A1.1

$z=a+bi, w=c+di$ とする

(1)

$\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

(2)

$$\frac{w}{z}=\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}\Longrightarrow\overline{\frac{w}{z}}=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$
$$\frac{\overline{w}}{\overline{z}}=\frac{c-di}{a-bi}=\frac{(c-di)(a+bi)}{a^2+b^2}=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

(3)

$$|zw|=|(a+bi)(c+di)|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{ac^2+bd^2+ad^2+bc^2}$$
$$|z||w|=|a+bi||c+di|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{ac^2+bd^2+ad^2+bc^2}$$

(4)

$|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2\leq|z|^2+|w|^2$

A1.2

(1)

$z_n=n\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1}=2^{\frac{n+1}{2}}n\left(\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right)^{n+1}=2^{\frac{n+1}{2}}n\exp\left(\frac{n+1}{4}i\pi\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ から，発散する

(2)

$z_n=\left(\frac{n}{\pi}-\frac{n}{\pi}\cos\frac{\pi}{n}\right)+i\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}$
$\frac{n}{\pi}-\frac{n}{\pi}\cos\frac{\pi}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0, \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ から，収束する

(3)

$S_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k+i\sin k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ik}}{k^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$ から，収束する

(4)

$S_n:=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{k}\right)^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2k}e^{i\alpha}\right)^k, \cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{4+k^2}}, \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}$
$\Longrightarrow S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2k}\right)^k e^{ik\alpha}$ ここで $\mathrm{Re}(S_n), \mathrm{Im}(S_n)$ は共に $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2k}\right)^k$ より小さい

から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2k}\right)^k$ が収束するかどうかだけ判断すればいい

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{4+k^2}}{2k}\right)^k$ に対して，$a_k := \dfrac{\sqrt{4+k^2}}{2k}$ とすると，$a_{k+1} < a_k$ かつ $\forall k \in \mathbb{N}, a_k < 1$ だから a_n 収束．よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は絶対収束であるから S_n は収束

別解: 類題のヒント (2) より，$\left|\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{n}\right)^n\right|$ の収束性は $\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{n}\right|^n$ の収束性と同じであり，$\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{n^2}}\right)^n \le \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty$ であるから，収束する

B1.3

(1) $\Longrightarrow$ (2)

z_n が収束列とすると，$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \ge N, z_n - z_\infty \to 0$ で，$z_n - z_\infty = x_n + y_n i - x_\infty - y_\infty i = (x_n - x_\infty) + (y_n - y_\infty)\, i$ より，$x_n \longrightarrow x_\infty, y_n \longrightarrow y_\infty$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

x_n, y_n が収束列とすると，$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \ge N_1, x_n \longrightarrow x_\infty, \forall n \ge N_2, y_n \longrightarrow y_\infty$
言い換えれば $x_n - x_\infty \longrightarrow 0, y_n - y_\infty \longrightarrow 0$ であるから，$z_n - z_\infty \longrightarrow 0$
よって，$N := \max\{N_1, N_2\}$ とし，$\forall n \ge N, z_n \longrightarrow z_\infty$

B1.4

(1)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) && (1)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{i\theta}\right)^n\right) && (2)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right) && (3)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{\left(1-re^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}\right) && (4)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{1-2r\cos\theta+r^2}\right) && (5)\\
&= \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} && (6)
\end{aligned}
$$

(2)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta &= \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\pi}\right) && (7)\\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{i\theta}\right)^n\right) && (8)\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right) && (9)\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{\left(1-re^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)}\right) && (10)\\
&= \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} && (11)
\end{aligned}$$

B1.5

$z_n = i^n$ とすると，$|z_n| = 1$ より $|z_n|^n = 1$ から，$(|z_n|)_{n=1}^{\infty}$ は収束するであるが $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ は振動するから収束しない

A2.1

(1)

$\forall A \ni z_0 = x_0 + y_0 i, |x_0| + |y_0| < 1$ から，$\delta = 1 - |x_0| - |y_0| > 0$ とおくと，$B\left(z_0, \dfrac{1}{2}\delta\right) \subset A$ であるから，$D\left(z_0, \dfrac{1}{2}\delta\right)$ で，z_0 の任意性より $\mathring{A} = A$ で，A は開集合である

(2)

A は連結でない集合と仮定すると，以下の条件をみたす開集合 $U, V \subset \mathbb{C}$ が存在

1. $A \subset U \cup V$
2. $A \cap (U \cap V) = \emptyset$
3. $A \cap U \neq \emptyset$
4. $A \cap V \neq \emptyset$

$p \in U, q \in V$ を考えると，線分 $pq : \gamma : [0,1] \to A$ を $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ とし，$S := \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in U\}, s := \sup S$ とする．ここで A, U, V は共に開集合であるから，$T \neq \emptyset$.（理由として，分割 U, V は必ず各孤立点しか存在しない点からなる集合ではない（そうしないと閉集合になる）から，任意の点あるの円盤は必ず真の部分集合になる）．仮定より，$\gamma(s) \subset U$ で，s は上限であるから $\forall\epsilon > 0, \gamma(s+\epsilon) \notin U$ が，$A \subset U \cup V, \gamma(s+\epsilon) \in A$ から，$\gamma(s+\epsilon) \in V$. すると $\gamma(s) \in \partial U$ かつ $\gamma(s) \in \partial V$ で，$U \neq \mathring{U}, V \neq \mathring{V}$ から，U, V は開集合ではない．仮定と矛盾

(3)

$\partial A = \{\mathbb{C} \ni z = x + yi : |x| + |y| = 1\}$ であるから，$\overline{A} = \{\mathbb{C} \ni z = x + yi : |x| + |y| \leq 1\}$

A2.2

(1)

$\mathring{\mathbb{C}} = \mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}}$ であるから，開集合かつ閉集合である．$\forall z, w \in \mathbb{C}, (w - z) \in \mathbb{C}$ から，凸集合であり，連結でもある

(2)

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \delta := \dfrac{1}{2}|z|$ とし，$B(z, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であるから，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は開集合である
$\overline{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = \mathbb{C} \neq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ から閉集合ではない
$\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\{0\}$ を $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ とすると，γ が 0 を通らなくてもいいから，$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は弧状連結で，連結である
z, w は 0 に関して対称するとき，zw は 0 を通過するから，凸集合ではない

(3)

$D(i,1), D(-i,1)$ はそれぞれ開集合であるから，$D(i,1) \cup D(-i,1)$ も開集合である
$D(i,1), D(-i,1)$ の定義より，閉集合ではない
$A = D(i,1) \cup D(-i,1), U = D(i,1), V = D(-i,1)$ とすると，$A = U \cup V, U \cap V = \emptyset$．また，$A \cap U = U, A \cap V = V$ だから，A は連結集合ではない
$D(i,1), D(-i,1)$ は x 軸に関して対称であるから,$\forall z \in D(1)$,線分 $z\overline{z} \notin A (:= D(i,1) \cup D(-i,1))$ であるから，凸集合ではない

(4)

$B := \{\cos t + i \sin t : t \in (0, \pi]\}$ とし
$\{\cos t + i \sin t : t \in (0, \pi)\} = \mathring{B} \neq B \neq \overline{B} = \{\cos t + i \sin t : t \in [0, \pi]\}$ であるから，B は開集合でも閉集合でもない
$\forall z \in B, z$ は全部 0 を中心，半径 1 の複素平面での円周上にあるので，その円周より弧状連結で連結である
$\forall z, w \in B$，線分 $zw \notin B$ であるから，凸集合ではない

(5)

$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \notin C := D(i,1) \cap D(0,1)$ であるから，C は閉集合ではない．また，$\partial C \neq \emptyset$ であるから，C は開集合でもない
$\forall z, w \in C$，線分 zw は C の中に存在するから，C は凸集合であり，連結集合でもある

(6)

$\forall z \in D := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Im} z = 0\}, z$ の近傍は必ず z 以外の点を含むから，開集合ではない
$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\} \neq D$ から，閉集合ではない
$U := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Im} z = 0, \mathrm{Re} z < 0\}, V := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Im} z = 0, \mathrm{Re} z > 0\}$ とすると，$D := U \cup V, D \cap U \cap V = \emptyset, D \cap U = U \neq \emptyset, D \cap V = V \neq \emptyset$ であるから，連結ではない
$\forall z \in U, w \in V$，線分 zw は必ず 0 を通過するが，$0 \notin D$ から，凸集合ではない

(7)

$\partial D\left(0,1\right)$ は閉集合であるから，$E:=\mathbb{C}\backslash\partial D\left(0,1\right)$ は開集合であり，E の補集合 $\partial D\left(0,1\right)$ は閉であるから，E は閉集合ではない
$U:=B\left(0,1\right),V:=\mathbb{C}\backslash\overline{B\left(0,1\right)}$ とすれば,$E=U\cup V,E\cap U\cap V\neq\emptyset,E\cap U=U\neq\emptyset,E\cap V=V\neq\emptyset$ であるから，連結集合ではない
$z\in U,w\in V$ とすれば，線分 zw は必ず $\partial D\left(0,1\right)$ を通過するから，凸集合ではない

(8)

$F:=\left\{z\in\mathbb{C}:z^4=1\right\}$ は四つの点からなる集合であるから，閉集合であり，開集合ではない
F の全ての点は孤立点であるから，連結集合でも凸集合でもない

A2.3

(1)

$z=x+yi$ とする．$\mathrm{Im}z=\left|\mathrm{Re}z\right|$ から $y=\left|x\right|$ で，$-1\leq\mathrm{Re}z\leq1$ より $x\in\left[-1,1\right]$
よって，$\gamma\left(t\right)=t+\left|t\right|i,t\in\left[-1,1\right]$ とすればいい
$t=0$ では $\gamma'\left(t\right)=0$ から，γ は滑らかではない
$I_k=\left[-1+\dfrac{2k}{n},-1+\dfrac{2\left(k+1\right)}{n}\right],k\in\mathbb{Z}_{\left[0,n-1\right]}$ とすれば各部分では滑らかであるから路になるが，$\gamma\left(-1\right)\neq\gamma\left(1\right)$ から閉路ではない
$\gamma\left(-1\right)$ を除いたら自己交差がないから，単純曲線である

(2)

$z=x+yi$ とする．$\left|z-1\right|=\left|z+2i\right|\iff\left(x-1\right)^2+y^2=x^2+\left(y+2\right)^2\iff-2x+1=4y+4$ から，$2x+4y+3=0$ で $\left|\mathrm{Re}z\right|+\left|\mathrm{Im}z\right|\leq1$ より $\left|x\right|+\left|y\right|\leq1$
$x=t$ とすると，$y=-\dfrac{1}{4}\left(2t+3\right),\left|t\right|+\left|-\dfrac{1}{4}\left(2t+3\right)\right|\leq1\Longrightarrow-\dfrac{1}{2}\leq t\leq\dfrac{1}{6}$
よって，$\gamma\left(t\right)=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)+t\left(\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{6}i\right)-\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\right)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}t\right)-i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}t\right),t\in\left[0,1\right]$ とすればいい
$\forall t\in\left[0,1\right],\gamma'\left(t\right)\neq0$ から，滑らかな曲線であり，路にもなり，$\gamma\left(0\right)\neq\gamma\left(1\right)$ であるから，閉路ではない
$\gamma\left(0\right)$ を除いても γ も単射であるから（実部に関して虚部は単調増加より）単純曲線である

(3)

$\gamma\left(t\right)=\begin{cases}2t-1 & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ e^{i\pi\left(2t-1\right)} & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$ とすればいい
$t=\dfrac{1}{2}$ では微分できないから，$\gamma\left(t\right)$ は滑らかな曲線ではないが，$I_k=\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right],k\in\mathbb{Z}_{\left[1,n\right]}$ とおけば路になる
$\gamma\left(0\right)=\gamma\left(1\right)=0$ から閉路であり，$\gamma\left(0\right)$ を除いたら自己交差はないから単純曲線である

(4)

$z=x+yi\Longrightarrow4x^2+y^2=1$ から，$\gamma\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\cos t+i\sin t$ とすればいい
$\forall t\in\left[0,2\pi\right],\gamma'\left(t\right)\neq0$ から路になり，$\gamma\left(0\right)=\gamma\left(2\pi\right)$ から，閉路になる．なお，$\gamma\left(0\right)$ を除いたら

自己交差はないから，単純曲線である

(5)

$\gamma(t) = 2\sin t + 2i\sin 2t, t \in [0, 2\pi]$ とすればいい
$\forall t \in [0, 2\pi], \gamma'(t) \neq 0$ から，γ は路になり，$\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ から，閉路になる．なお，$\gamma(0)$ を除いても自己交差がある（0）から，単純曲線である

B2.4

A が弧状連結とすると，$\forall z, w \in A, \exists \gamma : [0, 1] \to A, s.t. \gamma(0) = z, \gamma(1) = w$
A が連結でない集合とすると，以下の条件をみたす $U, V \subset A$ が存在する：

1. $A \subset U \cup V$
2. $A \cap (U \cap V) = \emptyset$
3. $A \cap U \neq \emptyset$
4. $A \cap V \neq \emptyset$

$U \cap V = \emptyset$ から，$z \in U, w \in V$ を任意に取り，$S := \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in U\}, s := \sup S$ とすると，$\gamma(s) \subset U$ で，s は上限であるから，$\forall \epsilon > 0, \gamma(s + \epsilon) \notin U$ であるが，$\gamma(s + \epsilon) \in V$．すると $\gamma(s) \in \partial U$ かつ $\gamma(s) \in \partial V$ であるから，仮定の U, V は開集合と矛盾するので，背理法より連結集合である

B2.5

$$\begin{cases} F(t, 0) = \gamma_t(0) = (1-t) z_0 + t z_1 + ((1-t) R + tr) e^0 = (1-t) z_0 + t z_1 + (1-t) R + tr \\ F(t, 1) = \gamma_t(1) = (1-t) z_0 + t z_1 + ((1-t) R + tr) e^i \end{cases}$$

$F(t, 0), F(t, 1)$ は連続であるから，ホモトピーである

B2.6

$D \subset \mathbb{C}$ が開凸集合であるとすると，$\forall z, z_0 \in D, \exists t \in [0, 1], s.t. tz + (1-t) z_0 \in D$ が成り立つ．言い換えて線分 $\{tz + (1-t) z_0 : t \in [0, 1]\} \in D$ から，D は（z_0 を中心とする）星型領域にみなせる．
こうすると，$\gamma : [0, 1] \to D, \gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ とし，$H(s, t) = (1-t)\gamma(s) + t z_0, (s, t \in [0, 1])$ であるホモとピーとすると，$t = 1, H(s, 0) = \gamma(s)$ で，$t = 1, H(s, 1) = z_0$ から，単連結である

1 A3.1

(1)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z\overline{z} = iz - i\overline{z} - 1}{z^2 + 1} && (12) \\ &= \frac{(z - i)(\overline{z} - i)}{(z - i)(z + i)} && (13) \\ &= \frac{\overline{z} - i}{z + i} && (14) \end{aligned}$$

から，$\lim_{z \to i} f(z) = \frac{-i - i}{2i} = -1$

(2)

$$f(z) = \frac{z\left(\mathrm{Re}\,(iz)\right)^2}{|z^3|} \tag{15}$$
$$= \frac{(x+yi)\,y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

から，$x=0$ に沿って，$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} i\frac{y^3}{|y|^3}$ で，y の近づき方によって一致しないから，極限は存在しない

(3)

$$f(z) = \frac{-y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2-y^2)+2xyi} \tag{17}$$

で，$x=0$ に沿って $\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{|y|}{y}$ から，$y>0$ と $y<0$ での極限は一致しないので，極限は存在しない

(4)

$$f(z) = \frac{z^3-3iz^2-z+3i}{z-3i} \tag{18}$$
$$= \frac{\left(z^2-1\right)(z-3i)}{z-3i} \tag{19}$$
$$= z^2-1 \tag{20}$$
$$\xrightarrow{z\to 3i} -10 \tag{21}$$

から，極限は -10 である

2　A3.2

(1)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{22}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{3^{n+1}}\right| \tag{23}$$
$$= \frac{1}{3} \tag{24}$$

(2)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\left(2^n+3^n\right)^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} 3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}} \tag{26}$$
$$= 3 \tag{27}$$

から，収束半径 $R=\dfrac{1}{3}$

(3)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{28}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+2^{n+1}}{1+2^n}\right| \tag{29}$$
$$=2 \tag{30}$$

(4)

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\left(\log\left(n+1\right)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{31}$$
$$-\log R=\frac{1}{n}\cdot\log\left(\limsup_{n\to\infty}\log\left(n+1\right)\right) \tag{32}$$

ここで，$n>\log n>\log\log n$ があるから，右側は 0 である．よって $-\log R=0$ で，$R=1$

(5)

$w=z^2$ とすると

$$R_w=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{33}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \tag{34}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}{\left(n+1\right)^2} \tag{35}$$
$$=4 \tag{36}$$

で，$|w_n|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}4$ で，$|z|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}2$

(6)

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sin^3 n^3-2}{n^{2n-1}}\right|^{\frac{1}{n}} \tag{37}$$
$$<\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{3}{n^{2n-1}}\right|^{\frac{1}{n}} \tag{38}$$
$$=0 \tag{39}$$

から，$R=\infty$ で，発散する

3 A3.3

$z=aw+b$ とし，$S_N:=\sum_{n=0}^{N}z^n$ とする

$$\begin{aligned}(1-z)\,S_N&=S_N-zS_N &(40)\\&=\sum_{n=0}^{N}z^n-\sum_{n=0}^{N}z^{n+1} &(41)\\&=1-z^{N+1} &(42)\end{aligned}$$

$|z|=|aw+b|<1$ から，$|z|\to 0$ であるから，$z^{N+1}\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$
よって，$S_N=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(aw+b)}$

4 B3.4

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が $z_0\in\mathbb{C}$ で連続であるから，$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$
$\mathrm{Re}f$ に対して，$|\mathrm{Re}z-\mathrm{Re}w|\le|z-w|$ より，$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}f(z)=\mathrm{Re}\left(\lim_{z\to z_0}f(z)\right)=\mathrm{Re}f_0$
$||z|-|w||\le|z-w|$ があるから，$||f(z)|-|f(z_0)||\le|f(z)-f(z_0)|\overset{z\to z_0}{\longrightarrow}0$ から，$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=|f(z_0)|$
$|\overline{z}-\overline{w}|=|\overline{z-w}|=|z-w|$ があるから，$\lim_{z\to z_0}\overline{f(z)}=\overline{\lim_{z\to z_0}f(z)}=\overline{f(z_0)}$

5 B3.5

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|&\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,|b_{n-k}| &(43)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}|a_k|\,|b_l| &(44)\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}|b_l|\right)<\infty &(45)\end{aligned}$$

(2)

$A_N=\sum_{n=0}^{N}a_n,B_N=\sum_{n=0}^{N}b_n,C_N=\sum_{n=0}^{N}c_n=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ とする
$C_N=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N-n}a_nb_k$ で，$A_NB_N=\left(\sum_{n=0}^{N}a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{N}b_k\right)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}a_nb_k$ であるから

$$\begin{aligned}A_NB_N-C_N&=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}a_nb_k-\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N-n}a_nb_k &(46)\\&=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=N-n+1}^{N}a_nb_k &(47)\end{aligned}$$

両辺に絶対値をとると，$|A_N B_N - C_N| \le \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=N-n+1}^{N} |a_n| |b_k|$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束であるから，$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, s.t. \sum_{n=N_1}^{\infty} a_n \longrightarrow 0, \sum_{n=N_2}^{\infty} b_n \longrightarrow 0$
よって，$M := \max\{N_1, N_2\}$ とし

$$
\begin{aligned}
|A_N B_N - C_N| &\le \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=N-n+1}^{N} |a_n| |b_k| && (48)\\
&\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{M} \sum_{k=M-n+1}^{\infty} |a_n| |b_k| + \sum_{n=M+1}^{\infty} \sum_{k=M-n+2}^{\infty} |a_n| |b_k| && (49)\\
&= S + S\epsilon \longrightarrow 0 && (50)
\end{aligned}
$$

6 A4.1

(1)

$f(z) = \overline{z}^2 = (x - yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = -2xy \end{cases}$

$\begin{cases} u_x = 2x & u_y = -2y \\ v_x = -2y & v_y = -2x \end{cases} \Longrightarrow f(z)$ は $(0,0)$ でしか正則しないが，それ以外の点では正則でない

(2)

$f(z) = \sinh x \cos y + \cosh x \sin yi \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = \sinh x \cos y \\ v(x,y) = \cosh x \sin y \end{cases}$

$\begin{cases} u_x = \cosh x \cos y & u_y = -\sinh x \sin y \\ v_x = \sinh x \sin y & v_y = \cosh x \cos y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ から，$f(z)$ は正則である
$f'(z) = u_x + iv_x = \cosh x \cos y - \sinh x \sin yi$

(3)

$f(z) = z^2\overline{z} = (x + yi)^2 (x - yi) = x^3 + xy^2 + x^2yi + y^3i \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^3 + xy^2 \\ v(x,y) = x^2y + y^3 \end{cases}$

$\begin{cases} u_x = 3x^2 + y^2 & u_y = 2xy \\ v_x = 2xy & v_y = x^2 + 3y^2 \end{cases}$ から，Cauchy-Riemann の関係式は $x + y = 0$ でしか成立しないから，f は正則ではない

(4)

$f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x) \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^{-y} \cos x \\ v(x,y) = e^{-y} \sin x \end{cases}$

$\begin{cases} u_x = -e^{-y} \sin x & u_y = -e^{-y} \cos x \\ v_x = e^{-y} \cos x & v_y = -e^{-y} \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ であるから，$f(z)$ は正則である
$f'(z) = u_x + iv_x = -e^{-y} \sin x + ie^{-y} \cos x$

(5)

$$f(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\\ v(x,y)=0\end{cases}$$

$\begin{cases}u_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & u_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ v_x=0 & v_y=0\end{cases}$ よって，$f(z)$ は全ての点で正則しない

(6)

$f(z)=\left(z^2+iz+3\right)^2$ で，これは z^2+iz+3 の正則性と同じであるから，以下は z^2+iz+3 だけ考えばいい

$$F(z)=z^2+iz+3=\left(x^2-y^2-y+3\right)+(2xy+x)i=\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2-y+3\\ v(x,y)=2xy+x\end{cases}$$

$\begin{cases}u_x=2x & u_y=-2y-1\\ v_x=2y+1 & v_y=2x\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ から，F は正則である

$f'(z)=2\left(z^2+iz+3\right)(2z+i)=4z^3+6z^2i+10z+6i$

(7)

$f(z)=x^2+y^2i\Longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2\\ v(x,y)=y^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_x=2x & u_y=0\\ v_x=0 & v_y=2y\end{cases}$ から，$x=y=0$ でしか正則しない，それ以外の点は正則ではない

(8)

$$f(z)=2xy-i\left(x^2-y^2\right)\Longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=2xy\\ v(x,y)=y^2-x^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_x=2y & u_y=2x\\ v_x=-2x & v_y=2y\end{cases}$$

よって，$f(z)$ は正則であり，$f'(z)=2y-2xi$

7 A4.2

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2\Longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2+y^2\\ v(x,y)=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_x=2x & u_y=2y\\ v_x=0 & v_y=0\end{cases}$$

$\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ となるのは $x=y=0$ だけであるから，正則であるのは $(0,0)$ だけで，それ以外の点では正則ではない

8 A4.3

$$z\neq0, f(z)=\frac{\overline{z}^2}{z}=\frac{\left(x^2-y^2-2xyi\right)}{x+yi}=\frac{\left(x^2-y^2-2xyi\right)(x-yi)}{x^2+y^2}=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}i$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}u(x,y)=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}\\ v(x,y)=\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u_x=\frac{x^4+6x^2y^2-3y^4}{(x^2+y^2)^2} & u_y=-\frac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2}\\ v_x=-\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} & v_y=-\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

$y=0$ で，$x\to0$ すると，$u_x=0=v_y, u_y=0=-v_x$ であるが，u_x,u_y,v_x,v_y は C^1 ではないから，正則ではない

9　B4.4

(1)

$$\frac{(f\pm g)(z)-(f\pm g)(z_0)}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\pm\frac{f(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$ から線形性を持つ

(2)

$$\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}=\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z)}{z-z_0}+\frac{f(z_0)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}$$ から交叉性を持つ

(3)

f,g は正則であるから，$\begin{cases} f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+A(z)(z-z_0) \\ g(w)=g(w_0)+g'(w_0)(w-w_0)+B(w)(w-w_0) \end{cases}$

$$\frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}=g'(f(z_0))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+B(f(z))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\to g'(f(z_0))\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

(4)

$\dfrac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^kz_0^{n-1-k}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\sum_{k=0}^{n-1}z_0^{n-1}=nz_0^{n-1}$

10　B4.5

f が正則とすると，$f'(z)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+hi)-f(z)}{hi}$

$\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\dfrac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\dfrac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}$ から，$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$

同様に，計算すると，虚方向では，$f'(z)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$

導関数の一意性より，$u_x(x,y)+iv_x(x,y)=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$ から，実部と虚部に比較すると，$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$

11　B4.6

$f=u+vi$ とする．f が定数とすると，$u_x=u_y=0$．正則性より，$u_x=u_y=v_x=v_y=0$ であるから，$f'(z)=u_x+iv_x=0$ で，$\mathrm{Re}f(z)$ と $\mathrm{Im}f(z)$ は共に定数であり，$|f(z)|=\sqrt{(\mathrm{Re}f(z))^2+(\mathrm{Im}f(z))^2}$ も定数である

12　B4.7

仮定より $h(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n\equiv 0$ で，B4.4 の (4) より

$$h^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}(a_n-b_n)\left(\prod_{k=1}^{m}(n+1-k)\right)z^{n-m}$$

$z=0$ を代入すると，$h^{(m)}(0)=m!(a_m-b_m)$ となり，$h\equiv 0$ から $\forall m>0, h^{(m)}(0)=0$ で，$a_m=b_m$

13 A5.1

(1)

$$e^{\frac{\pi}{12}i}=\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) \tag{51}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \tag{52}$$

(2)

$$e^{3+\frac{3}{4}\pi i}=e^3\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} \tag{53}$$
$$=e^3\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \tag{54}$$
$$=e^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \tag{55}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^3+\frac{\sqrt{2}}{2}e^3 i \tag{56}$$

(3)

$$\cos\left(3e^{\frac{\pi}{3}i}\right)=\cos\left(3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right) \tag{57}$$
$$=\cos\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) \tag{58}$$
$$=\cos\frac{3}{2}\cosh\frac{3\sqrt{3}}{2}-i\sin\frac{3}{2}\sinh\frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{59}$$

(4)

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi+3i\right)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\cosh 3+i\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\sinh 3 \tag{60}$$
$$=\frac{1}{2}\cosh 3-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh 3 \tag{61}$$

(5)

$$\mathrm{Im}(\tan i)=\mathrm{Im}\left(\frac{\sin i}{\cos i}\right) \tag{62}$$
$$=\mathrm{Im}\left(\frac{i\sinh 1}{\cosh 1}\right) \tag{63}$$
$$=\tanh 1 \tag{64}$$

(6)

$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ から，$i^i=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$\log i^i=\log\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{2} \tag{65}$$

(7)

$$\begin{aligned}
(2\pi i)^{\frac{1}{2}} &= \left(2\pi e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{\frac{1}{2}} && (66)\\
&= \sqrt{2\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} && (67)\\
&= \sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) && (68)\\
&= \sqrt{\pi}\,(1+i) && (69)
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
i^{\sqrt{2}} &= \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{\sqrt{2}} && (70)\\
&= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i} && (71)\\
&= \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2n\pi\right) && (72)
\end{aligned}$$

14　A5.2

(1)

$e^z=0$ をみたす $x+yi=:z\in\mathbb{C},(x,y\in\mathbb{R})$ が存在すると仮定すると

$$\begin{aligned}
0=e^z &= e^{x+yi} && (73)\\
&= e^x\cdot e^{yi} && (74)\\
&= e^x\,(\cos y+i\sin y) && (75)\\
&= e^x\cos y+ie^x\sin y && (76)
\end{aligned}$$

があるが，$\mathrm{Re}\,e^z=e^x\cos y=0$ と $\mathrm{Im}\,e^z=e^x\sin y=0$ が同時に成り立たないから，$\forall z\in\mathbb{C},e^z\neq 0$

(2)

$z=x+yi$ とすると

$$\begin{aligned}
e^{-z} &= e^{-x-yi}=e^{-x}\cdot e^{-yi} && (77)\\
&= e^{-x}\,(\cos(-y)+i\sin(-y)) && (78)\\
&= e^{-x}\,(\cos y-i\sin y) && (79)\\
&= \frac{1}{e^x}\cdot e^{-yi}=\frac{1}{e^x}\cdot\frac{1}{e^{yi}} && (80)\\
&= \frac{1}{e^{x+yi}}=\frac{1}{e^z} && (81)
\end{aligned}$$

15　A5.3

(1)

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{iz}}{2}, \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ に $e^{iz}=e^{i(x+yi)}=e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right)$ を代入すれば

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \tag{82}$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \tag{83}$$

(2)

e^z, e^{-z} は共に整関数であるから，$\sin z, \cos z$ も整関数である

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{84}$$
$$= \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{85}$$
$$= \cos z \tag{86}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{87}$$
$$= \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i} \tag{88}$$
$$= -\sin z \tag{89}$$

16　A5.4

(1)

$z, w \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ かつ $\mathrm{Re}\,(zw) > 0$ で，$\arg zw = \arg z + \arg w > 0$ より，$\arg zw \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\log\,(zw) = \ln|zw| + i\arg\,(zw) \tag{90}$$
$$= \ln|z| + i\arg z + \ln|w| + i\arg w \tag{91}$$
$$= \log z + \log w \tag{92}$$

(2)

$|\alpha - \arg z| < \pi$ より，$\arg z \in (\alpha-\pi, \alpha+\pi)$ となり，$\left\{re^{i(\alpha+\pi)} : r > 0\right\}$ は除いたから，偏角 $\arg z$ は一意であるので，一価関数である

$z = x + yi$ とすると，$\begin{cases} u\,(x,y) = \ln z = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) \\ v\,(x,y) = \arg z = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$ で $\begin{cases} u_x = \frac{x}{x^2+y^2} & u_y = \frac{y}{x^2+y^2} \\ v_x = -\frac{y}{x^2+y^2} & v_y = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$ から，Cauchy-Riemann の関係式をみたすので，正則である

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z = u_x + iv_x \tag{93}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{94}$$
$$= \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+yi} \tag{95}$$
$$= \frac{1}{z} \tag{96}$$

17　A5.5

(1)

$f(z) = [a^z] = e^{z\mathrm{Log}a}, e^z, \mathrm{Log}a$ は共に正則なので，f も正則になる

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{z\mathrm{Log}a} \tag{97}$$
$$= e^{z\mathrm{Log}a}\mathrm{Log}a \tag{98}$$
$$= \mathrm{Log}a\,[a^z] \tag{99}$$

(2)

A5.4 の (2) より，$f = z^b$ も一価かつ正則である．$f(z) = z^b := e^{b\mathrm{Log}z}, (z \in D_\alpha)$ とする

$$f'(z) = e^{b\mathrm{Log}z} \cdot b\,(\mathrm{Log}z)' \tag{100}$$
$$= e^{b\mathrm{Log}z} \cdot b \cdot \frac{1}{z} \tag{101}$$
$$= b\frac{e^{b\mathrm{Log}z}}{z} = bz^{b-1} \tag{102}$$

18　B5.6

(1)

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}, \tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w}$ で，$\begin{cases} \sin z \pm w = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w \\ \cos z \pm w = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w \end{cases}$ より

$$\tan(z \pm w) = \frac{\sin(z \pm w)}{\cos(z \pm w)} \tag{103}$$
$$= \frac{\sin z \cos w \pm \cos z \sin w}{\cos z \cos w \mp \sin z \sin w} \tag{104}$$
$$= \frac{\frac{\sin z}{\cos z} \pm \frac{\sin w}{\cos w}}{1 \mp \frac{\sin z}{\cos z}\frac{\sin w}{\cos w}} \tag{105}$$
$$= \frac{\tan z \pm \tan w}{1 \mp \tan z \tan w} \tag{106}$$

(2)

$\sin z, \cos z$ は正則となるので，$\cos z \neq 0$ とすれば $\tan z$ も正則である．$\cos z = 0 \iff z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ から，$\mathbb{C} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ で正則である

19　B5.7

$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$

$$(z^a)^b = \exp(b \log(z^a)) = \exp\left(b \log\left(e^{a\log z}\right)\right) \tag{107}$$
$$= \exp(b(a\log z + 2n\pi i)) = \exp(ab\log z + 2nb\pi i) \tag{108}$$
$$= e^{ab\log z} \cdot e^{2nb\pi i} \tag{109}$$

となり，$z^{ab} = e^{ab\log z}$ であるから，$(z^a)^b = z^{ab} \iff e^{2nb\pi i} = 1$
また，$e^{2nb\pi i} = 1$ となるのは $b \in \mathbb{Z}$ のみだから，$(z^a)^b = z^{ab} \iff b \in \mathbb{Z}$

20 B5.8

$$\lim_{\epsilon \to +0} \mathrm{Log}\left(-a + i\epsilon\right) = \lim_{\epsilon \to +0} \left(\ln\left|-a + i\epsilon\right| + i\mathrm{Arg}\left(-a + i\epsilon\right)\right) \tag{110}$$

$$= \ln\left|-a\right| + i\pi = \ln a + \pi i \tag{111}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \mathrm{Log}\left(-a - i\epsilon\right) = \lim_{\epsilon \to +0} \left(\ln\left|-a - i\epsilon\right| + i\mathrm{Arg}\left(-a - i\epsilon\right)\right) \tag{112}$$

$$= \ln\left|-a\right| + i\left(-\pi\right) = \ln a - \pi i \tag{113}$$

21 B5.9

(1)

$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ であるから，$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$ となる $z = i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ となるが，この場合だと，$\sinh z = \dfrac{\pm i \mp (-i)}{2} = \pm i \neq 0$ ので，$\tanh z$ の定義域は $\mathbb{C} \backslash \left\{ i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$

(2)

$$\cosh\left(z \pm w\right) = \frac{e^{z \pm w} + e^{-(z \pm w)}}{2} = \frac{e^z e^w + e^{-z} e^{-w}}{2} = \cosh z \cosh w \pm \sinh z \sinh w \tag{114}$$

$$\sinh\left(z \pm w\right) = \frac{e^{z \pm w} - e^{-(z \pm w)}}{2} = \frac{e^z e^w - e^{-z} e^{-w}}{2} = \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w \tag{115}$$

(3)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{\left(e^z + e^{-z}\right)^2 - \left(e^z - e^{-z}\right)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \tag{116}$$

22 A6.1

$\gamma\left(t\right) = -i + 2e^{it}, \gamma'\left(t\right) = 2ie^{it}$

(1)

$$\int_{|z+i|=2} z^2 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(-i + 2e^{it}\right)^2 \cdot \left(2ie^{it}\right) \mathrm{d}t \tag{117}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4e^{2it} - 4ie^{it} - 1\right) \cdot \left(2ie^{it}\right) \mathrm{d}t \tag{118}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8ie^{3it} + 8e^{2it} - 2ie^{it}\right) \mathrm{d}t \tag{119}$$

$$= 8i\left[\sin\left(3t\right) - i\cos\left(3t\right)\right]_0^{2\pi} + 8\left[\sin\left(2t\right) - i\cos\left(2t\right)\right]_0^{2\pi} - 2i\left[\sin\left(t\right) - i\cos\left(t\right)\right]_0^{2\pi} \tag{120}$$

$$= 0 \tag{121}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{|z+i|=2} \overline{z}^2 \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left(2e^{-it}+i\right)^2 \cdot \left(2ie^{it}\right) \mathrm{d}t &(122)\\ &= \int_0^{2\pi} \left(8ie^{-it}-8-2ie^{it}\right) \mathrm{d}t &(123)\\ &= \left[-8t\right]_0^{2\pi} &(124)\\ &= -16\pi &(125)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{|z+i|=2} e^z \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} e^{-i+2e^{it}} \cdot \left(2ie^{it}\right) \mathrm{d}t &(126)\\ &= 2ie^{-i}\int_0^{2\pi} e^{2e^{it}+it}\mathrm{d}t &(127)\\ &= 2ie^{-i}\int_0^{2\pi} e^{2e^{it}} \cdot e^{it}\mathrm{d}t &(128)\\ &= 2ie^{-i}\left[\frac{1}{2i}e^{2e^{it}}\right]_0^{2\pi} &(129)\\ &= 0 &(130)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_{|z+i|=2} \frac{1}{z^2+2} \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(-i+2e^{it}\right)^2+2} \cdot \left(2ie^{it}\right) \mathrm{d}t &(131)\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{4e^{2it}-4ie^{it}+1}\mathrm{d}t &(132)\end{aligned}$$

$e^{it} = \dfrac{1+iu}{1-iu}, \mathrm{d}t = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{4e^{2it}-4ie^{it}+1}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\dfrac{1+iu}{1-iu}}{4\left(\dfrac{1+iu}{1-iu}\right)^2-4i\left(\dfrac{1+iu}{1-iu}\right)+1} \cdot \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u &(133)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4i}{4\left(1+iu\right)^2-4i\left(1+iu\right)\left(1-iu\right)+\left(1-iu\right)^2}\mathrm{d}u &(134)\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4i}{\left(5+4i\right)u^2-6iu-\left(5-4i\right)}\mathrm{d}u &(135)\end{aligned}$$

$(5+4i)\,u^2-6iu-(5-4i)=(5+4i)\left[(u-b)^2+c\right]$ とおくと，$\begin{cases}2b\,(5+4i)=6i\\(5+4i)\left(b^2+c\right)=-5+4i\end{cases}$

$$\implies\begin{cases}b=\dfrac{3i}{5+4i}\\c=\dfrac{-5+4i}{5+4i}+\dfrac{9}{(5+4i)^2}=-\dfrac{32}{(5+4i)^2}=-\dfrac{32}{1681}\,(9-40i)\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4i}{(5+4i)\,u^2-6iu-(5-4i)}\mathrm{d}u=-\frac{4i}{5+4i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u-b)^2+c}\mathrm{d}u \tag{136}$$

$$=-\frac{4i}{5+4i}\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\,(u-b)\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \tag{137}$$

$\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であり

$\sqrt{c}=\sqrt{-\dfrac{32}{1681}\,(9-40i)}=\left(-\dfrac{32}{1681}\,(9-40i)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{32}{1681}\,(4+5i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{41}\,(4+5i)$ から

$$\int_{|z+i|=2}\frac{1}{z^2+2}\mathrm{d}z=-\frac{4i}{5+4i}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\pi \tag{138}$$

$$=-\frac{4i}{5+4i}\cdot\frac{41}{4\sqrt{2}\,(4+5i)}\pi \tag{139}$$

$$=-\frac{164i}{164\sqrt{2}i}\pi \tag{140}$$

$$=-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{141}$$

23　A6.2

(1)

$$\int_{\gamma^*}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{|z|=2}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{142}$$

$$=\int_0^{2\pi}4e^{2it}\mathrm{d}t \tag{143}$$

$$=4\int_0^{2\pi}e^{2it}\mathrm{d}t \tag{144}$$

$$=0 \tag{145}$$

(2)

$\gamma_1 := 4it + 2 - 2i, \gamma_2 := -4t + 2 + 2i, \gamma_3 := -4it - 2 + 2i, \gamma_4 := 4t - 2 - 2i$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} z^2 \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} z^2 \mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} z^2 \mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} z^2 \mathrm{d}z && (146)\\
&= \int_0^1 (4it + 2 - 2i)^2 \cdot 4i \mathrm{d}t + \int_0^1 (-4t + 2 + 2i)^2 \cdot (-4) \,\mathrm{d}t && (147)\\
&+ \int_0^1 (-4it - 2 + 2i)^2 \cdot (-4i) \,\mathrm{d}t + \int_0^1 (4t - 2 - 2i)^2 \cdot 4 \mathrm{d}t && (148)\\
&= \int_0^1 \left(-32\,(2t-1) - 16\,(2t-1)^2\, i + 16i\right) \mathrm{d}t && (149)\\
&+ \int_0^1 \left(-16\,(2t-1)^2 + 32\,(2t-1)\, i + 16\right) \mathrm{d}t && (150)\\
&+ \int_0^1 \left(32\,(2t-1) + 16\,(2t-1)^2\, i - 16i\right) \mathrm{d}t && (151)\\
&+ \int_0^1 \left(16\,(2t-1)^2 - 32\,(2t-1)\, i - 16\right) \mathrm{d}t && (152)\\
&= 0 && (153)
\end{aligned}$$

(3)

$\gamma := t\,(-2-4i) + 2 + 4i$ とすると，$\gamma' = -2 - 4i$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z &= \int_0^1 (t\,(-2-4i) + 2 + 4i)^2 \cdot (-2-4i) \,\mathrm{d}t && (154)\\
&= -\,(2+4i)^3 \int_0^1 (1-t)^2 \,\mathrm{d}t && (155)\\
&= -\frac{1}{3}\,(2+4i)^3 && (156)\\
&= \frac{88}{3} + \frac{16}{3} i && (157)
\end{aligned}$$

(4)

$\gamma := 2t + 4t^2 i$ とすると，$\gamma' = 2 + 8it$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(2t + 4t^2 i\right)^2 \cdot (2 + 8it) \,\mathrm{d}t && (158)\\
&= \int_0^1 \left(-128it^5 - 160t^4 + 64it^3 + 8t^2\right) \mathrm{d}t && (159)\\
&= -\frac{88}{3} - \frac{16}{3} i && (160)
\end{aligned}$$

24 B6.3

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f_n(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ から

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b [f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))]\,\gamma'(t)\right| \tag{161}$$

$$\leq \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{162}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |\gamma(t)| \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|\,\mathrm{d}t \tag{163}$$

$\{f_n\}_n$ は一様収束であるから，$\int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|\,\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

よって，$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ を示せばいい

$s_n(z) := \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ は $s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ に一様収束するから，$\lim_{N\to\infty} \int_\gamma s_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma s(z)\,\mathrm{d}z$

$\lim_{N\to\infty} \int_\gamma s_n(z) = \lim_{N\to\infty} \int_\gamma \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$

$\int_\gamma s(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z$

25 B6.4

実関数 $u(t), v(t)$ を用いて，$f(t) = u(t) + iv(t)$ と表すと，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ となる

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \tag{164}$$

$$= u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] \tag{165}$$

$$= f(b) - f(a) \tag{166}$$

26 A7.1

$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ から，$\Gamma(t) = -2 + 2t$ とし

(1)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_L f(z)\,\mathrm{d}z \tag{167}$$
$$= -\int_0^1 \frac{2t-2}{(2t-2)^2+1}\cdot 2\mathrm{d}t \tag{168}$$
$$= -\int_{-2}^0 \frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u \tag{169}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{v+1}\mathrm{d}v \tag{170}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log(v+1)\right]_0^4 \tag{171}$$
$$= \frac{1}{2}\log 5 \tag{172}$$

(2)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_L f(z)\,\mathrm{d}z \tag{173}$$
$$= -\int_0^1 \frac{1}{2t-2-i}\cdot 2\mathrm{d}t \tag{174}$$
$$= -\int_0^1 \frac{2t-2+i}{(2t-2)^2+1}\cdot 2\mathrm{d}t \tag{175}$$
$$= \int_0^2 \frac{u+i}{u^2+1}\mathrm{d}u \tag{176}$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log(v+1)\right]_0^4 + i\left[\arctan u\right]_0^2 \tag{177}$$
$$= \frac{1}{2}\log 5 + i\arctan 2 \tag{178}$$

27 A7.2

(1)

$\gamma(t) = a + re^{it}, \gamma'(t) = ire^{it}$

$$\oint_\gamma (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n \cdot ire^{it}\mathrm{d}t \tag{179}$$
$$= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\mathrm{d}t \tag{180}$$
$$= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ ir^{n+1}\cdot \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t & \end{cases} \tag{181}$$
$$= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \tag{182}$$

(2)

$a \notin [\gamma^*]$ のとき，$\dfrac{1}{z-a}$ は正則なので，Cauchy の積分定理より $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z = 0$
$a \in [\gamma^*]$ のとき，a の周りに半径 r の小円 $\phi(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ をとると，Cauchy の積分定理より

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z &= \int_\phi \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z && (183)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it}\mathrm{d}t && (184)\\
&= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t && (185)\\
&= 2\pi i && (186)
\end{aligned}$$

28 B7.3

(1)

三角各辺の中点を結ぶと，分割された四つの三角形は元の三角形と相似比 $\dfrac{1}{2}$ 合同し，各三角形の面積は元の三角形の $\dfrac{1}{4}$ で，周長は元の三角形の $\dfrac{1}{2}$ である．これを繰り返すと，n 回目の分割で得られる三角形の面積は元の三角形の $\dfrac{1}{4^n}$，周長は元の三角形の $\dfrac{1}{2^n}$ となる．よって，元の三角形は常に四つの合同な三角形に分割できる

(2)

Δ_n を四つの合同な三角形に分割したとき，それぞれ $\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}, \Delta_n^{(3)}, \Delta_n^{(4)}$ とする

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sum_{i=1}^4 \left|\int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 4 \cdot \left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{187}$$

よって，帰納的に $\left|\displaystyle\int_\Delta f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 4^n \cdot \left|\displaystyle\int_{\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ から成り立つ

(3)

$\Delta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ から，f が正則であることより，$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z) + o(z)$
$o(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ が成り立つ．また，$\displaystyle\int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z = 0, \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\,\mathrm{d}z = 0$
$d_n := \mathrm{diam}\Delta_n$ とおき，$\forall\epsilon > 0, n$ が十分大きいとき，$|o(z)| \le \epsilon$ となるので

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \epsilon \sup_{\partial\Delta_n} |z - z_0| \cdot |\Delta_n| = \epsilon d_n \cdot |\Delta_n| \tag{188}$$

$d_n = \dfrac{1}{2^n}d_0 = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{diam}(\Delta)$ から，$\epsilon' := \epsilon \cdot \mathrm{diam}(\Delta)$ とおけば元の式が成り立つ

(4)

(2)(3) より，$\dfrac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq C \dfrac{1}{4^n}$ があるから，$M \leq C = \epsilon d_0 |\Delta|$ となり，$M = 0$ である．よって，$\displaystyle\int_{\partial \Delta} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$

29　B7.4

(1) $\Longrightarrow$ (2)

f は D 上で不定積分を持つから，$\forall \alpha \in D, F(z) = \displaystyle\int_{\alpha}^{z} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$ が存在する．D は凸領域であるから，$\forall h > 0$，線分 $z \to z + h$ は D に含まれる
よって，$\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{z}^{z+h} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = \int_{0}^{1} f(z + th) \, \mathrm{d}t$．ここで f は連続であるから，$\displaystyle\int_{0}^{1} f(z + th) \, \mathrm{d}t \xrightarrow{h \to 0} f(z)$ である．よって，$F'(z) = f(z)$ で，原始関数 $F(z)$ が存在する

(2) $\Longrightarrow$ (3)

f は D で原始関数が存在するから，$F'(z) = f(z)$ である．よって

$$\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{\gamma} F'(z) \, \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \tag{189}$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

γ_1, γ_2 が共に α を始点，β を終点とする D 内の曲線とする，$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ とすると

$$0 = \oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z \tag{190}$$

から，$\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z$ が成り立つ．よって，f は D 上で不定積分をもつ

30　B7.5

$C_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ とする. γ と C_r で囲む閉包を Ω_r とする. このとき, f は $\Omega_r \setminus \{z_0\}$ 上で正則で, 三角形分割をすると $\displaystyle\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z - \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{\partial \Omega_r} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ ので, $\displaystyle\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z$
連続性より，$\displaystyle\oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{C_r} (f(z) - f(z_0)) \, \mathrm{d}z$ から

$$\left| \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \sup_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)| \cdot |C_r| = \sup_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)| \cdot 2\pi r \tag{191}$$

ここで $\displaystyle\sup_{|z - z_0| \leq r} |f(z) - f(z_0)| \xrightarrow{r \to 0} 0 \Longrightarrow \lim_{r \to 0} \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$
よって，$\displaystyle\oint_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = \lim_{r \to 0} \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$

31 A8.1

(1)

$\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{(z+i)(z-i)}\Longrightarrow\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2i}\left(\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z-i}\mathrm{d}z-\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z+i}\mathrm{d}z\right)$

Cauchy の積分公式より，$1=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z-i}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z+i}\mathrm{d}z$ から

$\oint_{|z|=3}\dfrac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2i}\left(2\pi i-2\pi i\right)=0$

(2)

$\dfrac{1}{z^2-3}=\dfrac{1}{\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{z-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{z+\sqrt{3}}\right)$

Cauchy の積分公式より，$1=\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z-\sqrt{3}}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z+\sqrt{3}}\mathrm{d}z$ から

$\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z^2-3}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z-\sqrt{3}}\mathrm{d}z-\oint_{|z|=2}\dfrac{1}{z+\sqrt{3}}\mathrm{d}z\right)=0$

(3)

e^z の任意階微分は e^z であるから，Cauchy の積分公式より

$\left(e^z\right)^{(3)}(1)=e=\dfrac{3!}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z-1)^4}\mathrm{d}z\Longrightarrow\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z-1)^4}\mathrm{d}z=\dfrac{2\pi ei}{3!}=\dfrac{1}{3}\pi ei$

(4)

$\sin\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)$ を 2 回微分すると，$-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)$ になり，Cauchy の積分公式より

$-\dfrac{\pi^2}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 1\right)=-\dfrac{\pi^2}{4}=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$

$\Longrightarrow\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{(z-1)^3}\mathrm{d}z=-\dfrac{\pi^3}{4}i$

32 A8.2

(1)

$z=w-1$ とすると

$$f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+3z+3\right)} \tag{192}$$

$$=\frac{1}{(w-1)\left((w-1)^2+3(w-1)+3\right)} \tag{193}$$

$$=\frac{1}{(w-1)\left(w^2+w+1\right)} \tag{194}$$

$\dfrac{1}{(w-1)(w^2+w+1)} = \dfrac{A}{w-1} + \dfrac{Bw+C}{w^2+w+1}$ とおくと，$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{cases}$ から，$\dfrac{1}{(w-1)(w^2+w+1)} = \dfrac{1}{3(w-1)} - \dfrac{w+2}{3(w^2+w+1)}$

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{w-1} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-w}$ であるから，展開すると，$-\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w^n$，ただし，$|w| = |z+1| < 1$

$\dfrac{1}{w^2+w+1} = \dfrac{1-w}{1-w^3}$ があるから，展開すると

$$\frac{w+2}{w^2+w+1} = (w+2)\frac{1-w}{1-w^3} \tag{195}$$

$$= (w+2)(1-w)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} w^{3n} \tag{196}$$

$$= (w+2)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} w^{3n+1}\right) \tag{197}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} w^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} w^{3n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} w^{3n+2} \tag{198}$$

よって

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+3z+3)} = \frac{1}{(w-1)(w^2+w+1)} \tag{199}$$

$$= \frac{1}{3(w-1)} - \frac{w+2}{3(w^2+w+1)} \tag{200}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} w^n - \frac{1}{3}\left(2\sum_{n=0}^{\infty} w^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} w^{3n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} w^{3n+2}\right) \tag{201}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} w^{3n} \tag{202}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{3n} \tag{203}$$

$\Longrightarrow |z+1| < 1$ のとき f は収束し，収束半径は 1 である

(2)

$\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0$ であるから，収束半径は ∞ である

(3)

$f(z) = \dfrac{2z-1}{2-z} = -2 + \dfrac{3}{2-z}$ から

$$\begin{aligned} f(z) &= -2 + \frac{3}{2-z} && (204) \\ &= -2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} && (205) \\ &= -2 + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n && (206) \\ &= -2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} z^n && (207) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow |z| < 2$ であれば，$f(z)$ の収束半径は 2 である

(4)

$w = z - 2$ とすると，$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)} = \dfrac{1}{(w+1)(w-1)} = -\dfrac{1}{1-w^2}$
よって

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{1-w^2} && (208) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} w^{2n} && (209) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{2n} && (210) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow |z-2| < 1$ であれば，$f(z)$ の収束半径は 1 である

33 B8.3

ここで，$|z - z_0| = r$ を γ とすると，Cauchy の積分公式より，$f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$
両辺絶対値を取ると

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \right| && (211) \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \sup_\gamma |f(z)| \cdot \oint_\gamma \gamma'(t)\,\mathrm{d}t && (212) \\ &= \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r && (213) \\ &= \frac{n!M}{r^n} && (214) \end{aligned}$$

34　B8.4

(1)

$\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \dfrac{1}{\zeta - z_0} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$

$|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ であるから，$\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$ が成り立つので

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \tag{215}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \tag{216}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{217}$$

(2)

Cauchy の積分公式より，$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|\zeta - z_0| = r} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$ があって

(1) より $\dfrac{1}{\zeta - z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ であるので

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \tag{218}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \tag{219}$$

(3)

$g_n(\zeta, z) = \dfrac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta)$ とすると，$f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta, z)\, \mathrm{d}z$

$f(\zeta)$ は連続であるから，$\exists M > 0, s.t. |f(\zeta)| < M$ が成り立つので

$|\zeta - z_0| = r$ では $|g_n(\zeta, z)| \leq M \dfrac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}}$

$|z - z_0| \leq \rho < r$ に z を固定すると，$|g_n(\zeta, z)| \leq M \dfrac{\rho^n}{r^{n+1}} = \dfrac{M}{r} \cdot \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n =: M_n$ とすると，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \dfrac{\frac{M}{r}}{1 - \frac{\rho}{r}} < \infty$ から，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta, z)$ は $|z - z_0| \leq \rho < r$ で一様収束するので，個別積分に変換できる．よって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta, z)\, \mathrm{d}\zeta \tag{220}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} g_n(\zeta, z)\, \mathrm{d}\zeta\right) \tag{221}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta\right) \tag{222}$$

よって，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n\right)$

(4)

(3) より，$f(z)$ が正則であれば，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n\right)$ のように展開できる．冪級数の各項は微分できて，同じ区間内も一様収束するので，項別微分できる．よって

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^{n-1}\right) \tag{223}$$

同じ操作を繰り返せば，$\forall m\in\mathbb{N}$

$$f^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^{n-m}\right) \tag{224}$$

$\frac{1}{\zeta-z}$ を z に関して n 回微分すると，$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)=\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}$．これを Cauchy の積分公式に代入すると

$$f^{(n)}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}f(\zeta)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)\Bigg|_{z=a}\right)\mathrm{d}\zeta \tag{225}$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \tag{226}$$

35　B8.5

$h(z)=f(z)-g(z)$ とする，$f(z)=g(z)$ は $|z|=r$ で成り立つから，$|z|=r$ で $h(z)=0$
また，$f(z),g(z)$ は正則であるので，$h(z)$ も正則である．よって，$|z|<r$ では，Cauchy の積分公式より

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{h(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{227}$$

に展開できるが，$|\zeta|=r$ で $h(\zeta)=0$ であるので，$h(z)=0$．よって，$\forall|z|\leq r,f(z)=g(z)$

36　B8.6

(1)

$g(z)$ は $D(z_0,R)$ で正則なので，$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ と展開できる．$z,w\in D(z_0,r)$ を任意にとると

$$\frac{g(z)-g(w)}{z-w}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}g(\zeta)\cdot\frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\right)\mathrm{d}\zeta \tag{228}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}g(\zeta)\cdot\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-w)}\mathrm{d}\zeta \tag{229}$$

$w\to z$ とすると，$(\zeta-w)\to(\zeta-z)$ となるので，$g'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$ となる

(2)

f_n は $D(z_0,R)$ で正則で，f に一様収束なので，$\forall r<R, f_n, f$ は $|\zeta-z_0|=r$ で連続で，Cauchy の積分公式より，$f_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ と展開できる．$f_n(\zeta)\to f(\zeta)$ なので

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{230}$$

よって，f も Cauchy の積分公式を満たすので，f は $D(z_0,R)$ で正則である

(3)

(1) より，$f_n'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta=f'(z)$
よって

$$\left|f_n'(z)-f'(z)\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{|f_n(\zeta)-f(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\zeta \tag{231}$$

$|z-z_0|\le\rho<r$ では，$|\zeta-z|\ge r-\rho$ で，$M_n:=\displaystyle\lim_{|\zeta-z_0|=r}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|$ とおけば

$|f_n'(z)-f'(z)|\le\dfrac{M_n}{(r-\rho)^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ で，$f_n'(z)$ は $f'(z)$ に一様収束する．同様にして，任意回の微分も一様収束する

(4)

$f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ とおくと，$n\to\infty$ にして，$f(x)=|x|$ に一様収束する

$f_n'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$ で，原点で連続でないから，必ず一様収束ではない

37 B8.7

f_n は $D(z_0,R)$ で正則とし，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ が一様収束とする．f_n は正則なので，$s_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}f_n$ も正則であるから，$F:=\displaystyle\lim_{N\to\infty}s_N$ も正則である．B8.6 より，$s_N\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}F$ は一様収束すれば，$s_N'\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}F'$ も一様収束なので，$F'=\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)\right)'$ も一様収束
よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}f_n'(z)$ は $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}f_n(z)\right)'$ に一様収束する

A9.1

(1)

$\lim_{z\to 0}(z-0)^3 f(z)=\lim_{z\to 0}e^z=1\neq 0$ から，$z=0$ は $f(z)$ の 3 位の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,0)&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left((z-0)^3 f(z)\right) &(232)\\ &=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}e^z=\frac{1}{2} &(233)\end{aligned}$$

(2)

$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}\neq 0$ から，$z=i$ は $f(z)$ の 1 位の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,i)&=\lim_{z\to i}\frac{1}{0!}\left((z-i)f(z)\right) &(234)\\ &=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i} &(235)\end{aligned}$$

(3)

$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\neq 0$ から，$z=1$ は $f(z)$ の 1 位の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,1)&=\lim_{z\to 1}\frac{1}{0!}\left((z-1)f(z)\right) &(236)\\ &=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2} &(237)\end{aligned}$$

(4)

$\lim_{z\to 2}(z-2)^2 f(z)=\lim_{z\to 2}z^2=4\neq 0$ から，$z=2$ は $f(z)$ の 2 位の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,2)&=\lim_{z\to 2}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-2)^2 f(z)\right) &(238)\\ &=\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\right)=4 &(239)\end{aligned}$$

A9.2

(1)

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-2}=\frac{(A+B+C)z^2+(-3A-2B-C)z+2A}{z(z-1)(z-2)}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A+B+C=0\\-3A-2B-C=0\\2A=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-1\\C=\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}$$

$z\in A(1;0,1),w=z-1$ とおくと，$0<|z-1|<1\Longrightarrow 0<|w|<1$

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+w}-\frac{1}{w}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w-1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+w}=\dfrac{1}{1-(-w)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\\ \dfrac{1}{w-1}=-\dfrac{1}{1-w}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}w^n\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+w}+\frac{1}{w-1}\right) &(240)\\ &=-\frac{1}{w}+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n-\sum_{n=0}^{\infty}w^n\right) &(241)\\ &=-\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=2k+1\\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}^{\infty}w^n &(242)\\ &=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^{2k+1} &(243)\end{aligned}$$

(2)

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-5)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-1}\right)$$

$z\in A(0;1,5)\Longrightarrow 1<|z|<5\Longrightarrow \dfrac{|z|}{5},\dfrac{1}{|z|}<1$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z-5}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{5}}=\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n\\ \dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\end{cases}$$

よって，$f(z)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)=\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$

(3)

$z\in A(0;5,\infty)\Longrightarrow 5<|z|<\infty\Longrightarrow \dfrac{1}{|z|},\dfrac{5}{|z|}<1$ から

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z-5}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{5}{z}}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n\\ \dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\end{cases}$$ ．よって

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-1}\right) &(244)\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) &(245)\\ &=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(5^n z^{-(n+1)}-z^{-(n+1)}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n-1)\,z^{-(n+1)} &(246)\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{(z-2)^2}=\frac{(A+B)z^2+(-4A-3B+C)z+(4A+2B-C)}{(z-1)(z-2)^2}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -4A-3B+C=0 \\ 4A+2B-C=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$ から

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2} \tag{247}$$

$z\in A(2;0,1)\Longrightarrow 0<|z-2|<1, w=z-2$ とおくと，$0<|w|<1$

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{w+1}-\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2} &(248)\\ &=\frac{1}{w^2}-\frac{1}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n &(249)\\ &=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^n &(250)\end{aligned}$$

A9.3

(1)

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{e^z}{z^2} &(251)\\ &=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} &(252)\\ &=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n &(253)\\ &\xrightarrow{z\to 0}\infty &(254)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow z=0$ は $f(z)$ の極であり，$\lim_{z\to 0}(z-0)^2\frac{e^z}{z^2}=1\neq 0$ なので，$z=0$ は $f(z)$ の 2 位の極である

(2)

$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{\sin z}{z} &(255)\\ &=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} &(256)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} &(257)\end{aligned}$$

$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}=0\Longrightarrow z=0$ は $f(z)$ の除去可能特異点である

(3)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= ze^{\frac{1}{z}} && (258)\\
&= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} && (259)\\
&= z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^{-n} && (260)
\end{aligned}
$$

ここで，主要部は無限項があるので，$z=0$ は $f(z)$ の真性特異点である

B9.4

(1)

$\Longrightarrow$
a が f の除去可能特異点であるとすると，$\exists F\in D(a,r), s.t. F_{D^*(a,r)}=f$．ここで，$F$ は a で正則であるから，$\exists\alpha<\infty, s.t. \lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}F(z)=\alpha\in\mathbb{C}$
$\Longleftarrow$
$\lim_{z\to a}f(z)=\alpha\in\mathbb{C}$ とすると，Laurent 展開すれば $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, 0<|z-a|<r$ から，もし $c_{-m}\neq 0$ をみたす $m\geq 1$ が存在すると，$M:=\max\{m\}$ とし，$(z-a)^M f(z)=c_{-M}+\sum_{k\geq 1}c_{-M+k}(z-a)^k\stackrel{z\to a}{\longrightarrow}c_{-M}\neq 0\Longrightarrow|f(z)|\to\infty$ となり，$\lim_{z\to a}f(z)=\alpha$ と矛盾する．よって $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ から，除去可能特異点である

(2)

$\Longrightarrow$
a が f の極であるとすると，$\exists N\in\mathbb{N}, s.t. c_{-N}\neq 0, c_{-n}=0\,(n<-N)$
$\Longrightarrow f(z)=(z-a)^{-N}g(z)\Longrightarrow|f(z)|=|z-a|^{-N}|g(z)|\to\infty$
$\Longleftarrow$
$\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$ とすると, $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}\stackrel{|f(z)|\to\infty}{\longrightarrow}0\Longrightarrow g(z)$ は $D^*(a,r)$ で正則である. よって, a は $g(z)$ の除去可能特異点であり, $g(a)=0$ とすると, 位数を N とすれば, $g(z)=(z-a)^N h(z)$.
よって，$f(z)=\dfrac{1}{g(z)}=\dfrac{1}{(z-a)^N h(z)}=\dfrac{k(z)}{(z-a)^N}$ になる．i.e.a は f の極である

A10.1

(1)

$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{1-z}=-1\neq 0$ から，1 は $f(z)$ の 1 級の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,1)&=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) \quad (261)\\ &=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{1-z}=-1 \quad (262)\\ \int_{|z|=2}\frac{1}{1-z}\mathrm{d}z&=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,1) \quad (263)\\ &=2\pi i\cdot(-1)=-2\pi i \quad (264)\end{aligned}$$

(2)

$f(z)=\frac{2}{z^2-1}=\frac{2}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}$

$$\begin{cases}\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\lim_{z\to 1}\left(1-\frac{z-1}{z+1}\right)=1-\frac{0}{2}=1\\ \lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{z+1}{z-1}-1\right)=\frac{0}{-2}-1=-1\end{cases}$$

から，± 1 は $f(z)$ の 1 級の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,1)&=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=1 \quad (265)\\ \mathrm{Res}(f,-1)&=\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=-1 \quad (266)\\ \int_{|z|=2}\frac{2}{z^2-1}\mathrm{d}z&=2\pi i\cdot(\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)) \quad (267)\\ &=2\pi i\cdot(1-1)=0 \quad (268)\end{aligned}$$

(3)

$f(z)=\frac{1}{\sin z}$ の特異点は $z=0, z=\pi$ で，$\pi>1$ から正則になり，以下は $z=0$ しか考えない

$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1\neq 0$ から，0 は $f(z)$ の 1 級の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,0)&=\lim_{z\to 0}zf(z) \quad (269)\\ &=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1 \quad (270)\\ \int_{|z|=1}\frac{1}{\sin z}\mathrm{d}z&=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0) \quad (271)\\ &=2\pi i\cdot 1=2\pi i \quad (272)\end{aligned}$$

(4)

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} \tag{273}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)} \tag{274}$$

$$\mathrm{Res}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 1 \tag{275}$$

$$\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) \tag{276}$$

$$= 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i \tag{277}$$

A10.2

(1)

$F(z) = \dfrac{1}{6+\sin t} = \dfrac{1}{6+\frac{z-z^{-1}}{2i}} = \dfrac{2iz}{z^2+12iz-1} = \dfrac{2iz}{\left(z-\frac{-12-2\sqrt{35}}{2}i\right)\left(z-\frac{-12+2\sqrt{35}}{2}i\right)}$

$\left|\dfrac{-12-2\sqrt{35}}{2}i\right| > 1$ から正則で，$z = \dfrac{-12+2\sqrt{35}}{2}i$ は $\dfrac{F(z)}{z}$ の極である

$a = \dfrac{-12+2\sqrt{35}}{2}i$ とすると，$\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z} \neq 0$ から，a は 1 級の極である

$$\mathrm{Res}\left(\frac{F(z)}{z}, a\right) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z} \tag{278}$$

$$= \lim_{z\to a}\frac{2i}{z-\frac{-12-2\sqrt{35}}{2}i} \tag{279}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}} \tag{280}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{6+\sin t}\mathrm{d}t = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{F(z)}{z}, a\right) \tag{281}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{35}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{35}} \tag{282}$$

(2)

$F(z) = \dfrac{1}{2-\sin t} = \dfrac{1}{2-\frac{z-z^{-1}}{2i}} = \dfrac{-2iz}{z^2-4iz-1} = \dfrac{-2iz}{\left(z-\frac{4-2\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}i\right)}$

$\left|\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}i\right| > 1$ から正則で，$z = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}i =: a$ は $\dfrac{F(z)}{z}$ の極である

$\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z}\neq 0$ から，a は 1 級の極である

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z} \tag{283}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{-2i}{z-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}i} \tag{284}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{285}$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{2-\sin t}\mathrm{d}t=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right) \tag{286}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{3}i}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tag{287}$$

(3)

$\displaystyle F=\frac{1}{7-2\cos t}=\frac{-z}{z^2-7z+1}=\frac{-z}{\left(z-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}$

$\displaystyle\left|\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right|>1$ から正則で，$\displaystyle z=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}=:a$ は $\displaystyle\frac{F(z)}{z}$ の極である

$\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z}\neq 0$ から，a は 1 級の極である

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z} \tag{288}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{-1}{z-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \tag{289}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{5}} \tag{290}$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{7-2\cos t}\mathrm{d}t=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right) \tag{291}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}i}=\frac{2\pi}{3\sqrt{5}} \tag{292}$$

(4)

$\displaystyle F(z)=\frac{1}{5-4\sin t}=\frac{-iz}{2z^2-5iz-2}=\frac{-iz}{(z-2i)(2z-i)}$

$|2i|>1$ から正則で，$\displaystyle z=\frac{1}{2}i=:a$ は $\displaystyle\frac{F(z)}{z}$ の極である

$\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)\frac{F(z)}{z}\neq 0$ から，a は 1 級の極である

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\frac{F(z)}{z} \tag{293}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{-i}{2z-4i}=\frac{1}{3} \tag{294}$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{5-4\sin t}\mathrm{d}t=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{z},a\right) \tag{295}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{3i}=\frac{2\pi}{3} \tag{296}$$

A11.1

$$z^4+1=0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z^4+1 = \begin{cases} (z-z_1)\left(z^3 + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z^2 + \dfrac{(1+i)^2}{2}z + \dfrac{(1+i)^3}{2\sqrt{2}}\right) \\ (z-z_2)\left(z^3 + \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}z^2 + \dfrac{(-1+i)^2}{2}z + \dfrac{(-1+i)^3}{2\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$\Longrightarrow z_1, z_2$ はともに１級の極である

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \tag{297}$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z^3 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}z^2 + \frac{(1+i)^2}{2}z + \frac{(1+i)^3}{2\sqrt{2}}} \tag{298}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)^3} \tag{299}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) \tag{300}$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{z^3 + \frac{-1+i}{\sqrt{2}}z^2 + \frac{(-1+i)^2}{2}z + \frac{(-1+i)^3}{2\sqrt{2}}} \tag{301}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)^3} \tag{302}$$

$\Gamma_R := Re^{it} \vee [-R, R], t \in [0, \pi]$ とおくと

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R} f(z)dz \tag{303}$$

$$= 2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res} \tag{304}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)^3} + \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)^3}\right) \tag{305}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{306}$$

$\left|\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\mathrm{d}z\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{R}{1+R^4e^{4it}}\right|\mathrm{d}t \le \pi\cdot\frac{R}{R^4-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ から $\left|\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1}$

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{\pi R}{R^4-1} \le \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^4-1} \tag{307}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^4-1} = \lim_{R\to\infty} -\frac{\pi R}{R^4-1} = 0 \tag{308}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{309}$$

A11.2

(1)

$\dfrac{e^{iz\xi}}{1+z^2}$ の上半円の特異点は $z=i$ であり $\lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{e^{-iz\xi}}{(z-i)(z+i)}=-\dfrac{1}{2}ie^{-\xi}\neq 0$ なので，１級の極である

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,i)&=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2} &(310)\\ &=\lim_{z\to i}\frac{e^{-iz\xi}}{z+i} &(311)\\ &=-\frac{1}{2}ie^{\xi} &(312)\\ \int_{\gamma_R}\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}\mathrm{d}z+\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int_{\Gamma_R}\frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}\mathrm{d}z &(313)\\ &=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,i)=\pi e^{\xi} &(314)\end{aligned}$$

ここで，$\left|\int_{\gamma_R}\dfrac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^{\pi}\left|\dfrac{Re^{-it\xi}}{1+R^2e^{2it}}\right|\mathrm{d}t\leq\dfrac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow{R\to\infty}0$ から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi e^{\xi} \tag{315}$$

(2)

$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2\right)\mathrm{d}x$
図のように積分路を考える
$\gamma_1(t)=2Rt-R,\gamma_2(t)=-i\xi t+R,\gamma_3(t)=-2Rt+R-i\xi,\gamma_4(t)=i\xi t-R-i\xi,t\in[0,1]$
$R\to\infty$ になると，$\displaystyle\int_{\gamma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_4}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z=0$
この部分に対して，$\left|\displaystyle\int_{\gamma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z\right|\leq\int_0^1\left|\exp\left(-\frac{1}{2}(R+i\xi(1-t))^2\right)\right|\cdot|i\xi|\,\mathrm{d}t$ で，右側の被積分関数を e^{x+yi} の形に書くと, 積分値に影響を与えるのは $\exp\left(-\dfrac{1}{2}R^2\right)$ で, $R\to\infty$ とすると 0 になる

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z&=\int_{\gamma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z &(316)\\ &+\int_{\gamma_3}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_4}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z &(317)\\ &=\int_{\gamma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\exp\left(-\frac{1}{2}(z+i\xi)^2\right)\mathrm{d}z &(318)\\ &=\int_{-R}^{R}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2\right)\mathrm{d}x+\int_{R}^{-R}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-i\xi+i\xi)^2\right)\mathrm{d}x &(319)\\ &=0 &(320)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2\right)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\exp\left(-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2\right)\mathrm{d}x \tag{321}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \tag{322}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \tag{323}$$

(3)

$$z^4+1=0 \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z^4+1 = \begin{cases} (z-z_1)\left(z^3+\frac{1+i}{\sqrt{2}}z^2+\frac{(1+i)^2}{2}z+\frac{(1+i)^3}{2\sqrt{2}}\right) \\ (z-z_2)\left(z^3+\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z^2+\frac{(-1+i)^2}{2}z+\frac{(-1+i)^3}{2\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

$\Longrightarrow z_1, z_2$ はともに１級の極である

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \tag{324}$$

$$= \lim_{z\to z_1}\frac{e^{-iz\xi}}{z^3+\frac{1+i}{\sqrt{2}}z^2+\frac{(1+i)^2}{2}z+\frac{(1+i)^3}{2\sqrt{2}}} \tag{325}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1-i)\right)}{\sqrt{2}(1+i)^3} \tag{326}$$

$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) \tag{327}$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{e^{-iz\xi}}{z^3+\frac{-1+i}{\sqrt{2}}z^2+\frac{(-1+i)^2}{2}z+\frac{(-1+i)^3}{2\sqrt{2}}} \tag{328}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1+i)\right)}{\sqrt{2}(-1+i)^3} \tag{329}$$

$\Gamma_R := Re^{it}\vee[-R,R], t\in[0,\pi]$ とおくと

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ix\xi}}{x^4+1}\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}\frac{e^{-iz\xi}}{z^4+1}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_R}f(z)dz \tag{330}$$

$$= 2\pi i\cdot\sum\mathrm{Res} \tag{331}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1-i)\right)}{\sqrt{2}(1+i)^3}+\frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1+i)\right)}{\sqrt{2}(-1+i)^3}\right) \tag{332}$$

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{-iz\xi}}{z^4+1}\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\exp\left(-i\xi\left(Re^{it}\right)\right)}{R^4e^{4it}+1}\right|\cdot\left|iRe^{it}\right|\mathrm{d}t \tag{333}$$

$$\leq \int_0^\pi \mathrm{d}t\cdot\frac{R}{R^4-1} \tag{334}$$

$$= \frac{\pi R}{R^4-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{335}$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{x^4+1}\mathrm{d}x = 2\pi i\left(\frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1-i)\right)}{\sqrt{2}(1+i)^3}+\frac{\exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}(1+i)\right)}{\sqrt{2}(-1+i)^3}\right) \tag{336}$$

$$= \frac{\pi i e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}\left(-(1+i)\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}-i\sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)+(1-i)\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{337}$$

$$= \frac{\pi e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \tag{338}$$

B11.3

$f(z)=e^{iz^2}$ を考える．特異点は Γ_R に存在しないから，$\mathrm{Res}=0$ で，$\displaystyle\int_{\Gamma_R}e^{iz^2}=0$

$$\int_{\Gamma_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^R e^{iz^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z+\int_{R\exp\frac{\pi}{4}i}^0 e^{iz^2}\mathrm{d}z \tag{339}$$

で，$\gamma_R(t)=Re^{it}, t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とすると，$\gamma_R'(t)=iRe^{it}$

$$\left|\int_{\gamma_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\exp\left(i\left(Re^{it}\right)^2\right)\right|\cdot\left|iRe^{it}\right|\mathrm{d}t \tag{340}$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\exp\left(R^2\left(i\cos(2t)-\sin(2t)\right)\right)\right|\mathrm{d}t \tag{341}$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|e^{-R^2\sin(2t)}\right|\mathrm{d}t \tag{342}$$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ では，$x<\sin(2x)$ であるから

$$\left|\int_{\gamma_R}e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| < R\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2t}\mathrm{d}t = R\left[-\frac{1}{R^2}e^{-R^2t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{343}$$

また，$z(t)=-Rte^{\frac{\pi}{4}i}, t\in[0,1]$ とおくと，$z'(t)=-Re^{\frac{\pi}{4}i}$ で

$$\int_{R\exp\frac{\pi}{4}i}^0 e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^1\exp\left(-R^2t^2\right)\cdot\left(-Re^{\frac{\pi}{4}i}\right)\mathrm{d}t \tag{344}$$

$$= -e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{345}$$

$$\int_{\infty\exp\frac{\pi}{4}i}^0 e^{iz^2}\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}-e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{346}$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \tag{347}$$

以上より

$$0 = \int_0^\infty e^{iz^2}\mathrm{d}z + 0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \tag{348}$$

$$\int_0^\infty e^{iz^2}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \tag{349}$$

ここで，$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}i$

求めたい積分に対して，$\int_0^\infty e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^\infty \cos\left(z^2\right)\mathrm{d}z + i\int_0^\infty \sin\left(z^2\right)\mathrm{d}z$ から

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tag{350}$$

B11.4

(1)

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ とおくと，特異点 $z=0$ に対して，$\lim_{z\to 0} zf(z) = 1 \neq 0$ から，１級の極であり，$\mathrm{Res}\,(f,0) = 1$ から，$\gamma_a = \gamma_a^- \vee \gamma_a^+$ では

$$\int_{\gamma_a} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_a^-} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_a^+} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{351}$$

$$= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\,(f,0) = 2\pi i \tag{352}$$

$[-\epsilon,-R]\,,[\epsilon,R]$ は $z=0$ を通わないから，積分路 $\gamma_R^- = [-R,-\epsilon] \vee \gamma_\epsilon^- \vee [\epsilon,R]$ と変換できる．よって

$$\int_{\gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_\epsilon^R \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z \tag{353}$$

$\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -\int_\epsilon^R \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z$ から

$$\int_{\gamma_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_\epsilon^R \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z \tag{354}$$

$$= \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z \tag{355}$$

から，γ_R^+ を含めると

$$2\pi i = \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R^+}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z \tag{356}$$

(2)

$$\left|\int_{\gamma_R^+}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\right|\cdot\left|iRe^{it}\right|\mathrm{d}t \tag{357}$$

$$= \int_0^\pi \left|\frac{e^{-R\sin t+iR\cos t}}{Re^{it}}\cdot R\right|\mathrm{d}t \tag{358}$$

$$= e^{-R\sin t}\int_0^\pi \mathrm{d}t \tag{359}$$

$$= \pi e^{-R\sin t} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \tag{360}$$

(3)

$\displaystyle\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \pi i$ から

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \pi i\right| = \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{1}{z}\mathrm{d}z\right| \tag{361}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}-1}{z}\mathrm{d}z\right| \tag{362}$$

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}-1}{z}\mathrm{d}z\right| \leq \int_{\gamma_\epsilon^-}\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right|\mathrm{d}z \tag{363}$$

$$\leq \max_{z\in\gamma_\epsilon^-}\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right|\cdot\pi \tag{364}$$

$$\leq \pi\epsilon e^{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0 \tag{365}$$

(4)

(2) と (3) の極限を (1) に代入すると

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{\gamma_\epsilon^-}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R^+}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z + 2i\int_\epsilon^R\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z\right) = 2\pi i \tag{366}$$

$$\pi i + 0 + 2i\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_\epsilon^R\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \tag{367}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} \tag{368}$$

(5)

$a_n := \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, b_n := \int_{1}^{n} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ から，$\dfrac{\sin x}{x}$ は $[0,1]$ で有界である．よって，$\exists M > 0, s.t. \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq M$．$m > n$ を任意にとると

$$|a_m - a_n| = \left|\int_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \tag{369}$$

$$= \left|\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \tag{370}$$

$$\leq M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{371}$$

から，a_n は Cauchy 列である
同様に，$m > n$ を任意に取り

$$|b_m - b_n| = \left|\int_{1}^{m} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_{1}^{n} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \tag{372}$$

$$= \left|\int_{n}^{m} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \tag{373}$$

$$= \left|\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{n}^{m} - \int_{n}^{m} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\right| \tag{374}$$

$$= \left|\frac{\cos n}{n} - \frac{\cos m}{m} - \int_{n}^{m} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\right| \tag{375}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \int_{n}^{m} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \tag{376}$$

$$\leq \frac{3}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{377}$$

よって，b_n も Cauchy 列である
$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ であるので，$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ は収束し，広義積分は存在する