$

(2)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{it}\mathrm{d}t = \left[-ie^{it}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tag{162}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \tag{163}$$

から，$\mathrm{Re} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{Im} = \frac{1}{2}$

(3)

$$\int_{0}^{1} \sin(it)\mathrm{d}t = \left[i\cos(it)\right]_{0}^{1} \tag{164}$$

$$= i\cos i - i \tag{165}$$

$$= (\cosh 1 - 1)\, i \tag{166}$$

から，$\mathrm{Re} = 0, \mathrm{Im} = \cosh 1 - 1$

8.2

(1)

$$\int_{C_1} \left(z^2 + i\overline{z}\right)\mathrm{d}z = \int_{0}^{1} \left((3+4i)\,t^2 + (1+2i)\,t\right)(2+i)\,\mathrm{d}t \tag{167}$$

$$= \int_{0}^{1} \left((2+11i)\,t^2 + 5it\right)\mathrm{d}t \tag{168}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(2+11i)\,t^3 + \frac{5}{2}it^2\right]_{0}^{1} \tag{169}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{37}{6}i \tag{170}$$

$$\int_{C_2} \left(z^2 + i\overline{z}\right)\mathrm{d}z = \int_{0}^{1} \left(i\left((it)^2 + i(-it)\right) + 2\left((2t)^2 + i(2t)\right)\right)\mathrm{d}t \tag{171}$$

$$= \int_{0}^{1} \left((8-i)\,t^2 + 5it\right)\mathrm{d}t \tag{172}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(8-i)\,t^3 + \frac{5}{2}it^2\right]_{0}^{1} = \frac{8}{3} + \frac{13}{6}i \tag{173}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \left(z^2 + i\overline{z}\right) \mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} t^2 + ie^{i\frac{\pi}{4}} t\right) \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t && (174) \\
&= \int_0^1 \left(e^{-i\frac{3}{4}\pi} t^2 + it\right) \mathrm{d}t && (175) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{3-\sqrt{2}}{6} i && (176) \\
\int_{C_2} \left(z^2 + i\overline{z}\right) \mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(t^2 + it + \left(e^{-i\frac{\pi}{2}t} + ie^{i\frac{\pi}{4}t}\right) \cdot \left(-i\frac{\pi}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}t}\right)\right) \mathrm{d}t && (177) \\
&= \int_0^1 \left(t^2 + it - i\frac{\pi}{4} e^{-i\frac{3}{4}\pi t} + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}t && (178) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{3-\sqrt{2}}{6} i && (179)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \left(z^2 + i\overline{z}\right) \mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(2\left((2t-1-i)^2 + i\left(2t-1+i\right)\right)\right) \mathrm{d}t && (180) \\
&= \int_0^1 \left(8t^2 - (8+4i)\,t + (-2+2i)\right) \mathrm{d}t && (181) \\
&= -\frac{10}{3} && (182) \\
\int_{C_2} \left(z^2 + i\overline{z}\right) \mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(\left(e^{2i\pi t} + i\left(-e^{-i\pi t}\right)\right) \cdot \left(-i\pi e^{i\pi t}\right)\right) \mathrm{d}t && (183) \\
&= \int_0^1 \left(-i\pi e^{3i\pi t} - \pi\right) \mathrm{d}t && (184) \\
&= \left[-\frac{1}{3} e^{3i\pi t} - \pi t\right]_0^1 && (185) \\
&= \frac{2}{3} - \pi && (186)
\end{aligned}$$

8.3

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} |z| \,\mathrm{d}z &= \int_{-1}^1 |t| \cdot i\mathrm{d}t && (187) \\
&= i\left(\int_{-1}^0 (-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\mathrm{d}t\right) && (188) \\
&= i && (189)
\end{aligned}$$

(2)

$$\int_{\gamma_2} |z|\,\mathrm{d}z = \int_0^3 |t-2| \cdot i\mathrm{d}t \tag{190}$$
$$= i\left(\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^3\right) \tag{191}$$
$$= \frac{5}{2}i \tag{192}$$

(3)

$$\int_{\gamma_3} |z|\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,(1+i)\int_{-1}^2 |t|\,\mathrm{d}t \tag{193}$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{2}\,(1+i) \tag{194}$$

8.4

$f\,(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ とすると

$$|f\,(z)| = \left|\frac{\sin z}{z^2}\right| \tag{195}$$
$$= |\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| \tag{196}$$
$$\leq \frac{\left|e^{iz}\right| + \left|e^{-iz}\right|}{2} \tag{197}$$
$$\leq e \tag{198}$$

から，$\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z\right| \leq e \cdot 2\pi = 2\pi e$

8.5

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{2i}\overline{z}\mathrm{d}z = 2i\iint_D \frac{1}{2i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{199}$$
$$= ac \tag{200}$$
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{2i}\overline{z}\mathrm{d}z = 2i\iint_{D'} \frac{1}{2i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{201}$$
$$= \pi r^2 \tag{202}$$

9

9.1

$\displaystyle\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = F(w_1) - F(w_0)$ より

$$\int \gamma z^n \mathrm{d}z = \left[\frac{1}{n+1}z^{n+1}\right]_{w_0}^{w_1} \tag{203}$$
$$= \frac{w_1^{n+1}}{n+1} - \frac{w_0^{n+1}}{n+1} \tag{204}$$

9.2

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z = 0, \mathrm{Re}z \leq 0\}, z_0 := 1$ とすれば，z_0 と z を結ぶ線分は負の実軸を横切らないから，その線分は $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z = 0, \mathrm{Re}z \leq 0\}$ に含まれる．よって，星型領域である

$$\int_\gamma \frac{1}{w}\mathrm{d}w = \int_1^{|z|} \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{arc} \frac{1}{w}\mathrm{d}w \tag{205}$$
$$= \ln|z| + i\mathrm{Arg}z \tag{206}$$

から，$\mathrm{Log}z = \displaystyle\int_\gamma \frac{1}{w}\mathrm{d}w$

9.3

(1)

$z^2 - 4z + 8 = 0 \implies z = 2 \pm 2i$ で，$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} > 2$ から，特異点は $\gamma_1(t) = 2e^{2i\pi t} \quad (t \in [0,1])$ の外にある．よって，Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z}{z^2 - 4z + 8}\mathrm{d}z = 0$

(2)

$(1+z^2)\sin z = 0 \implies z = 0, \pi, \pm i$ で，$2+i$ への距離は $\sqrt{2}$ より大きいから，すべての特異点は $\gamma_2 = (2+i) + \sqrt{2}e^{2\pi it} \quad (t \in [0,1])$ の外にある．よって，Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\mathrm{d}z = 0$

9.4

$\gamma(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{it} \quad (0 \leq t \leq \pi)$ であるから，$D := \{\gamma(t)$ と $[0,1]$ で囲む領域$\}$ とおくと，$\dfrac{1}{z^2+1}$ の特異点は $z = \pm i$ より，$\dfrac{1}{z^2+1}$ は D 上正則である．よって，Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = 0$ で，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = [\arctan z]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ より，$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{4}$

9.5

$g(t) := f(\eta + t(\xi - \eta)) \quad (0 \leq t \leq 1)$ とおくと，$g(0) = f(\eta)$ で，$g(1) = f(\xi)$ である．また，$g(t)$ を t で微分すると

$$g'(t) = f'(\eta + t(\xi - \eta)) \cdot (\xi - \eta) \tag{207}$$

$$\int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t = g(1) - g(0) = f(\xi) - f(\eta) \tag{208}$$

10

10.1

(1)

$(z-1)^3$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから，Cauchy の積分定理より

$$\int_\gamma (z-1)^3 \, \mathrm{d}z = 0 \tag{209}$$

(2)

$(2z+i)^2$ は $\mathbb{C}$ で正則であるから，Cauchy の積分定理より

$$\int_\gamma (2z+i)^2 \, \mathrm{d}z = 0 \tag{210}$$

(3)

$\dfrac{1}{1+z}$ の特異点は $z=-1$ であり，$\gamma(t)=2e^{it}$ の内部にあるから，Cauchy の積分公式より

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z} \mathrm{d}z = 2\pi i \tag{211}$$

(4)

$$\int_\gamma \frac{1}{(3z-i)^5} \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{3^5\left(z-\frac{1}{3}i\right)^5} \mathrm{d}z \tag{212}$$

から，補題 10.9 より，$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(3z-i)^5} \mathrm{d}z = 0$

10.2

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f_n(z) \, \mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_R} \frac{a_k}{z^k} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} h(z) \, \mathrm{d}z & (213)\\ &= a_1 \cdot (2\pi i) + 0 + \cdots + 0 + 0 & (214)\\ &= 2\pi i a_1 & (215)\end{aligned}$$

で

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_R} \lim_{n\to\infty} f_n(z) \, \mathrm{d}z & (216)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_R} f_n(z) \, \mathrm{d}z & (217)\\ &= 2\pi i a_1 & (218)\end{aligned}$$

10.3

$\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$ であり，$\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ から

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\gamma_r} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \mathrm{d}z \tag{219}$$

$$\leq \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{r}\mathrm{d}z \tag{220}$$

$$< 2\pi r \cdot \frac{\epsilon}{r} = 2\pi\epsilon \tag{221}$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$

11

11.1

(1)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-i)\cdot\left(1-\frac{z-i}{1-i}\right)} && (222)\\
&= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n && (223)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} && (224)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{(2+i)\left(1-\dfrac{z+i}{2+i}\right)} && (225)\\
&= -\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n && (226)\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}} && (227)
\end{aligned}
$$

11.2

f,g は正則かつ $n-1$ 次まで導関数が 0 であるから

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} + \cdots && (228)\\
&= (z-z_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + O(z-z_0)\right) && (229)\\
g(z) &= \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{g^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} + \cdots && (230)\\
&= (z-z_0)^n\left(\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} + O(z-z_0)\right) && (231)\\
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + O(z-z_0)\right)}{(z-z_0)^n\left(\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!} + O(z-z_0)\right)} && (232)\\
&= \frac{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}{\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} && (233)
\end{aligned}
$$

11.3

(1)

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{z} = \lim_{z\to 0} 2ie^{2iz} \tag{234}$$
$$= 2i \tag{235}$$

(2)

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos(\pi iz)-1}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{-\pi i\sin(\pi iz)}{2z} \tag{236}$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{\pi^2\cos(\pi iz)}{2} \tag{237}$$
$$= \frac{\pi^2}{2} \tag{238}$$

(2)

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - e^{iz}}{\sin(\pi iz)} = \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z - ie^{iz}}{\pi i\cos(\pi iz)} \tag{239}$$
$$= -\frac{1}{\pi} \tag{240}$$

11.4

(1)

$\dfrac{z^3}{z+i}$ の特異点は $z=-i$ で，$|\gamma|=2$ の内部にあるから，$f(z)=z^3$ とすると，Cauchy の積分公式より

$$\int_{|\gamma|=2}\frac{z^3}{z+i}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot f(-i) = -2\pi \tag{241}$$

(2)

$\dfrac{z}{(z+1)(z-3)}$ の特異点は $z=-1,3$ で，$|\gamma|=2$ の内部に $z=-1$ があるから，$f(z)=\dfrac{z}{z-3}$ とすると，Cauchy の積分公式より

$$\int_{|\gamma|=2}\frac{z}{(z+1)(z-3)}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot f(-1) = -\frac{1}{2}\pi i \tag{242}$$

(3)

$\dfrac{\sin z}{z^2+1}$ の特異点は $z=\pm i$ で，$|z-i|=1$ の内部に $z=i$ があるから，$f(z)=\dfrac{\sin z}{z+i}$ とすると，Cauchy の積分公式より

$$\int_{|z-i|=1}\frac{\sin z}{z^2+1}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot f(i) = \pi\sin i \tag{243}$$

11.5

(1)

Cauchy の積分公式より

$$\int_{|\gamma|=2} \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^4} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(1) \tag{244}$$

$$= \frac{1}{3}\pi i \cdot \pi^3 = \frac{1}{3}\pi^4 i \tag{245}$$

(2)

$$\int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z-2i)} \mathrm{d}z = 2\pi i f^{(1)}(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi i \tag{246}$$

(3)

$$\int_{|z+2i|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f^{(1)}(i) = -\frac{\pi}{2} e^{-i}(1+i) \tag{247}$$

12

12.1

長方形 R を有界閉領域とする，f は R 上正則であるから，f は R 上連続である．よって，R 上で最大値・最小値をとる．また，$|f(z)|$ が R での最大値を M とすると，周期性より，$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z_0 \in R, s.t. f(z) = f(z_0)$ である．よって，$f(z)$ は有界な整関数である．Liouville の定理より，f は定数関数である．

12.2

f は整関数であるから，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で書き，ここで $a_n := \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ で，Cauchy 不等式より，$M(R) := \displaystyle\max_{|z|=R} |f(z)|$ とおくと，$|a_n| \leq \dfrac{M(R)}{R^n}$ となり，$|f(z)| \leq C_1 + C_2 |z|^N$ であるから，$|z| = R$ のとき，$M(R) \leq C_1 + C_2 R^N$ である．よって

$$|a_n| \leq \frac{C_1 + C_2 R^N}{R^n} = \frac{C_1}{R^n} + C_2 R^{N-n} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{248}$$

よって，$\forall n > N, a_n = 0$ であるから，f は高々 N 次多項式である．

12.3

f は一様連続な整関数であるから，$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |f(z_1) - f(z_2)| \overset{|z_1 - z_2| \to 0}{\longrightarrow} 0$ があり，$f'(z)$ は有界である．また，$f'(z)$ も整関数であるから，Liouville の定理より，$f'(z)$ は定数関数であり，$f(z)$ は高々 1 次多項式である．

12.4

$f(z)$ は D で零点を持たないと仮定すると，$g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ は D 上で正則である．また，最大値の原理より，$|f(z)|$ は ∂D で最大値 M を取るから，$\forall z \in D, |f(z)| \leq M$．すると，$g(z)$ は ∂D で $|g(z)| = \dfrac{1}{M}$ で，最大値の原理より，$\forall z \in D, |g(z)| \leq \dfrac{1}{M}$ がある．よって，$\dfrac{1}{|f(z)|} \leq \dfrac{1}{M} \Longrightarrow |f(z)| \geq M$ となる，矛盾．よって，f は D で零点を持つ

12.5

$g(z) = e^{f(z)}$ とおくと，$f(z)$ は整関数であるから，$g(z)$ も整関数である．また，$f(z) := u(z) + v(z)i$ とおくと，$|g(z)| = \left|e^{u+iv}\right| = e^u$
$\mathrm{Re} f(z) = u(z) < M$ であるから，$|g(z)| = e^{u(z)} \leq e^M$ から，$g(z)$ は有界な整関数である．Liouville の定理より，$g(z)$ は定数関数で K とする．よって．$e^{f(z)} = K$ で，$f(z)$ も定数関数である

12.6

(1)

$z - 3 = 0 \Longrightarrow z = 3 > 1$ から，∂D で最大値をとる．よって，$|2z+1|^2 = 4|z|^2 + 4\mathrm{Re}(z) + 1$ と $|z-3|^2 = |z|^2 - 6\mathrm{Re}(z) + 9$ より，$z = x + yi$ とおくと，$h(x) = \sqrt{\dfrac{|2z+1|^2}{|z-3|^2}} = \dfrac{5+4x}{10-6x}$ の最大

値は $x=1$ でとる．よって，$\left|\frac{2z+1}{z-3}\right|_{max}=\frac{3}{2}$

(2)

$|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}$ から，$|e^z|\le e^1=e$

(3)

$|\cos(x+yi)|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$ より，最大値は $x=0, y=\pm 1$ でとる．よって，$|\cos z|_{max}=\cosh 1$

(4)

$|z(z-1)(z-2)|=|z|\cdot|(z-1)(z-2)|=|(z-1)(z-2)|$ から，$1,2$ への距離が最大となる点で最大値をとる．よって，$|z(z-1)(z-2)|_{max}=|z(z-1)(z-2)|_{z=-1}=6$

12.7

$f(z)$ は正則であるから，$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t$ で，両辺に実部を取ると

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(f(z_0)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t\right) && (249)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(f\left(z_0+re^{it}\right)\right)\mathrm{d}t && (250)\end{aligned}$$

同様に，虚部もとると

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(f(z_0)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t\right) && (251)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\left(f\left(z_0+re^{it}\right)\right)\mathrm{d}t && (252)\end{aligned}$$

13

13.1

(1)

$$\frac{1-\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \tag{253}$$
$$= \frac{1}{z}\cdot\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \tag{254}$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n)!} \tag{255}$$

から，$z_0 = 0$ は除去可能特異点である

(2)

$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ から，$w := z-i$ とおくと，$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{w^2}\cdot\frac{1}{(w+2i)^2}$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{w^2}\cdot\frac{1}{(w+2i)^2} \tag{256}$$
$$= \frac{1}{w^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\frac{1}{w+2i}\right) \tag{257}$$
$$= \frac{1}{w^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{2i}}\right) \tag{258}$$
$$= \frac{1}{w^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(-\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2i}\right)^n\right) \tag{259}$$
$$= \frac{1}{w^2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(-2i)^{n+1}}\right) \tag{260}$$
$$= \frac{1}{w^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nw^{n-1}}{(-2i)^{n+1}} \tag{261}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,w^{n-2}}{(-2i)^{n+2}} \tag{262}$$

よって，$z_0 = i$ は 2 位の極である

(3)

$w := z-1$ とおくと

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{w+1}}{w^2} = e\cdot\frac{e^w}{w^2} \tag{263}$$
$$= e\cdot\frac{1}{w^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} \tag{264}$$
$$= e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{n-2}}{n!} \tag{265}$$

から，$z_0 = 1$ は 2 位の極である

13.2

(1)

$$\frac{z^2+3z+1}{(z+1)^3} = \frac{(z+1)^2+z}{(z+1)^3} \tag{266}$$
$$= \frac{1}{z+1} + \frac{z}{(z+1)^3} \tag{267}$$
$$= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3} \tag{268}$$

から，$P_f(z,-1) := \dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{(z+1)^2} - \dfrac{1}{(z+1)^3}$

(2)

$e^z \sin z$ は $z_0 = 2$ で正則であるから，$g(z) := e^z \sin z$ とおくと，$z_0 = 2$ では

$$P_f(z,2) = \frac{g(2)}{z-2} \tag{269}$$

(3)

$$\frac{1}{z^3(z^3+z+1)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z^3+z+1} \tag{270}$$
$$= \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(z^3+z\right)^n \tag{271}$$
$$= \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \left(z^2+1\right)^n \tag{272}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-3} \left(z^2+1\right)^n \tag{273}$$

から，$P_f(z,0) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3}$

13.3

(1)

$f(z) = ze^{\frac{i}{z}}$ の特異点は $z=0$ である．展開すると

$$ze^{\frac{i}{z}} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{z}\right)^n \tag{274}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{1}{z^{n-1}} \tag{275}$$

よって，$z^{-1} = (z-0)^{-1}$ の係数は $\dfrac{i^2}{2!} = -\dfrac{1}{2}$ である

(2)

$z = \pm i, -3$ であり，$z = \pm i$ は 1 位の極，$z = -3$ は 2 位の極であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f\left(z\right), i\right) &= \lim_{z \to i} \left(z - i\right) \frac{z+2}{\left(z+i\right)\left(z-i\right)\left(z+3\right)^2} && (276)\\
&= \lim_{z \to i} \frac{z+2}{\left(z+i\right)\left(z+3\right)^2} && (277)\\
&= -\frac{1}{50} - \frac{11}{100} i && (278)\\
\mathrm{Res}\left(f\left(z\right), -i\right) &= \lim_{z \to -i} \left(z + i\right) \frac{z+2}{\left(z+i\right)\left(z-i\right)\left(z+3\right)^2} && (279)\\
&= \lim_{z \to -i} \frac{z+2}{\left(z-i\right)\left(z+3\right)^2} && (280)\\
&= -\frac{1}{50} + \frac{11}{100} i && (281)\\
\mathrm{Res}\left(f\left(z\right), -3\right) &= \lim_{z \to -3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{z+2}{z^2+1}\right) && (282)\\
&= \lim_{z \to -3} \frac{-z^2 - 4z + 1}{\left(z^2+1\right)^2} && (283)\\
&= \frac{1}{25} && (284)
\end{aligned}$$

(3)

$z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ の特異点は $z = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n} && (285)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-3}} && (286)
\end{aligned}$$

から，$(z-0)^{-1} = \frac{1}{z}$ の係数は $\frac{(-1)^2}{4!} = \frac{1}{24}$

(4)

$\dfrac{z-i}{z^4-1}$ の特異点は $z=\pm 1, \pm i$ であり，$z=i$ は除去可能特異点以外に対してすべて 1 位の極であるから，$z=i$ での係数は 0 で

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z-i}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \tag{287}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z+i)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \tag{288}$$

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z-i}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \tag{289}$$

$$=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(z-1)(z+i)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \tag{290}$$

$$\operatorname{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z-i}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} \tag{291}$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-1)(z+1)}=-\frac{1}{2} \tag{292}$$

13.4

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1} \tag{293}$$

$$=\frac{z}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}} \tag{294}$$

$$=\frac{1}{1+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^n} \tag{295}$$

から，$|z|<1$ では $\dfrac{z}{e^z-1}$ は有界かつ正則である．よって，$z=0$ は除去可能特異点である

13.5

$f(z)$ は $D^*(z_0,R)$ で正則であるから，z_0 が k 位の極と仮定すると，Laurent 展開すると主要部は有限項であり，最高次の項は $(z-z_0)^{-k}$ である．すると

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+R_f(z,z_0) \tag{296}$$

から，$\dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}\overset{z\to z_0}{\longrightarrow}\infty$ から $|f(z)|\to\infty$

逆に，$|f(z)|\to\infty$ と仮定すると，$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ は $D^*(z_0,R)$ で正則で，$\displaystyle\lim_{z\to z_0}|g(z)|=0$ から，有界．よって，Riemann の定理より，z_0 は g の除去可能特異点かつ $g(z_0)=0$ である．よって，$\exists k\geq 1, s.t. g(z)=(z-z_0)^k h(z)$ とかける．すると，$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^k}h(z)$ で，$h(z)$ は正則であるから，z_0 は f の k 位の極である

14

14.1

(1)

$\dfrac{z+1}{z^3-2z}=\dfrac{z+1}{z\left(z+\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)}$ であるから，特異点は $z=0,\pm\sqrt{2}$ であり，すべて $|z-i|=3$ の内部にある．よって

$$\int_{|z-i|=3}\frac{z+1}{z^3-2z}\mathrm{d}z=2\pi i\sum\mathrm{Res}\left(\frac{z+1}{z^3-2z},z_k\right) \tag{297}$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to0}\frac{z+1}{z^2-2}+\lim_{z\to\sqrt{2}}\frac{z+1}{z\left(z+\sqrt{2}\right)}+\lim_{z\to-\sqrt{2}}\frac{z+1}{z\left(z-\sqrt{2}\right)}\right) \tag{298}$$

$$=\pi i \tag{299}$$

(2)

$\dfrac{z}{4\sin^2 z-1}$ の特異点は $z=\pm\dfrac{1}{6}\pi,\pm\dfrac{5}{6}\pi$ であり，$|z|<2$ の内部にあるのは $z=\pm\dfrac{1}{6}\pi$ であるから

$$\int_{|z|=2}\frac{z}{4\sin^2 z-1}\mathrm{d}z=2\pi i\sum\mathrm{Res}\left(\frac{z}{4\sin^2 z-1},z_k\right) \tag{300}$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to\frac{1}{6}\pi}\frac{z}{8\sin z\cos z}+\lim_{z\to-\frac{1}{6}\pi}\frac{z}{8\sin z\cos z}\right) \tag{301}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \tag{302}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2 i \tag{303}$$

(3)

$\dfrac{e^z}{z^3\left(z+1\right)}$ の特異点は $z=0,-1$ であり，$z=0$ は 3 位の極，$z=-1$ は 1 位の極であり，$|z-(1+i)|<2$ の内部にあるのは 0 だけである．よって

$$\int_{|z-(1+i)|=2}\frac{e^z}{z^3\left(z+1\right)}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^3\left(z+1\right)},0\right) \tag{304}$$

$$=2\pi i\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)\right) \tag{305}$$

$$=\pi i\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{ze^z}{\left(z+1\right)^2}\right)\right) \tag{306}$$

$$=\pi i\cdot\left(\lim_{z\to0}\frac{e^z\left(z^2+1\right)}{\left(z+1\right)^3}\right) \tag{307}$$

$$=\pi i \tag{308}$$

(4)

$\dfrac{z^2+z+1}{z^5+1}$ の特異点は $z^5 = -1$ であるから，$z_0 = \exp\left(i\dfrac{\pi+2n\pi}{5}\right) \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,4]}$ で，すべて $|z+i| < 4$ の内部にあり，1 位の極である．また $g(z) = z^5+1, g'(z) = 5z^4$ から

$$\int_{|z+i|=4} \frac{z^2+z+1}{z^5+1} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+z+1}{z^5+1}, z_n\right) \tag{309}$$

$$= 2\pi i \sum_{n=0}^{4} \left.\frac{z^2+z+1}{5z^4}\right|_{z=z_n} \tag{310}$$

$$= 2\pi i \cdot 0 = 0 \tag{311}$$

14.2

$\dfrac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)}$ の特異点は $z = 1, 3i, -3i$ であり，ともに 1 位の極である

(1)

γ_1 の内部にあるのは $z = 1$ だけであるから

$$\int_{\gamma_1} \frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)}, 1\right) \tag{312}$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to 1} \frac{3z+2}{z^2+9} \tag{313}$$

$$= \pi i \tag{314}$$

(2)

すべての特異点が γ_2 の内部にあるから

$$\int_{\gamma_2} \frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)}, z_k\right) \tag{315}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\lim_{z\to 1} \frac{3z+2}{z^2+9} + \lim_{z\to 3i} \frac{3z+2}{(z-1)(z+3i)} + \lim_{z\to -3i} \frac{3z+2}{(z-1)(z-3i)}\right) \tag{316}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12}i - \frac{1}{4} + \frac{5}{12}i\right) \tag{317}$$

$$= 0 \tag{318}$$

(3)

γ_3 の内部にあるのは $z = -3i$ と $z = 1$ であるから

$$\int_{\gamma_3} \frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{3z+2}{(z-1)(z^2+9)}, z_k\right) \tag{319}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\lim_{z\to 1} \frac{3z+2}{z^2+9} + \lim_{z\to -3i} \frac{3z+2}{(z-1)(z-3i)}\right) \tag{320}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12}i\right) \tag{321}$$

$$= -\frac{5}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi i \tag{322}$$

15

15.1

(1)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{4-3\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{1}{iz}\mathrm{d}z \tag{323}$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{iz\left(4-\frac{3}{2}z+\frac{3}{2z}\right)}\mathrm{d}z \tag{324}$$
$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{-3z^2+8z-3}\mathrm{d}z \tag{325}$$

$-3z^2+8z-3=0$ の解は $z=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$ であり，$|z|<1$ であるのは $z=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ である．よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{-3z^2+8z-3}\mathrm{d}z \tag{326}$$
$$= \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{-3z^2+8z-3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \tag{327}$$
$$= 4\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\pi \tag{328}$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+a\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z \tag{329}$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{2}{az^2+2iz-a}\mathrm{d}z \tag{330}$$

$az^2+2iz-a=0$ の解が $z=\dfrac{i}{a}\left(-1\pm\sqrt{1-a^2}\right)$ であり,$|z|<1$ であるのは $z=\dfrac{i}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)$ である．よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} \frac{2}{az^2+2iz-a}\mathrm{d}z \tag{331}$$
$$= 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{2}{az^2+2iz-a}, \frac{i}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}\right)\right) \tag{332}$$
$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{1-a^2}} \tag{333}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\pi \tag{334}$$

(3)

$$2\int_0^{\pi} \frac{1}{(b+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(b+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\cdot\frac{1}{iz}\mathrm{d}z \tag{335}$$
$$= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+2bz+1)^2}\mathrm{d}z \tag{336}$$

$z^2+2bz+1=0$ の解は $z=-b\pm\sqrt{b^2-1}$ であり，$|z|<1$ であるのは $z=-b+\sqrt{b^2-1}$ である．また，これは 2 位の極であるから

$$2\int_0^\pi \frac{1}{(b+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+2bz+1)^2}\mathrm{d}z \tag{337}$$

$$= \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z^2+2bz+1)^2}, -b+\sqrt{b^2-1}\right) \tag{338}$$

$$= 8\pi\cdot\frac{b}{4(b^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2b}{(b^2-1)^{\frac{3}{2}}}\pi \tag{339}$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{(b+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \frac{b}{(b^2-1)^{\frac{3}{2}}}\pi \tag{340}$$

15.2

(1)

$z^2+z+1=0$ かつ上半平面にあるのは $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \tag{341}$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \tag{342}$$

(2)

$\left(z^2+1\right)^2=0$ かつ上半平面にあるのは $z=i$ であり，2 位の極であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}, i\right) \tag{343}$$

$$= 2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+i)^3} \tag{344}$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \tag{345}$$

(3)

$\left(z^2+a^2\right)^2=0$ かつ上半平面にあるのは $z=ai$ であり，2 位の極であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^2}, ai\right) \tag{346}$$

$$= 2\pi i\cdot\lim_{z\to ai}\frac{-2}{(z+ai)^3} \tag{347}$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{4a^3 i} = \frac{1}{2a^3}\pi \tag{348}$$

15.3

(1)

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ とすると，極は $z = \pm ai$ である
$g(z) = \pi \cot(\pi z) \dfrac{1}{z^2+a^2}$ とすると，$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = -\left(\mathrm{Res}(g, ia) + \mathrm{Res}(g, -ia)\right)$ から

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = -\left(-\frac{\pi}{a}\coth(\pi a)\right) \tag{349}$$

$$= \frac{\pi}{a}\coth(\pi a) \tag{350}$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a}\pi\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} \tag{351}$$

(2)

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ で，$h(z) = \pi \csc(\pi z) \dfrac{1}{z^2+a^2}$ とすると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = -\left(\mathrm{Res}(h, ai) + \mathrm{Res}(h, -ai)\right) \tag{352}$$

$$= -\left(\pi\csc(ai\pi)\cdot\frac{1}{2ai} + \pi\csc(-ai\pi)\cdot\left(-\frac{1}{2ai}\right)\right) \tag{353}$$

$$= -\frac{\csc(ai\pi)}{ai}\pi = -\frac{\pi}{a\sinh(a\pi)} \tag{354}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)} \tag{355}$$

(3)

$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2}$ とし，$z = a$ は 2 位の極であるから，$g(z) = \pi\cot(\pi z)\dfrac{1}{(z-a)^2}$ とおくと

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2} = -\mathrm{Res}(g, a) \tag{356}$$

$$= \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} \tag{357}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(a\pi)} \tag{358}$$