Contents

1 基礎

Definition 1.1. 極形式

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \begin{cases} r = |z| > 0 \\ \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}z}{|z|}, \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}z}{|z|} \end{cases}$ をみたす $\theta \in \mathbb{R}$ をとれば，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
と書くことができる，この θ を z の偏角といい，$\arg z$ で表す
$\arg z = \{\theta + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\} = \theta + 2n\mathbb{Z}$ であるから，偏角を $(-\pi, \pi]$ に制限すると一意的に定まるので，これを主値といい，$\mathrm{Arg}z$ で表す

Remark 1.2. $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

1. $\arg(zw) = \arg z + \arg w$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z$
3. $\arg\left(\dfrac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z$

Proposition 1.3. $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \end{cases}$ と極形式で書かれているとき，$\begin{cases} zw = r\rho(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{\rho}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)) \end{cases}$
と極形式表示される

Proof.

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) && (1) \\ &= r\rho(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)) && (2) \\ &= r\rho(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) && (3) \\ \frac{1}{w} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos\phi + i\sin\phi} && (4) \\ &= \frac{1}{\rho}(\cos\phi - i\sin\phi) = \frac{1}{\rho}(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) && (5) \end{aligned}$$

□

Corollary 1.4. de Moivre
$\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Definition 1.5. 複素平面での距離
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, d(\alpha, \beta) := |\alpha - \beta|$ と定義すれば，d は $\mathbb{C}$ 上の距離となる
$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, J(a_1, a_2) := a_1 + ia_2$ とすると，J は同相写像で，$J^{-1}(z) = (\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$

Definition 1.6. 開円板
$z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ は開円板で，$\{D(z_0, r) : r > 0\}$ は z_0 の基本近傍系である

Definition 1.7. 内点・開集合
z_0 が U の内点である $\iff \exists\epsilon > 0, s.t. D(z_0, \epsilon) \subset U$
U は開集合 $\iff$ U の全ての点が U の内点 $\iff$ $U = \mathrm{Int}U \iff \partial U \cap U = \emptyset$

Definition 1.8. 連結
$U \subset \mathbb{C}, U$ は連結である $\iff$ 距離空間 (U, d_U) における開かつ閉である部分集合は U と $\emptyset$ のみ
$\iff$ 以下をみたす空でない開集合 V, W は存在しない

1. $U \subset V \cup W$
2. $U \cap V \cap W = \emptyset$
3. $U \cap V \neq \emptyset$
4. $U \cap W \neq \emptyset$

Definition 1.9. 弧状連結
$V\,(\subset \mathbb{C})$ が弧状連結である $\iff$ V 内の任意の 2 点を V 内の連続な曲線で結べる
$i.e. \forall z, w \in V, \exists \gamma \in C\left([0,1], \mathbb{C}\right), s.t. \gamma\left(0\right) = z, \gamma\left(1\right) = w, \gamma\left([0,1]\right) \subset V$

Definition 1.10. 領域
$\Omega \subset \mathbb{C}$ が領域である $\iff$ Ω は連結な開集合 $\iff$ Ω は弧状連結な開集合

Definition 1.11. 極限
$f : D\,(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, z_0 \in \overline{D}$
f の z_0 での極限値が w である
$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f\left(z\right) - w| < \epsilon$
$\iff \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re} f\left(z\right) = \mathrm{Re} w$ かつ $\lim_{z \to z_0} \mathrm{Im} f\left(z\right) = \mathrm{Im} w$

Definition 1.12. 数列の収束
数列 $\left\{a_n\right\}_n$ が $a\,(\in \mathbb{C})$ に収束する $\iff \lim_{n \to \infty} |a_n - a| = 0$
$\iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \epsilon$
$\iff \lim_{n \to \infty} \mathrm{Re} a_n = \mathrm{Re} a$ かつ $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Im} a_n = \mathrm{Im} a$

Definition 1.13. Cauchy 列
数列 $\left\{a_n\right\}_n$ が Cauchy 列である
$\iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \implies |a_n - a_m| < \epsilon$
$\iff \left\{\mathrm{Re} a_n\right\}_n$ と $\left\{\mathrm{Im} a_n\right\}_n$ が共に Cauchy 列である

Theorem 1.14. 距離空間 $(\mathbb{C}, d)$ は完備である．言い換えれば任意の Cauchy 列は収束する

Proof. $\left\{a_n\right\}_n$ を $\mathbb{C}$ 内の Cauchy 列とすると，$\left\{\mathrm{Re} a_n\right\}_n$ と $\left\{\mathrm{Im} a_n\right\}_n$ は $\mathbb{R}$ 内の Cauchy 列で，$\mathbb{R}$ の完備性から収束する．$i.e. a := \exists \lim_{n \to \infty} \mathrm{Re} a_n, b := \exists \lim_{n \to \infty} \mathrm{Im} a_n$，このとき，$|a_n - (a + bi)|^2 = (\mathrm{Re} a_n - a)^2 + (\mathrm{Im} a_n - b)^2 \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ □

Definition 1.15. 級数の収束
複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する $\iff$ 部分和 $S_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$ からなる数列 $\left\{S_m\right\}_m$ が収束する．このとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$ で定義する

$$S_m = \mathrm{Re} S_m + i \mathrm{Im} S_m = \sum_{n=0}^{m} \mathrm{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{m} \mathrm{Im} a_n$$ なので，$\sum_{n=0}^{\infty}$ が収束する $\iff \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im} a_n$ が共に収束する

Definition 1.16. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束する $\iff \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im} a_n$ が共に絶対収束する

Definition 1.17. 関数の連続性
$f : D\,(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, f$ が $z_0 \in D$ で連続である
$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall z \in D, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$
$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
f は D' 上で連続である $\iff$ 任意の $z \in D'$ で f は連続
f は連続 $\iff$ f は定義域 D 上連続 $\forall U \subset \mathbb{C}$ の f による逆像 $f^{-1}(U)$ も（(D, d) で）開になる

Definition 1.18. 関数列の一様収束
関数列 $\{f_n\}_n$ が f に D 上で一様収束する $\iff$ $\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$
一様ノルム $\|f\|_D := \sup_{z \in D} |f(z)|$ を使えば $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_D = 0$ とかける

Remark 1.19. 連続関数空間
$C(D, \mathbb{C}) := \{f : D \to \mathbb{C} : \text{連続}\}$ とおくと,$f, g \in C(D, \mathbb{C})$ に対して $\begin{cases} (f+g)(z) := f(z) + g(z) \\ (\lambda f)(z) = \lambda f(z) \end{cases}$
で，零元は定数関数 0，一様ノルム $\|f\|_\infty := \sup_{z \in D} |f(z)|$ は $C(D, \mathbb{C})$ 上のノルムになっいて
$d(f, g) := \|f - g\|_\infty$ は $C(D, \mathbb{C})$ 上の距離関数

Definition 1.20. 関数項級数の収束
関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が収束 $\iff$ 部分和 $F_m := \sum_{n=1}^{m} f_n$ からなる関数列 $\{F_m\}_m$ が収束
このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} f_n$ で定義する

Theorem 1.21. $f_n : D \to \mathbb{C}$：連続. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : D$ 上一様収束 $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も D 上連続

Theorem 1.22. M-判定法
$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は D 上一様収束

Definition 1.23. 冪級数の収束半径
冪級数 $\sum_{n}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 r は $r = \dfrac{1}{\lim_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \in [0, \infty]$ で与えられる
$\sum_{n}^{\infty} a_n z^n$ は $D(0, r)$ 上で収束半径内で連続で，$D(0, r)$ 内の任意の有界閉集合（コンパクト）上で一様収束する

2　複素関数の微分

Definition 2.1. 微分係数
$f : D \to \mathbb{C}, z_0 \in \mathrm{Int}D$
f が z_0 で微分可能である $\iff \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ の $z = z_0$ での極限が存在する．このとき，この極限値を f の z_0 での微分係数といい，$f'(z_0)$ や $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0)$ などで表す
D が開集合で，f が任意の D 上の点で微分可能なとき，対応 $D \to \mathbb{C}, z \mapsto f'(z_0)$ を f の導関数という

Definition 2.2. 正則・整関数
$D \subset \mathbb{C}$：開集合，$f : D \to \mathbb{C}$
f は D 上で正則である $\iff$ f は D 内の任意の点で微分可能．特に，$D = \mathbb{C}$ のとき，$\forall z \in \mathbb{C}$ で微分可能な関数を整関数とよぶ

2.1　Cauchy-Riemann の関係式

$f : D\,(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, x_0 + y_0 i = z_0 \in D$ とする
$F : J^{-1}(D) \to \mathbb{R}^2, \widetilde{f} : J^{-1}(D) \to \mathbb{C}, \widetilde{f} := f \circ J, F(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$
$u := \mathrm{Re} f \circ J, v := \mathrm{Im} f \circ J, u, v : J^{-1}(D)\left(\subset \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{Z}$ で，$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in J^{-1}(D)$

$$f(x + yi) = \widetilde{f}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{6}$$

Theorem 2.3. 1 点での微分可能性
$f : D \to \mathbb{C}, z_0 \in \mathrm{Int}D, x_0 := \mathrm{Re}z_0, y_0 := \mathrm{Im}z_0$ で，以下同値：

1. f は z_0 で　微分可能である

2. u, v は共に z_0 で微分可能で，$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$

   このとき，$f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$

Proof. $(i) \Longrightarrow (ii)$
$f'(z_0) = \lim_{w \to 0} \dfrac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} \iff \lim_{w \to 0} \dfrac{|f(z_0 + w) - f(z_0) - f'(z_0)w|}{|w|} = 0$
分子について，$w = h + ik, \alpha := \mathrm{Re}f'(z_0), \beta := \mathrm{Im}f'(z_0)$ とおいて，f を u, v を使って書くと

1. $f(z_0 + w) = f(x_0 + h + i(y_0 + k)) = u(x_0 + h, y_0 + k) + iv(x_0 + h, y_0 + k)$

2. $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$

3. $f'(z_0)w = (\alpha + \beta i)(h + ki) = (\alpha h - \beta k) + i(\beta h + \alpha k)$

$(I) = f(z_0 + w) - f(z_0) - f'(z_0)w = (II) + i(III)$
$\begin{cases} (II) = u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h - \beta k) \\ (III) = v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (\beta h + \alpha k) \end{cases}$ となっているので

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(z_0 + w) - f(z_0) - f'(z_0)w|}{|w|} = 0 \iff \lim_{h,k \to 0} \frac{\sqrt{(II)^2 + (III)^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$\iff \lim_{h,k\to 0} \frac{|(II)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ かつ $\lim_{h,k\to 0} \frac{|(III)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$
$\lim_{h,k\to 0} \frac{|(II)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \alpha \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\beta \end{cases}$
$\lim_{h,k\to 0} \frac{|(III)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \beta \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = \alpha \end{cases}$
$(ii) \Longrightarrow (i)$
$f \circ J = u + vi$ だったので
$f(z_0+w) - f(z_0)$ の実部は $u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) \overset{\text{一次近似}}{\simeq} hu_x(x_0,y_0) + ku_y(x_0,y_0)$
$f(z_0+w) - f(z_0)$ の虚部は $v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0,y_0) \simeq hv_x(x_0,y_0) + kv_y(x_0,y_0)$
ここで Cauchy-Riemann の関係式より

$$\begin{aligned} & hu_x(x_0,y_0) + ku_y(x_0,y_0) + i(hv_x(x_0,y_0) + kv_y(x_0,y_0)) && (7)\\ &= (h+ki)(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)) && (8)\\ &= (h+ki)(v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0)) && (9) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z_0+w) - f(z_0)}{w} - (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)) \right|^2 && (10)\\ &= \frac{1}{h^2+k^2}(u(x_0+h,y_0+k) - u(x_0,y_0) - (hu_x(x_0,y_0) + ku_y(x_0,y_0)))^2 && (11)\\ &+ \frac{i}{h^2+k^2}(v(x_0+h,y_0+k) - v(x_0,y_0) - (hv_x(x_0,y_0) + kv_y(x_0,y_0)))^2 && (12)\\ &\overset{h,k\to 0}{\longrightarrow} 0 && (13) \end{aligned}$$

よって，$f'(z_0) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w) - f(z_0)}{w} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$ □

Remark 2.4. u, v の可微分性のチェックが必要
実関数 u, v の微分と偏微分の関係：$u : \widetilde{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

1. u は $\widetilde{D}$ 上微分可能で u' も連続
2. u は x, y について偏微分可能で，u_x, u_y は $\widetilde{D}$ 上連続

Corollary 2.5. $D \subset \mathbb{C}$：開集合，$f : D \to \mathbb{C}$，次は同値

1. f は D 上で正則で，f' は連続
2. $u = \mathrm{Re}(f \circ J), v = \mathrm{Im}(f \circ J)$ が共に $J^{-1}(D)$ 上で C^1 級で，$J^{-1}(D)$ 上で Cauchy-Riemann 関係式をみたす

Remark 2.6. u が $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ で微分可能
$\iff \exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, s.t. \lim_{h,k\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0+k) - u(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$
このとき，$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0), b = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Proposition 2.7. $\Omega \subset \mathbb{C}$：領域，$f : \Omega$ 上正則で f' は連続で，次のうちどれか一つが成り立てば，f は Ω 上定数関数

1. $\forall z \in \Omega :, f'(z) = 0$

2. $\mathrm{Re}f$ は Ω 上で定数
3. $\mathrm{Im}f$ は Ω 上で定数
4. $|f|$ は Ω 上で定数

Proof. $f'(x+yi) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ で，u_x, u_y, v_x, v_y は連続

1. $f' \equiv 0 \text{ in } \Omega \iff u_x \equiv 0 \equiv u_y, v_x \equiv 0 \equiv v_y \text{ in } J^{-1}(\Omega)$ から，u, v は $J^{-1}(\Omega)$ は定数である
2. $\mathrm{Re}f \text{ in } \Omega$ が定数 $\iff u \text{ in } J^{-1}(\Omega)$ が定数 $\iff u_x \equiv 0 \equiv u_y \text{ in } J^{-1}(\Omega)$
   Cauchy-Riemann の関係式より $\begin{cases} v_x = -u_y = 0 \\ v_y = u_x = 0 \end{cases}$ から，v も $J^{-1}(\Omega)$ 上で定数
3. $\mathrm{Im}f$ が Ω で定数 $\iff v$ は $J^{-1}(\Omega)$ で定数なので，(2) と同様に示せる
4. $\exists c \geq 0, s.t. \forall z \in \Omega, |f(z)| = c$
   $c = 0$ のときは，$f \equiv 0 \text{ in } \Omega$
   $c > 0$ とすると，$\forall (x,y) \in J^{-1}(\Omega), c^2 = |f(x+yi)|^2 = (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2$
   両辺を x, y で偏微分すれば，$J^{-1}(\Omega)$ 上で $\begin{cases} 0 = u \cdot u_x + v \cdot v_x \\ 0 = u \cdot u_y + v \cdot v_y \end{cases}$
   行列表記すれば，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$

□

Definition 2.8. 調和関数
$u : O\left(\subset \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R} : C^2$ 級
u が調和関数である $\iff u$ は Laplace 方程式 $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ をみたす

Definition 2.9. 共役調和
$u, v : O\left(\subset \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R}$：調和
v は u の共役調和関数である $\iff u, v$ が O で Cauchy-Riemann の関係式をみたす
$i.e. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

Theorem 2.10. $D \subset \mathbb{C}$：開集合．D 上正則な f から定まる $u := \mathrm{Re}(f \circ J), v := \mathrm{Im}(f \circ J)$ は $J^{-1}(D)$ 上の調和関数である

Theorem 2.11. $D \subset \mathbb{C}$：開集合．$f : D \to \mathbb{C}, u := \mathrm{Re}(f \circ J), v := \mathrm{Im}(f \circ J)$．以下同値

1. f は D 上正則
2. u, v は $J^{-1}(D)$ 上の調和関数で v は u の共役調和である

3　解析関数

Definition 3.1. 冪級数展開
$D\subset\mathbb{C}$：開，$f:D\to\mathbb{C}$ とする

f が $z_0\in D$ で冪級数展開可能である $\iff$ 収束半径 $r>0$ の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ を用いて，f は z_0 の近傍で展開できる

$i.e.0<\exists\rho\le r,s.t.D(z_0,\rho)\subset D$ かつ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\forall z\in D(z_0,\rho)$

Definition 3.2. 解析的・解析関数
$f:D\to\mathbb{C}$ とする．f は $D'\subset D$ で解析的 $\iff$ $\forall z\in D',f$ は冪級数展開可能
f は解析的（解析関数）$\iff$ 定義域内の各点で冪級数展開可能

Theorem 3.3. $D\subset\mathbb{C}$：開
D 上無限回微分可能 $\iff$ D 上で正則 $\Longrightarrow$ D 上で解析的 $\Longrightarrow$ D 上無限回微分可能

Proposition 3.4. $D\subset\mathbb{C}$：開，$\lambda\in\mathbb{C},f,g$：D 上で解析的とすると，$\begin{cases}f\pm g\\ \lambda f\\ fg\end{cases}$ も D 上で解析的．また，$\forall z\in D,f(z)\neq0$ なら，$\dfrac{1}{f}$ も D 上で解析的

Definition 3.5. 零点
$f:D\to\mathbb{C},z_0\in D$ とする．z_0 が f の零点である $\iff$ $f(z_0)=0$

Theorem 3.6. 解析関数の零点の孤立性
$\Omega\subset\mathbb{C}$：領域，$f:\Omega\to\mathbb{C}$：解析的かつ $f\not\equiv0$ とする．このとき，$Z(f):=\{z\in\Omega|f(z)=0\}$ は Ω 内に集積点を持たない．$i.e.\forall z_0\in Z(f),\exists\delta>0,s.t.\forall z\in\Omega,0<|z-z_0|<\delta\Longrightarrow f(z)\neq0$

Remark 3.7. $f(z):=\sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right),\forall z\in D(0,1)=:\Omega$ は解析的であり，$f(z)=0\iff\dfrac{1}{z}=n\pi$ で，すなわち $Z(f)=\{z\in\Omega|f(z)=0\}=\left\{z_n:=1-\dfrac{1}{n\pi}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ で，$Z(f)$ は Ω 内に集積点を持たないが $z_n\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}1\notin\Omega$

Corollary 3.8. 一致の定理
$\Omega\subset\mathbb{C}$：領域，$f,g:\Omega$ 上で解析的とする．$\{z\in\Omega|f(z)=g(z)\}$ が Ω 内の集積点を持つならば，$f\equiv g\ \mathrm{in}\ \Omega$

Proof. $h(z):=f(z)-g(z)$ として，零点の孤立性を用いればよい □

Lemma 3.9. $z_0\in\mathbb{C},\rho>0$ とする．f が z_0 の近傍で次のように冪級数展開 $\forall z\in D(z_0,\rho),f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ されていて，$1\le N:=\min\{n\in\mathbb{Z}_{\ge0}|a_n\neq0\}<\infty$．このとき，$\exists g:D(z_0,\rho)$ 上で正則，$s.t.g(z_0)\neq0$ かつ $f(z)=(z-z_0)^Ng(z),\forall z\in D(z_0,\rho)$

Proof. $D(z_0,\rho)$ 上で N の定義より $f(z)=\sum_{n=N}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^N\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+N}(z-z_0)^m$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ と $\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+N}z^m$ の収束半径は一致しているので，$g(z):=\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+N}(z-z_0)^m$ は $D(z_0,\rho)$ 上で正則で，$g(z_0)=a_N\neq0$ □

Lemma 3.10. f は $z_0 \in \mathbb{C}$ で次のように冪級数展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \forall z \in D(z_0,\rho)$ されていて，z_0 は $Z(f)$ の集積点（$i.e. \exists \{z_m\}_m \subset D(z_0,\rho) \setminus \{z_0\}, s.t. \forall m \in \mathbb{N}, f(z_m) = 0, \lim_{m\to\infty} z_m = z_0$）
$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_n = 0, i.e. f \equiv 0$ on $D(z_0,\rho)$

Proof. 背理法から考える．$\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, s.t. a_n \neq 0$ と仮定すると，仮定より $1 \leq N := \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | a_m \neq 0\} \leq n < \infty$．すると $\exists g : D(z_0,\rho)$ 上で正則，$s.t. g(z_0) \neq 0$ かつ $f(z) = (z-z_0)^N g(z)$ on $D(z_0,\rho)$
g は連続かつ $g(z_0) \neq 0$ なので，$0 < \exists \rho' < \rho, s.t. g(z) \neq 0, \forall z \in D(z_0,\rho')$
以上より $z \in D(z_0,\rho') \setminus \{z_0\}$ のとき，$f(z) = (z-z_0)^N g(z) \neq 0$ となるので，z_0 は $Z(f)$ の集積点と矛盾する □

Theorem 3.11. 解析関数の零点
$\Omega \subset \mathbb{C}$：領域，$f : \Omega$ 上で解析的とする．このとき，以下は同値である

1. $\exists z_0 \in \Omega, s.t. \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{(n)}(z_0) = 0$
2. Ω 内のある点の近傍で $f \equiv 0$，$i.e. \exists z_1 \in \Omega, \exists r > 0, s.t. \forall z \in D(z_1,r), f(z) = 0$
3. 異なる 2 点を含む Ω 内の連続曲線上で $f \equiv 0$，$i.e. \exists \gamma \in C([0,1],\Omega), s.t. \gamma(0) \neq \gamma(1)$ かつ $\forall t \in [0,1], f(\gamma(t)) = 0$
4. Ω 上で $f \equiv 0$，$i.e. \forall z \in \Omega, f(z) = 0$

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2)
$z_0 \in \Omega$ を (1) が成り立つ点とすれば，f は z_0 で冪級数展開可能なので，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ on $D(z_0,\exists\rho)$ とかける，項別微分より，$\forall l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{(n-l)!} a_n (z-z_0)^{n-l}$ なので，
$0 = f^{(l)}(z_0) = l! a_l$ から，$a_l = 0$．$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は任意なので，$f \equiv 0$ on $D(z_0,\rho)$
(2) $\Longrightarrow$ (3)
$f \equiv 0$ on $D(z,r)$ とする．$z_1 \neq w \in D(z_1,r)$ を取り，z_1 と w を結ぶ線分 γ を考えればいい
(3) $\Longrightarrow$ (4)
$\gamma_0 \in C([0,1],\mathbb{C}), z_0 := \gamma_0(0) \neq \gamma_0(1) =: z_1, \gamma_0([0,1]) \subset \Omega, \forall t \in [0,1], f(\gamma_0(t)) = 0$ とする．$\forall w \in \Omega$ をとって固定する,$\omega \in \gamma_0([0,1])$ のときは,$f(w) = 0$ となるので,$w \notin \gamma_0([0,1])$ のときを考える.Ω は弧状連結なので,$\exists \gamma_1 \in C([1,2],\mathbb{C}), s.t. \gamma_1(1) = z_1, \gamma_1(2) = w, \gamma_1([1,2]) \subset \Omega$ を用いて,z_0 と w を結ぶ連結曲線 $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_0(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_1(t) & t \in [1,2] \end{cases}, S_0 := \sup\{s \in [0,2] =: I | f(\gamma(t)) = 0, \forall t \in [0,s]\}$ で，$[0,1] \subset I$ なので，$s_0 \geq 1$.
$0 \leq \forall t < s_0$ に対して，上限の特徴付けより，$\exists s \in I, s.t. t_0 \leq s \leq s_0$．$\forall t \in [0,s], f(\gamma(t)) = 0 \Longrightarrow t_0 \in [0,s], f(\gamma(t_0)) = 0$．$s_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_0$ とすれば，$f(\gamma(s_n)) = 0$．$f \circ \gamma$ は連続なので，$n \to \infty$ として，$f(\gamma(s_0)) = 0$
以下は背理法で $s_0 = 2, (\Longrightarrow f(\gamma(2)) = 0)$ を示す
$(1 \leq) s_0 < 2$ と仮定する．このとき，$z_0 \neq \gamma(s_0)$ または $z_1 \neq \gamma(s_0)$ が成り立つので，これらに応じて，この 2 点で中間値の定理を応用すれば，n：十分大で，$\exists t_n \in [0,s_0), s.t. |\gamma(t_n) - \gamma(s_0)| = \frac{1}{n} \Longrightarrow f(\gamma(t_n)) = 0, \gamma(t_n) \neq \gamma(s_0)$
$i.e. \{\gamma(t_n)\}_n \subset Z(f) \setminus \{\gamma(s_0)\}, \gamma(s_0)$ に収束し，f は $\gamma(s_0)$ の近傍で，$i.e. \exists \delta > 0, s.t. f = 0$ on $D(\gamma(s_0),\delta)$．γ は連続なので，$\gamma^{-1}(D(\gamma(s_0),\delta))$ は S_0 を含む開集合から，$\exists \rho > 0, s.t. s_0 + \rho < 2, (s_0-\rho, s_0+\rho) \subset \gamma^{-1}(D(\gamma(s_0),\delta))$.$\delta$ の取り方に注意すれば,$\forall s \in (s_0-\rho, s_0+\rho), f(\gamma(s)) = 0$．$i.e. s_0 + \frac{\rho}{2} \in I$ で，$s_0 = \sup I < s_0 + \frac{\rho}{2}$ □

4　初等関数

$\mathbb{R}$ 上の初等関数 f を Maclaurin 展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ すると，$x\in\mathbb{R}$ を $z\in\mathbb{C}$ に拡張できる

4.1　指数関数

$z\in\mathbb{C}$ に対して，$e^z := \exp(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ と定義して，$\mathbb{C}$ 上の指数関数という．また，e^z の収束半径は ∞ である

Theorem 4.1. 指数関数 e^z は整関数で，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z = e^z$

Proof. $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ で，$\mathbb{C}$ 上微分可能であるから，項別微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \tag{14}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!} \tag{15}$$

□

Proposition 4.2. $z,w\in\mathbb{C}, t\in\mathbb{R}$ とする

1. $e^{z+w} = e^z\cdot e^w$
2. $\mathrm{Re}\left(e^{it}\right) = \cos t, \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = \sin t$
3. $\overline{e^{it}} = e^{-it} \Longrightarrow \overline{e^z} = \exp(\overline{z})$
4. $\left|e^{it}\right| = 1$
5. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} > 0$
6. $e^z = e^w \iff \exists n\in\mathbb{Z}, s.t. z = w + 2n\pi i$．また，$w=0$ とすれば，$e^z = 1 \iff z\in 2\pi i\mathbb{Z}$

Proof. $z,w\in\mathbb{C}, t\in\mathbb{R}$ とする

1. $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n, e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$
   $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k w^{n-k}\right)$
   $\displaystyle= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$
2. $e^{it} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}t^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}t^{2m+1} = \cos t + i\sin t$
3. $\overline{e^{it}} = \overline{\cos t + i\sin t} = \cos t - i\sin t = \cos(-t) + i\sin(-t) = e^{-t}$
   $z = a+bi, a,b\in\mathbb{R}$ とおくと，$\overline{e^z} = \overline{\exp(a+bi)} = \overline{e^a\cdot e^{bi}} = e^a\cdot e^{-bi} = e^{a-bi} = \exp(\overline{z})$

4. $e^{it}=\cos t+i\sin t$ なので，$\left|e^{it}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$

5. $z=a+bi, a=\mathrm{Re}z, b=\mathrm{Im}z$ とおくと，$|e^z|=\left|e^a\cdot e^{bi}\right|=|e^a|\left|e^{bi}\right|=e^a=\exp\left(\mathrm{Re}z\right)>0$

6. $e^z=e^w$ とすると，$e^z=e^w\cdot e^{-w}$ より $e^{z-w}=e^z\cdot e^{-w}=e^w\cdot e^{-w}=e^{w-w}=1$
両辺の絶対値を考えれば，$1=|e^{z-w}|=\exp\left(\mathrm{Re}\left(z-w\right)\right)\Longrightarrow\mathrm{Re}\left(z-w\right)=0$ なので，
$z-w=i\mathrm{Im}\left(z-w\right)=it$
虚部を比べれば，$0=\mathrm{Im}\left(e^{z-w}\right)=\mathrm{Im}e^{it}=\sin t$ から，$t\in 2\pi\mathbb{Z}$
$z=w+2n\pi i$ とすると
$$\begin{aligned} e^z&=e^{w+2n\pi i}=e^w\cdot e^{2n\pi i} &(16)\\ &=e^w\left(\cos\left(2n\pi\right)+i\sin\left(2n\pi\right)\right)=e^w &(17)\end{aligned}$$

□

4.2 三角関数

$z\in\mathbb{C}$ に対して，$\sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ と定義して，$\mathbb{C}$ 上の三角関数という
Euler の公式から考えると，$z\in\mathbb{C}$ とし

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m}+i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1} \tag{18}$$
$$e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m}-i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1} \tag{19}$$
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{20}$$
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} \tag{21}$$

Theorem 4.3. 三角関数は整関数で，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\cos z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z=-\sin z$

Proof. 項別微分すればいい □

Proposition 4.4. $z,w\in\mathbb{C}$

1. $\cos^2 z+\sin^2 z=1$
2. $\cos\left(-z\right)=\cos z, \sin\left(-z\right)=-\sin z$
3. $\cos z\pm w=\cos z\cos w\mp\sin z\sin w$
4. $\sin z\pm w=\sin z\cos w\pm\cos z\sin w$
5. $\cos\left(z+2\pi\right)=\cos z, \sin\left(z+2\pi\right)=\sin z$

Remark 4.5. 実三角関数 $\sin x,\cos x$ は有界であるが，複素三角関数は非有界である．例えば，$t\in\mathbb{R}_{>0}$ のとき，$\begin{cases}\cos\left(it\right)=\dfrac{e^{-t}+e^t}{2}\xrightarrow{t\to\infty}+\infty\\ \sin\left(it\right)=\dfrac{e^{-t}-e^t}{2i}=i\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\xrightarrow{t\to\infty}\mathrm{Im}\left(\sin\left(it\right)\right)\to\infty\end{cases}$

4.3 双曲線関数

$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\cosh := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ と定義する．また e^z, e^{-z} は整関数であるので，以下の性質がある

Theorem 4.6. 双曲線関数は整関数で，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cosh z = \sinh z, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sinh z = \cosh z$

Proposition 4.7. $x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
2. $\cosh(iz) = \cos z, \sinh(iz) = i \sin z$
3. $\cos(iz) = \cosh z, \sin(iz) = i \sinh z$
4. $\cos(x \pm yi) = \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y$
5. $\sin(x \pm yi) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y$

4.4 対数関数

$x \in \mathbb{R}_{>0}$ のとき，$\mathbb{C}$ 上に拡張済み指数関数 e^x の逆関数を取れば $t = \ln x$ で定義できる．$0 \neq z \in \mathbb{C}$ に対して，$z = e^w$ をみたす w を $\log z$ とかく．$t := \ln |z|$ とおくと，実の exp を考えれば $e^t = |z|$ で，$\theta = \arg z$ を一つ取れば $z = e^w$ より $e^w = z = |z| e^{i\theta} = e^t e^{i\theta} = e^{t+i\theta}$．よって，$\exists n \in \mathbb{Z}, s.t. w = t + i\theta + 2n\pi i = t + i(\theta + 2n\pi) = \ln |z| + i \arg z$

Definition 4.8. $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ に対して，$\log z := \ln |z| + i \arg z$ と定義して，$\mathbb{C}$ 上の（多価）対数関数という．また，主値の場合（一価）では，$\mathrm{Log} z := \ln |z| + i \mathrm{Arg} z$

Remark 4.9. $\log(zw) = \log z + \log w$ は集合値として一致するが，Log では成り立たない

Remark 4.10. $\epsilon, x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 > x, \epsilon \downarrow 0$ としたとき，$\begin{cases} x + i\epsilon \\ x - i\epsilon \end{cases} \longrightarrow x$

$$\mathrm{Log}(x + i\epsilon) = \ln \sqrt{x^2 + \epsilon^2} + i \mathrm{Arg}(x + i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \ln |x| + i\pi = \mathrm{Log} x \tag{22}$$
$$\mathrm{Log}(x - i\epsilon) = \ln \sqrt{x^2 + \epsilon^2} + i \mathrm{Arg}(x - i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \ln |x| - i\pi \neq \mathrm{Log} x \tag{23}$$

から $\mathrm{Log} z$ が $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ 全体では連続にならない

Theorem 4.11. 定義域を $D_\theta := \left\{ re^{i\phi} : r > 0, \theta < \phi < \theta + 2\pi \right\}$ に制限した $\arg|_{D_\theta}$ は連続から，$\log|_{D_\theta}$ も連続

Proof. $z_0 \in D_\theta$ を固定して，$\begin{cases} \theta_0 = \arg z_0 \in (\theta, \theta + 2\pi) \\ r_0 = |z_0| > 0 \end{cases}$

実 $\sin, \cos$ を $(\theta, \theta + 2\pi)$ で考えた逆関数を考えると，$\cos \theta_0 = \dfrac{1}{r_0} \mathrm{Re} z_0, \sin \theta_0 = \dfrac{1}{r_0} = \mathrm{Im} z_0$ となるより，$\theta_0 = \cos^{-1} \left(\dfrac{1}{|z_0|} \mathrm{Re} z_0 \right) = \sin^{-1} \left(\dfrac{1}{|z_0|} \mathrm{Im} z_0 \right)$．同様にして，$z \in D_\theta$ で，$z \to z_0$ のとき，$\arg|_{D_\theta} = \cos^{-1} \left(\dfrac{1}{|z|} \mathrm{Re} z \right) \to \cos^{-1} \left(\dfrac{1}{|z_0|} \mathrm{Re} z_0 \right) = \arg|_{D\theta} \theta_0$ □

Theorem 4.12. $\log|_{D_\theta}$ は 1 価で，微分可能な関数となり，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log z = \dfrac{1}{z}, \forall z \in D_\theta$

Lemma 4.13. $w_0 \in \mathbb{C}$ に対し，$E_{w_0}(w) := \begin{cases} e^{w_0} & w = w_0 \\ \dfrac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0} & otherwise \end{cases}$ は $\mathbb{C}$ 上連続である

Proof. w_0 では e^w が微分可能で，$(e^w)' = e^w$ であるからわかる □

Proof. $f(z) := \log z, \forall z \in D_\theta$ とおく．$z_0 \in D_\theta$ を固定して，$0 \neq h \in \mathbb{C}$ とする．D_θ は開集合なので，$|h| \to 0 \Longrightarrow z_0 + h \in D_\theta$．そこで，$z_0 + h \in D_\theta$ となる，$h \neq 0$ に対して考えると

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\exp(f(z_0+h)) - \exp(f(z_0))} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{E_{w_0}(f(z_0+h))} \tag{25}$$

ここで，E_{w_0} と f の連続性より，$E_{w_0}(f(z_0+h)) \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} E_{w_0}(f(z_0)) = e^{w_0} = z_0 \neq 0$ なので，この極限が存在することが変わるので，f は z_0 で微分可能で，$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \dfrac{1}{z_0}$ □

Theorem 4.14. log の冪級数展開

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \forall z \in D(0,1) \tag{26}$$

Proof. $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ とおく．$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n}{n+1} \to 1$ より収束半径は 1．よって f は $D(0,1)$ 上 C^∞ 級で

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} \tag{27}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z} \tag{29}$$

$T(z) := 1+z$ は C^∞ 級で,$\mathrm{Log}(1+z) = \mathrm{Log}|_{D_{-\pi}}(T(z))$ から,合成関数の微分法より,$D(0,1)$ 上で $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log}(1+z) = \dfrac{1}{1+z}$ が成り立つ.言い換えれば,$D(0,1)$ 上で,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Log}(1+z) - f(z)) = 0$. また,$D(0,1)$ は領域なので,$\mathrm{Log}(1+z) - f(z)$ は定数であり,$\exists c \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in D(0,1), \mathrm{Log}(1+z) - f(z) = C$ で，$z = t \in \mathbb{R} \cap (0,1)$ をとると，$C = \mathrm{Log}(1+t) - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} t^n = \ln(1+t) - \ln(1+t) = 0 \Longrightarrow f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ on $D(0,1)$ □

4.5 累乗関数

$a, x \in \mathbb{R}, x > 0$ のとき，$x^a = \exp(a \ln x)$
そこで，$0 \neq z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z) \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

と定義し，$\mathbb{C}$ 上の累乗関数という（多価）．また，主値は $\exp(\alpha \mathrm{Log} z)$ である

Remark 4.15. $\alpha \neq 0$ のとき，$z \in \mathbb{C}$ に対して上で役割を入れ替えれば $\alpha^z = \exp(z \log \alpha)$ となり，$\alpha = e$ のときは必ず主値である．i.e. $e^z = \exp(z\mathrm{Log}e)$ で考えることにする

Remark 4.16. 一般には z^α は多価であるが，$\alpha \in \mathbb{Z}$ のときは多項式 z^α と一致するから一価

Proof. $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ とする. $\theta = \arg z$ をひとつとると, $\log z = \ln|z| + i\theta$ なので, $\exp(n \log z) = \exp(n \ln|z| + in\theta)$ なので

$$\begin{aligned}
\exp(n \log z) &= \exp(n \ln|z| + in\theta) && (32)\\
&= \exp(n \ln|z|) \exp(in\theta) && (33)\\
&= |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) && (34)\\
&= (|z|(\cos\theta + i \sin\theta))^n = z^n && (35)
\end{aligned}$$

z^α は exp と log の合成（exp は正則で，log を D_θ に制限すれば可微分） □

Theorem 4.17. $\alpha \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$ とする. D_θ に制限した z^α は微分可能で, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}, \forall z \in D_\theta$

Proof. $f := \log\Big|_{D_\theta}$ におけば

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\exp(\alpha f(z))) &= \exp(\alpha f(z)) \cdot \alpha f'(z) && (36)\\
&= z^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha z^{\alpha-1} && (37)
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.18. $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in D_\theta$ とする．このとき，$\alpha^z := \exp\left(z \log\Big|_{D_\theta} \alpha\right)$ は整関数で，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\alpha^z = \alpha^z \log\Big|_{D_\theta} \alpha, \forall z \in \mathbb{C}$

Proof. $a := \log|_{D_\theta} \alpha \in \mathbb{C}$ とおけば，$\alpha^z = e^{az}$．i.e. exp と az の合成なので，α^z も整関数で，$(\alpha^z)' = ae^{az} = \alpha^z \log|_{D_\theta} \alpha$ □

Remark 4.19. $\alpha \in \mathbb{C}$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，二項係数 $C_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ と定義すると，$D(0,1)$ 上で二項展開 $(1+z)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n z^n$ が成り立つ

4.6　1 の n 乗根

$z^n = 1$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を 1 の n 乗根という

Example 4.20. $z^n = \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \alpha = r_0 e^{\theta_0 i}$ と極表示すれば，$z_0 = r_0^{\frac{1}{n}} \exp\left(\dfrac{\theta_0}{n} i\right)$ が $z^n = \alpha$ のひとつの解となる．これと 1 の n 乗根 $\xi = \exp\left(\dfrac{2}{n}\pi i\right)$ を用いると，$z_0, z_0\xi, z_0\xi^2, \cdots, z_0\xi^{n-1}$ が $z^n = \alpha$ の解であることがわかる

5　複素関数の積分

Definition 5.1. f が $[a,b]$ 上で積分可能 $\iff$ $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ が $[a,b]$ 上で積分可能．このとき

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{38}$$

と定義する

Remark 5.2. f が連続 $\iff$ $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ が共に連続 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ が可積分 $\iff$ f が可積分
積分の定義から

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Example 5.3. $f(\theta) := i + e^{i\theta\pi}, \theta \in [0,1]$

$\begin{cases} \mathrm{Re}f(\theta) = \cos(\theta\pi) \\ \mathrm{Im}f(\theta) = 1 + \sin(\theta\pi) \end{cases}$ で $\displaystyle\int_0^1 f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \cos(\theta\pi)\mathrm{d}\theta + i\int_0^1 (1+\sin(\theta\pi))\,\mathrm{d}\theta$

Proposition 5.4. $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ は可積分とする

1. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Proof. (1)(2) は定義から明らか，(3) だけ示す
$\theta := \mathrm{Arg}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \in (-\pi, \pi]$, $r := \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \ge 0$ とおくと，$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = re^{i\theta}$ なので

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni r &= e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t && (39)\\ &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R} && (40)\\ &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t\right) && (41)\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)\mathrm{d}t && (42)\\ &\le \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|\mathrm{d}t && (43)\\ &= \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t && (44) \end{aligned}$$

□

$f : D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ は連続で，$\gamma : [a,b] \to D : C^1$ 級に対して，γ に沿った f の積分は $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ と定義する

Proposition 5.5. $f, g : D \to \mathbb{C}$ は連続，$\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to D : C^1$ 級とする

1. $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
2. $\displaystyle\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
3. $\displaystyle\lambda \in \mathbb{C}, \int_{\gamma} \lambda f(z)\,\mathrm{d}z = \lambda \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
4. $\displaystyle\int_{\gamma} (f+g)(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z$
5. $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t$

Proof. (2)(3)(4) は定義から明らか
(1) では，置換積分 $(-\gamma)(s) := \gamma((1-s)b + sa), s \in [0,1]$ とすれば，$(-\gamma)'(s) = (a-b)\gamma'(s)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 f((-\gamma)(s))(-\gamma)'(s)\,\mathrm{d}s && (45)\\
&= \int_0^1 f(\gamma((1-s)b+sa))(a-b)\gamma'((1-s)b+sa)\,\mathrm{d}s && (46)\\
&= \int_b^a f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t && (47)\\
&= -\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z && (48)
\end{aligned}$$

(5) では

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| && (49)\\
&\leq \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t && (50)\\
&= \int_a^b |f(\gamma(t))|\left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t && (51)\\
&\leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t && (52)
\end{aligned}$$

□

5.1 路と閉路

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ が路 $\iff$ γ は連続で，有限個の C^1 級曲線の和でかける．言い換えれば，γ は連続で有限個の点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ を用いて，各 $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ は C^1 級曲線で，$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n$ とかける
路 γ が閉路 $\iff$ 始点 $\gamma(a)$ と終点 $\gamma(b)$ が一致している

Definition 5.6. $f : D \to \mathbb{C}$ は連続，$\gamma : [a, b] \to D$ は路とし，$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n$ とすると，f の γ に沿った線積分は

$$ds \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \quad (53)$$

Proposition 5.7. $f, g : D \to \mathbb{C}$ は連続，$\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : D$ 内の路とする

1. $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
2. $\displaystyle\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
3. $\displaystyle\lambda \in \mathbb{C}, \int_{\gamma} \lambda f(z)\,\mathrm{d}z = \lambda \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
4. $\displaystyle\int_{\gamma} (f+g)(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z$
5. $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t$

Proof. (1) ∼ (4) は定義から明らか，(5) だけ示す
$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n, \gamma_k := \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ とおくと

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{54}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{55}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \max_{z \in \gamma_k^*} |f(z)| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t \tag{56}$$
$$\leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t \tag{57}$$

□

6 Cauchy の積分定理

Theorem 6.1. $D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし，$f : D \to \mathbb{C}$ を連続で，$F : D \to \mathbb{C}$ を f の原始関数とする．言い換えれば $F'(z) = f(z), \forall z \in D$
このとき，D 内に含まれる任意の路 $\gamma : [a, b] \to D$ に対して，$\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ が成り立つ．特に，γ が閉路であるとき，$\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Proof. γ が C^1 級の曲線のとき，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t)) = f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ なので

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \tag{58}$$
$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{Re} F(\gamma(t)))\,\mathrm{d}t + i \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{Im} F(\gamma(t)))\,\mathrm{d}t \tag{59}$$
$$= [\mathrm{Re} F(\gamma(t))]_a^b + i\,[\mathrm{Im} F(\gamma(t))]_a^b \tag{60}$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{61}$$

一般の路 $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n, \gamma_k := \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z && (62)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))\right) && (63)\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) && (64)\end{aligned}$$

□

Example 6.2. $z_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ のとき
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}\right) = (z-z_0)^n$ から，γ : 閉路 $\Longrightarrow \displaystyle\int_\gamma (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = 0$
$n = -1$ のときは 0 になるとは限らない．なぜなら $\dfrac{1}{z-z_0}$ の原始関数になりそうな $\log(z-z_0)$ は z_0 を中心とする一周を回る閉路で，正則にならない．具体的に，$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$ のとき，$\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$ なので

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta && (65)\\ &= i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta && (66)\\ &= 2\pi i \neq 0 && (67)\end{aligned}$$

Theorem 6.3. $D \subset \mathbb{C}$: 開集合，$f : D \to \mathbb{C}$ を正則とする．このとき，D 内に含まれる任意の閉三角形 Δ に対して $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Proof. 閉三角形 Δ を細かく分割して，次をみたす閉三角形の列 $\{\Delta_n\}_n$ を作る

1. $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \cdots$
2. $\partial\Delta_{n+1}$ の長さは $\partial\Delta_n$ の長さの半分，L を $\partial\Delta$ の長さとすると，$\partial\Delta_n$ の長さは $\dfrac{L}{2^n}$

Δ の各辺の中点を結んで 4 つの三角形に分割し，$\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \Delta^3 \cup \Delta^4$ とする．このとき，$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta^k} f(z)\,\mathrm{d}z$．また，$\displaystyle |J| := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ から，右側の積分の値が一番大きくなる三角形を Δ_1 とすると

$$J \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{68}$$

より，$\displaystyle\frac{J}{4} \leq \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$．中点分割を行ったので，$\partial\Delta_1$ の長さは $\partial\Delta$ の半分で，n のときも同様に構成できたと仮定すると，Δ_n の各辺の中点を結んで $\Delta_n = \Delta_n^1 \cup \Delta_n^2 \cup \Delta_n^3 \cup \Delta_n^4$ で，Δ_{n+1} は $\displaystyle\left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ が一番大きい三角形とすると，$n = 1$ のときも同様に

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| && (69)\\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| && (70)\end{aligned}$$

$\partial\Delta_{n+1}$ の長さは $\partial\Delta_n$ の半分で，$\dfrac{1}{2^{n+1}}L$ となる．帰納法より示せる
$\forall x, y \in \Delta_n \implies d(x,y) \leq \partial\Delta_n$ の長さ $= \dfrac{1}{2^n}L$．各 n に対して，$z_n \in \Delta_n$ となる点をとると，$\{z_n\}_n$ は Cauchy 列である．なぜなら，$m > n$ のとき，$z_m \in \Delta_m \subset \Delta_n \implies z_m, z_n \in \Delta_n$ なので，$|z_m - z_n| \leq \dfrac{1}{2^n}L \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\mathbb{C}$ は完備なので，$\{z_n\}_n$ は収束し，Δ は閉なので，$z_0 := \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Delta$.
このとき，$\forall n \in \mathbb{N}$ を固定し，$\forall m \geq n$ に対して，$z_m \in \Delta_m \subset \Delta_n$ なので，$z_0 \in \Delta_n$．よって，$z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ となる．また，$z_0' \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ とすると，$\forall n \in \mathbb{N}, z_0, z_0' \in \Delta_n$ より，$|z - z_0'| \leq \dfrac{1}{2^n}L$ で，$n \to \infty$ として，$z_0 = z_0'$ だから，z_0 は一意
$\forall \epsilon > 0$，十分大きいな n を取ると，$\left|\displaystyle\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \dfrac{1}{4^n}L^2\epsilon$ を示せば，$\forall \epsilon > 0$

$$0 \leq \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L^2\epsilon \tag{71}$$

$\epsilon > 0$ は任意なので，$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
$\forall \epsilon > 0$ を固定する,f は D 上正則で,$z_0 \in \Delta \subset D$ なので,z_0 で微分可能,$\exists r > 0, s.t. \forall z \in D(z_0, r)$

$$\left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| \leq \epsilon\,|z - z_0| \tag{72}$$

また，$\partial\Delta_n$ の長さは $\dfrac{1}{2^n}L, z_0 \in \Delta_n$ なので，$d(z_0, \partial\Delta_n) \leq \dfrac{1}{2^n}L \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ に注意すれば，$\exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq n_0, d(z_0, \partial\Delta_n) \leq \dfrac{1}{2^n}L < \epsilon$ より，$\forall n \geq n_0$

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right)\mathrm{d}z \tag{73}$$
$$= \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z - f(z_0)\int_{\partial\Delta_n} \mathrm{d}z - f'(z_0)\int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\,\mathrm{d}z \tag{74}$$
$$= \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{75}$$

に注意すれば

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right)\mathrm{d}z\right| \tag{76}$$
$$\leq \frac{1}{2^n}L \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n^*} \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| \tag{77}$$
$$\leq \frac{L}{2^n} \cdot \epsilon \cdot \frac{L}{2^n} = \frac{1}{4^n}L^2\epsilon \tag{78}$$

□

Corollary 6.4. $D \subset \mathbb{C}$: 開集合，$p \in D, f : D \to \mathbb{C}$ を連続で，$D\backslash\{p\}$ 上で正則とする．このとき，D 内に含まれる任意の閉三角形 Δ に対して，$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Proof. D 内に含まれる閉三角形 Δ を固定，点 p と Δ の位置によって場合分けして考える：

1. $p \notin \Delta$
2. p が Δ の頂点の一つの場合
3. $p \in \partial\Delta$ だが頂点ではない

4. $p \in \mathrm{Int}\Delta$

とする

1. $\Delta \subset D \backslash \{p\}$ とすればいい
2. $A = p$ のときを考える．辺 AB 上に x，辺 AC 上に y を取り，三つの三角形に分割すると，$p \notin \Delta_1, p \notin \Delta_2$ なので，(1) より $\displaystyle\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 = \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ なので
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} + \int_{\partial\Delta_3}\right) f(z)\,\mathrm{d}z \tag{79}$$
$$= \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{80}$$
$\Delta_3 = \Delta(x,y)$ とおき，x, y を p に近づける
$$\left|\int_{\partial\Delta(x,y)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{\partial\Delta(x,y)} |f(z)| \cdot \mathrm{length}(\partial\Delta(x,y)) \tag{81}$$
$$= \max_{\partial\Delta(x,y)} |f(z)| \cdot (|x-y| + |y-p| + |p-x|) \tag{82}$$
$$\leq \max_{\partial\Delta(x,y)} |f(z)| \cdot 2(|x-p| + |y-p|) \tag{83}$$
また, f は p で連続なので, $\exists\delta > 0, s.t. D(p,\delta) \subset D$ かつ $z \in D(p,\delta) \Longrightarrow |f(z) - f(p)| < 1$ で，$x, y \in D(p,\delta)$ のとき，$\Delta(x,y) \subset D(p,\delta)$ となるので，$\displaystyle\max_{\partial\Delta(x,y)} |f(z)| \leq 1 + |f(p)|$．以上より，$x, y \to p$ とすれば
$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial\Delta(x,y)} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{84}$$
$$\leq 2(|x-p| + |y-p|)(1 + |f(p)|) \to 0 \tag{85}$$
よって，$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
3. p を頂点に持つ二つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割すると，(2) より，$\displaystyle\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 = \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ なので，$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
4. 点 p とどこか一つの頂点を結んで二つの三角形 Δ^1, Δ^2 に分割，$p \in \partial\Delta^1, \partial\Delta^2$ なので，(3) より $\displaystyle\int_{\partial\Delta^1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 = \int_{\partial\Delta^2} f(z)\,\mathrm{d}z$．よって
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\partial\Delta^1} + \int_{\partial\Delta^2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{86}$$

□

Corollary 6.5. Cauchy の積分定理（星形の場合）
$D \subset \mathbb{C}$：星型領域，$p \in \mathbb{C}, f : D \to \mathbb{C}$ を連続かつ $D \backslash \{p\}$ 上で正則とする．このとき，D 内に含まれる任意の閉路 γ に対して，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Proof. f の原始関数を構成できればいいから，D は星形なので，$\exists z_0 \in D, \forall z \in D, \gamma_z(t) = (1-t) z_0 + tz \in D, \forall t \in [0,1]$ とする．この線分を用いて，$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w, \forall z \in D$ と定義すると，F は f の原始関数になっていることを示す．$\forall w_0 \in D$ を固定する．D は開集合なので，$\exists r > 0, s.t. D(w_0, r) \subset D, w \in D(w_0, r), w \neq w_0$ を任意にとると，$F(w) = F(w_0) = \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z$
$\Delta(z_0, w_0, w)$ の周 $\gamma_{w_0} \vee l_w \vee (-\gamma_{w_0})$ に対して，先の補題を利用すれば

$$0 = \int_{\gamma_{w_0} \vee l_w \vee (-\gamma_{w_0})} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{87}$$

$$= \int_{\gamma_{w_0}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{l_w} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{w_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{88}$$

$$= F(w_0) + \int_{l_w} f(z)\,\mathrm{d} - F(w) \tag{89}$$

よって，$D \ni l_w(t) := (1-t) w_0 + w, \forall t \in [0,1]$
また，$(z)' = 1$ に注意すれば，$\int_{l_w} 1\mathrm{d}z = w - w_0$ なので

$$f(w_0) = \frac{f(w_0)}{w - w_0} \int_{l_w} 1\mathrm{d}z \tag{90}$$

$$= \frac{1}{w - w_0} \int_{l_w} f(w_0)\,\mathrm{d}z \tag{91}$$

よって

$$\left| \frac{F(w) - F(w_0)}{w - w_0} - f(w_0) \right| = \frac{1}{|w - w_0|} \left| \int_{l_w} (f(z) - f(w_0))\,\mathrm{d}z \right| \tag{92}$$

$$\leq \frac{1}{|w - w_0|} \max_{z \in l_w^*} |f(z) - f(w_0)| \cdot \mathrm{length}(l_w) \tag{93}$$

$$= \max_{z \in l_w^*} |f(z) - f(w_0)| \tag{94}$$

ここで $\epsilon > 0$ を任意に取って固定すると，f は $w_0 \in D$ で連続なので，$\exists \delta \in (0, r), s.t. D(w_0, \delta) \subset D(w_0, r) \subset D$ かつ $\forall z \in D(w_0, \delta), |f(z) - f(w_0)| < \epsilon$．したがって，$w \in D(w_0, \delta) \Longrightarrow \max_{z \in l_w^*} |f(z) - f(w_0)| \leq \epsilon$ なので，$\forall w \in D(w_0, \delta) \setminus \{w_0\}$ に対して，$\left| \frac{F(w) - F(w_0)}{w - w_0} - f(w_0) \right| \leq \epsilon$.
なお $\epsilon > 0$ は任意だったので，$F'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{F(w) - F(w_0)}{w - w_0} = f(w_0)$ □

Theorem 6.6. 積分路の変更：星形
$D \subset \mathbb{C}$: 星形領域，$f : D$ 上連続かつ $D \setminus \{p\}$ 上で正則，γ_1, γ_2 は D 内の路，s.t.$start(\gamma_1) = start(\gamma_2), End(\gamma_1) = End(\gamma_2)$．このとき，$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

Proof. 閉路 $\gamma_1 \vee (-\gamma_2)$ に対して，$0 = \int_{\gamma_1 \vee (-\gamma_2)} f(z)\,\mathrm{d}z$ が成り立つことを示せばよい
$0 = \int_{\gamma_1 \vee (-\gamma_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ □

7　注意事項

Theorem 7.1. 極限と積分記号の入れ替え
γ^* : 路, $f_n : \gamma^*$ 上連続, $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f : \gamma^*$ 上一様収束とする. このとき, $\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_z(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$
が成り立つ

Proof. f が γ^* 上連続なので可積分，従って
$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \max_{z\in\gamma^*}|f_n(z) - f(z)| \cdot \mathrm{length}(\gamma) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

Theorem 7.2. 項別積分
γ : 路, $f_n : \gamma^*$ 上連続, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は γ^* 上一様収束とする. このとき, $\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$
が成り立つ

Proof. $F_m(z) := \sum_{n=1}^{m} f_n(z), F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ とおくと，各 F_m は連続で，$F_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} F$ から，γ^* 上一様収束になる．従って，$\lim_{m\to\infty}\int_\gamma F_m(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z$. ここで，$\int_\gamma F_m(z)\,\mathrm{d}z$ について，各 m で $\int_\gamma F_m(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{m} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{m}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$ であることより，$\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z$ □

Proposition 7.3. 特別な場合の積分微分の入れ替え
γ : 路，$f : \gamma^*$ 上連続，$\forall z \notin \gamma^*, F(z) := \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$ と定義すると，F は $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ 上正則で，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right)\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w$ が成り立つ

Proof. $z_0 \notin \gamma^*$ を任意に取り固定する．$z \neq z_0$ で十分近い $z \notin \gamma^*$ に対して

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\mathrm{d}w = \int_\gamma f(w)\left(\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right) - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right)\mathrm{d}w \tag{95}$$

$$\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right) - \frac{1}{(w-z_0)^2} = \frac{1}{z-z_0}\frac{z-z_0}{(w-z)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0)^2} \tag{96}$$

$$= \frac{z-z_0}{(w-z)(w-z_0)} \tag{97}$$

なので，$\left|\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right) - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right| \le |z-z_0|\int_\gamma \frac{|f(w)|}{|w-z|\,|w-z_0|^2}|\mathrm{d}w|$. f は γ^* 上で連続なので，$M := \max_{w\in\gamma^*}|f(w)| < +\infty, \delta := \mathrm{dist}(z_0, \gamma^*) > 0$ とおくと，$z \in D\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right) \Longrightarrow \mathrm{dist}(z, \gamma^*) > \frac{\delta}{2}$ に注意すると，$z \in D\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right)$ のとき，$\forall w \in \gamma^*, |w-z| \ge \frac{\delta}{2}, |w-z_0| \ge \frac{\delta}{2}$
なので

$$\int_\gamma \frac{|f(w)|}{|w-z|\,|w-z_0|^2}|\mathrm{d}w| \le \frac{M}{\frac{\delta}{2}\cdot\delta}\cdot\mathrm{length}(\gamma) < +\infty \tag{98}$$

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-z_0}\right)-\frac{1}{(w-z_0)^2}\right| \leq |z-z_0|\int_\gamma \frac{|f(w)|}{|w-z|\,|w-z_0|^2}|\mathrm{d}w|$$ より

$$0=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\mathrm{d}w\right| \tag{99}$$

$$=\left|\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\mathrm{d}w\right| \tag{100}$$

□

Lemma 7.4. $z_0\in\mathbb{C},\gamma(t)=z_0+re^{it},t\in[0,2\pi]$ とする
このとき，$\displaystyle\int_\gamma (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0 & n\neq -1\\ 2\pi i & n=-1\end{cases}$

Proof. $n=-1$ のとき

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}ire^{it}\mathrm{d}t \tag{101}$$

$$=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi i \tag{102}$$

□

Lemma 7.5. $z_0,z_1\in\mathbb{C},\gamma(t)=z_0+re^{it},t\in[0,2\pi]$ とする

1. $|z_0-z_1|>r$ のとき，$\forall z\in\gamma^*,\dfrac{1}{z-z_1}=\dfrac{1}{z-z_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n$ と展開できて，右辺の級数は γ^* 上で（絶対）一様収束している
2. $|z_0-z_1|<r$ のとき，$\forall z\in\gamma^*,\dfrac{1}{z-z_1}=\dfrac{1}{z-z_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n$ と展開できて，右辺の級数は γ^* 上で（絶対）一様収束している

Proof. 1. $z\in\gamma^*\Longrightarrow|z-z_0|=r,\left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|=\dfrac{r}{|z_1-z_0|}<1$ で

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z-z_0+z_0-z_1}=\frac{1}{z_0-z_1}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)}$$

2. $\left|\dfrac{z_1-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{|z_1-z_0|}{r}<1$ で，$\dfrac{1}{z-z_1}=\dfrac{1}{z-z_0}\dfrac{1}{1-\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)}$

□

Lemma 7.6. $z_0,z_1\in\mathbb{C},\gamma(t)=z_0+re^{it},t\in[0,2\pi]$ とする
このとき，$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-z_1}\mathrm{d}z=\begin{cases}0 & r<|z_0-z_1|\\ 2\pi i & r>|z_0-z_1|\end{cases}$

Proof. 1. $r<|z-z_0|$ のとき，$f(z)=\dfrac{1}{z-z_1}$ は $D(z_0,r')$ 上正則（$r<r'<|z-z_0|$）なので，Cauchy の積分定理より，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_1}\mathrm{d}z=\int_\gamma \frac{1}{z_0-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\mathrm{d}z \tag{103}$$

$$=\frac{1}{z_0-z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z_1-z_0)^n}\int_\gamma (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z=0 \tag{104}$$

2. $r > |z_0 - z_1|$ のとき

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_1} \mathrm{d}z = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{105}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z_1 - z_0)^n \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z = 2\pi i \tag{106}$$

□

Proposition 7.7. 積分路の変更：円周の連続変形
$z_1 \in D(z_0, R), 0 < r < R - |z_0 - z_1|, f : \overline{D(z_0, R)} \backslash D(z_1, r)$ 上で正則とし，$H(s, \theta) := \gamma_s(\theta) := z_s + Rse^{i\theta}, s \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$ とする．また，$\begin{cases} z_s := (1 - s) z_0 + s z_1 \\ R_s := (1 - s) R + sr \end{cases}$ とする．このとき，$s, t \in [0, 1]$ に対して，$\displaystyle\int_{\gamma_s} f(z) \mathrm{d}z = \int_{\gamma_t} f(z) \mathrm{d}z$ が成り立つ．

Remark 7.8. $H([0, 1] \times [0, 2\pi]) \subset \overline{D(z_0, R)} \backslash D(z_1, r)$

Proof.

$$|\gamma_s(\theta) - z_1| = \left|(1 - s)(z_0 - z_1) + R_s e^{i\theta}\right| \tag{107}$$

$$\geq R_s \left|e^{i\theta}\right| - (1 - s)|z_0 - z_1| \tag{108}$$

$$= (1 - s)(R - |z_0 - z_1|) + sr \geq r \tag{109}$$

$$|\gamma_s(\theta) - z_0| = |s(z_1 - z_0) + (1 - s) R + sr| \tag{110}$$

$$\leq s|z_1 - z_0| + (1 - s) R + sr \leq R \tag{111}$$

□

Proof. $F(s) := \displaystyle\int_{\gamma_s} f(z) \mathrm{d}z, s \in [0, 1]$ とおくと

$$F(s) = \int_0^{2\pi} f(\gamma_s(\theta)) \gamma_s'(\theta) \mathrm{d}\theta \tag{112}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(H(s, \theta)) \frac{\partial H}{\partial \theta}(s, \theta) \mathrm{d}\theta \tag{113}$$

H は滑らかな関数で，$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial s}(s, \theta) = z_1 - z_0 + (r - R) e^{i\theta} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \theta}(s, \theta) = iR_s e^{i\theta} \end{cases}$ ······①

f は $\overline{D(z_0, R)} \backslash D(z_1, r)$ 上で正則なので，C^1 級関数 (C^∞ 級)．従って，$f \circ H$ は $[0, 1] \times [0, 2\pi]$

上で C^1 級で，$g := (f \circ H) \cdot \dfrac{\partial H}{\partial \theta}$ も C^1 級なので，$\mathrm{Re}g, \mathrm{Im}g$ も C^1 級関数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_0^{2\pi} g(s,\theta)\,\mathrm{d}\theta &(114)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}g(s,\theta)\,\mathrm{d}\theta + i \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}g(s,\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) &(115)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\mathrm{Re}g)\,\mathrm{d}\theta + i \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\mathrm{Im}g)\,\mathrm{d}\theta &(116)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (\mathrm{Re}g + \mathrm{Im}g)\,\mathrm{d}\theta &(117)\\
&= \int_0^{2\pi} \left(f'(H(s,\theta)) \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial H}{\partial s} + f\left(H'(s,\theta)\right) \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \theta} \right) \mathrm{d}\theta &(118)\\
&= \left[f(H(s,\theta)) \frac{\partial H}{\partial s}(s,\theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} &(119)\\
&= f(H(s,2\pi)) \frac{\partial H}{\partial s}(s,2\pi) - f(H(s,0)) \frac{\partial H}{\partial s}(s,0) = 0 &(120)
\end{aligned}
$$

□

Corollary 7.9. $z_0 = z_1$ のとき
$z_0 \in \mathbb{C}, 0 < r < R, f : \overline{D(z_0,R)} \backslash D(z_1,r) \to \mathbb{C}$ 上で正則とする
このとき，$\begin{cases} \gamma_s(\theta) := z_0 + R_s e^{i\theta} \\ R_s := (1-s)R + sr \end{cases}$ $, s \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]$ とする．このとき，$s, t \in [0,1]$ に対して

$$\int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_t} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{121}$$

Lemma 7.10. $m \in \mathbb{Z} \backslash \{1\}, z_0, z_1 \in \mathbb{C}, |z_0 - z_1| \neq r > 0, \gamma(t) := z_0 + re^{it}, t \in [0,2\pi]$ とする
このとき，$\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-z_1)^m} \mathrm{d}z = 0$

Proof.

1. $|z_0 - z_1| > r$ のとき，$h(z) := \dfrac{1}{(z-z_1)^m}$ とおくと，$r < r' < |z_0 - z_1|$ をみたす r' を取れば，h は $D(z_0, r')$ 上で正則で，$\gamma^* \subset D(z_0, r')$ なので，Cauchy の積分定理より，$\displaystyle\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = 0$

2. $|z_0 - z_1| < r$ のとき，$\begin{cases} 0 < r' < |z - z_0| < r \\ r' < r - |z - z_0| \end{cases}$ をみたす r' を取り，$\gamma'(t) = z_1 + r'e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ とおけば，h は $\overline{D(z_0,r)} \backslash D(z_1,r')$ 上で正則なので，$\displaystyle\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma'} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$

□

8 Cauchy の積分公式

Theorem 8.1. Cauchy の積分公式: 円板
$f:\overline{D(z_0,r)},(z_0\in\mathbb{C},r>0)$ 上で正則，$\gamma(t):=z_0+re^{it},t\in[0,2\pi]$．このとき，$\forall z\in D(z_0,r)$ に対して

$$f(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \tag{122}$$

が成り立つ

Proof. $\forall z\in D(z_0,r)$ を固定し，$g(w):=\begin{cases}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & w\neq z\\ f'(z) & w=z\end{cases}$ と定義すると

1. $w\neq z$ では，分母 $\neq 0$ かつ f は連続（正則）で，$w\to z$ のとき f の正則性より，$g(w)=\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}\to f'(z)=g(z)$ から，g は $\overline{D(z_0,r)}$ 上で連続
2. g は $\overline{D(z_0,r)}\setminus\{z\}$ 上で正則

よって

$$0=\int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w=\int_\gamma\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w \tag{123}$$

$$=\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w-f(z)\int_\gamma\frac{1}{w-z}\mathrm{d}w \tag{124}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \tag{125}$$

□

Theorem 8.2. $D\subset\mathbb{C}$: 開集合，$f:D\to\mathbb{C}$ とすると，f は D 上正則 $\Longleftrightarrow$ f は D 上解析的

Proof. $\Longleftarrow$ は証明済みであるので，以下は $\Longrightarrow$ だけ示す
$\forall z_0\in D$ を固定し，D は開集合なので，$\exists r>0,s.t.D(z_0,2r)\subset D,\gamma(t):=z_0+re^{it},t\in[0,2\pi]$ とおくと，Cauchy の積分公式より，$\forall z\in D(z_0,r)$ に対して

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \tag{126}$$

$w\in\gamma^*$ に対して，$\dfrac{1}{w-z}=\dfrac{1}{w-z_0}\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ なので

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\mathrm{d}w \tag{127}$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w\,(z-z_0)^n \tag{128}$$

$$=\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n\quad\left(a_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w\right) \tag{129}$$

□

ここで項別微分を行って $z=z_0$ とすると，$f^{(n)}(z_0)=n!a_n=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}w$

Theorem 8.3. Taylor 展開
$f : \overline{D(z_0, r)}$ 上で正則とする．このとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad (\forall z \in D(z_0, r)) \tag{130}$$

Theorem 8.4. Cauchy の積分公式：円板
$f : \overline{D(z_0, r)}$ 上で正則，$\gamma(t) := z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$．$n \in \mathbb{N}, z \in D(z_0, r)$ に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w \tag{131}$$

Proof. z_0 のときは証明済みなので，$z_0 \neq z \in D(z_0, r)$ を任意に取り固定しておく．$0 < r' < |z_0 - z| < r, \gamma'(t) := z + r'e^{it}, t \in [0, 1]$．$n \in \mathbb{N}$ で，z と γ を考えれば

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w \tag{132}$$

h は $\overline{D(z_0, r)} \setminus \{z\}$ 上で正則なので，積分路の変更より

$$\int_{\gamma'} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w \tag{133}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w \tag{134}$$

□

中心 z_0，半径 $0 \leq r < R < +\infty$ とする．$A(z_0 : r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ を円環を表す．$r = 0$ のときは，削除円板 $A(z_0 : 0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

Theorem 8.5. Cauchy の積分公式：円環
$f : A(z_0, R_1, R_2)$ 上で正則，$R_1 < r < R_2$ とすると，$z \in A(z_0 : r, R)$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w \tag{135}$$

Proof. $\forall z \in A(z_0 : r, R)$ をとり固定する．$g(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$ と定義すると

1. g は $A(z_0 : R_1, R_2)$ 上で連続
2. g は $A(z_0 : R_1, R_2) \setminus \{z\}$ 上で正則

Morera の定理より g は $A(z_0 : R_1, R_2)$ 上で正則なので，積分路の変更可能
すると $\displaystyle\int_{\gamma_R} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_r} g(w)\,\mathrm{d}w$
両辺を具体的に計算してみると

$$\mathrm{RHS} = \int_{\gamma_r} g(w)\,\mathrm{d}w \tag{136}$$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \mathrm{d}w \tag{137}$$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w - f(z)\int_{\gamma_r} \frac{1}{w - z} \mathrm{d}w \tag{138}$$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w \tag{139}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \int_{\gamma_R} g(w)\,\mathrm{d}w && (140)\\
&= \int_{\gamma_R} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w && (141)\\
&= \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z)\int_{\gamma_R}\frac{1}{w-z}\mathrm{d}w && (142)\\
&= \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - 2\pi i f(z) && (143)
\end{aligned}$$

□

Remark 8.6. $r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$ とする．以下は同値

1. f は $\overline{D(z_0, r)}$ 上正則
2. $\exists R > r, s.t. f$ は $D(z_0, R)$ 上正則

Proof. (1) $\Longleftarrow$ (2) は $D(z_0, R) \supset \overline{D(z_0, r)}$ より自明
(1) $\Longrightarrow$ (2)
定義から，$\exists U \subset \mathbb{C}$: 開集合，s.t.$\overline{D(z_0, r)} \subset U$ かつ f は U 上正則

1. $U = \mathbb{C}$ なら，$R > r$ は何でもよい
2. $\mathbb{C}\backslash U \neq \emptyset$ のとき，$r < R < \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C}\backslash U) = \inf\{|z - z_0| : z \in \mathbb{C}\backslash U\}$ をみたす R を取れば，$|z - z_0| < R \Longrightarrow z \notin \mathbb{C}\backslash U, i.e. z \in U$．言い換えれば，$D(z_0, R) \subset U$ となり，f は $D(z_0, R)$ 上で正則

□

9 Cauchy の積分公式の応用

Theorem 9.1. Morera の定理
$D\subset\mathbb{C}$: 開集合，$f:D$ 上連続で，任意の閉三角形 $\triangle\subset D$ に対して $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z=0\Longrightarrow f$ は D 上正則

Proof. $\forall z_0\in D$ をとり固定する．D は開集合なので，$\exists r>0, s.t. D(z_0,r)\subset D$．$z\in D(z_0,r)$ に対して，$\gamma_z(t):=(1-t)z_0+tz, t\in[0,1]$ とおき，$F(z):=\displaystyle\int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$ と定義すれば，F は $D(z_0,r)$ 上正則で，$F'(z)=f(z)$．言い換えれば，F は $D(z_0,r)$ 上無限回微分可能で，f も $D(z_0,r)$ 上無限回微分可能 □

Corollary 9.2. $D\subset\mathbb{C}$: 開集合，$p_1,p_2,\cdots,p_m\in D$ とする
$f:D\to\mathbb{C}$ は連続で，$D\backslash\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$ 上正則ならば，f は D 上正則

Proof. 各 $D_j=D(p_j,r)$ で Morera の定理を適用すればよい

$$\begin{cases}\delta:=\min\{|p_j-p_k|:1\le j<k\le m\}\\ \rho:=\min\{\mathrm{dist}(p_j,\partial D):1\le j\le m\}\\ r:=\min\left\{\dfrac{\delta}{2},\dfrac{\rho}{2}\right\}>0\end{cases}\quad \text{とすれば}$$

$\overline{D(p_j,r)}\subset D$ で，$j\neq k\Longrightarrow D(p_j,r)\cap D(p_k,r)=\emptyset$
$1\le\forall i\le m$ を固定，$D_j:=D(p_j,r)$ とおくと，仮定より，f は D_j 上連続，$D_j\backslash\{p_j\}$ 上正則，D_j は開凸集合なので，補題より，D_j 内に含まれる任意の閉路 γ に対して $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$．Morera の定理より，$f$ は D_j 上正則 □

Theorem 9.3. $D\subset\mathbb{C}$: 開集合

1. 各 f_n は D 上で正則
2. D 内の任意のコンパクト集合 K に対して，$f_n\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}f$ は K 上一様収束

このとき，f は D 上正則で，D 内の任意のコンパクト集合 K 上で $\forall k\in\mathbb{N}, f_n^{(k)}\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}f^{(k)}$ は K 上一様収束

Proof.
1. $\forall a\in D$ をとり固定し，$\overline{D(a,r)}\subset D$ となる半径 $r>0$ を取っておく．仮定から，$f_n\to f$ は一様収束で，各 f_n は $\overline{D(a,r)}$ 上で連続なので，f は $\overline{D(a,r)}$ 上で連続，$\triangle\subset D(a,r)$ となる閉三角形に対して，各 f_n に対して，Cauchy の積分定理を適用すれば，$\forall n, 0=\displaystyle\int_{\partial\triangle} f_n(z)\,\mathrm{d}z$．$n\to\infty$ とすれば，$0=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\triangle} f_n(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z$．よって，$\triangle\subset D(a,r)$ は任意だったので，Morera の定理より，f は $D(a,r)$ 上正則．$a\in D$ は任意だったので，f は D 上正則
2. $K\subset D$ をみたすコンパクト集合 K を任意に取り固定する．K はコンパクトなので，有限個の点 $a_1,\cdots,a_m\in K$ と $r_1,\cdot,r_m>0, s.t. K\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^m D(a_i,r_i)\subset\bigcup_{i=1}^m\overline{D(a_i,2r_i)}\subset D$ とできる．$\forall i\in\{1,\cdots,m\},\forall k\in\mathbb{N}, f_n^{(k)}\to f^{(k)}\quad inD(a_j,r_j)$ が一様収束であることを示せれば，$f_n^{(k)}\to f^{(k)}$ が K で一様収束

   check of Claim. $B:=D(a_i,r_i),(1\le i\le m)$ と $k\in\mathbb{N}$ を任意に固定しておく.$\forall z\in B, f_n$ と f は $\overline{D(a_i,2r_i)}$ 上で正則なので，Cauchy の積分公式より $r(\theta):=a_it+2r_ie^{i\theta}, 0\le\theta\le$

2π

$$\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| = \frac{k!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f_n(\xi)-f(\xi)|}{|\xi-z|^{k+1}}|\mathrm{d}z| \tag{144}$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi}\cdot\max_{\xi\in\gamma^*}|f_n(\xi)-f(\xi)|\cdot\frac{2\pi}{r_i^{k+1}} \tag{145}$$

から，$\sup_{z\in B}\left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{r_i^{k+1}}\max_{\xi\in\gamma^*}|f_n(\xi)-f(\xi)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

□

Proposition 9.4. $D\subset\mathbb{C}$：開集合，$\overline{D(z_0,R)}\subset D, z_0\in\mathbb{C}, R>0$，$f$ は D 上で正則するとすると，$0<\forall r\leq R,\forall n\in\mathbb{N}$

1. 平均値定理

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t \tag{146}$$

2. Cauchy の評価式

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right| \tag{147}$$

Theorem 9.5. Liouville の定理
有界な整関数は定数関数のみである

Proof. f を有界な整関数とする，$M:=\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|<\infty$．このとき，Cauchy の評価式より，$\forall r>0$

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \frac{1}{r}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right| \tag{148}$$

$$\leq \frac{M}{r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{149}$$

$\forall z_0\in\mathbb{C}, f'(z_0)=0$．したがって，$f$ は定数関数である □

Theorem 9.6. 最大値の原理 ver.1
$\Omega\subset\mathbb{C}$：領域，$f:\Omega$ 上正則で，$\exists z_0\in\Omega, s.t. |f(z_0)|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|=:M$．このとき，$f$ は（Ω 上）定数関数

Proof. $z_0\in\Omega$ で Ω は開集合なので，$\exists R>0, s.t. D(z_0,R)\subset\Omega$．$|f|$ は $D(_0,R)$ は定数 C を示せば，f は $D(z_0,R)$ 上定数 C' より，一致の定理より，f は Ω 上で定数関数 C' と一致

check of Claim. $z_0\neq\forall z\in D(z_0,R)$ をとり固定数 r．$0<r:=|z_0-z|<R, \gamma(t):=z_0+re^{it}, t\in[0,2\pi]$．Cauchy の平均値定理より

$$|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t\right| \tag{150}$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|\mathrm{d}t \tag{151}$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\mathrm{d}t=M=|f(z_0)| \tag{152}$$

□

$\square$

Theorem 9.7. 最大値の原理 ver.2
$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$：有界な領域，$f : \Omega$ 上正則，$\overline{\Omega}$ 上連続とする．このとき，$|f|$ は境界 $\partial\Omega$ 上で最大値をとる

Proof. $\overline{\Omega}$ はコンパクトで，$|f|$ は $\overline{\Omega}$ 上連続なので，$\exists z_0 \in \overline{\Omega}, s.t. |f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$

1. $z_0 \in \partial\Omega$ のとき，主張成立
2. $z_0 \in \Omega$ のとき，$|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \geq \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \geq |f(z_0)|$

最大値の原理 ver.1 より，f は Ω 上定数関数で，i.e.$\exists C \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \Omega, f(z) = C$．$t$ は $\overline{\Omega}$ 上連続なので，$\forall z \in \overline{\Omega}, f(z) = C$ が成り立つ $\square$

10 Laurent 展開

Theorem 10.1. $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty, f$ は円環領域 $A[z_0; R_1, R_2]$ 上で正則とする．このとき

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0^n)} \quad (z \in A(z_0; R_1, R_2)) \tag{153}$$

と一意的に展開できる．ここで，係数 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は以下の条件をみたす：

1. $R_1 < \forall r < R_2, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{-n}|}{r^n} < \infty$
2. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \quad \left(\gamma(t) := z_0 + re^{it}, R_1 < r < R_2, t \in [0, 2\pi]\right)$

Proof. 1. Laurent 級数の係数 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が (1) をみたす：
$\forall r \in (R_1, R_2)$ を固定する．$R_2 > |z_1 - z_0| > r > |z_2 - z_0| > R_1$ をみたす z_1, z_2 をとると，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z_2 - z_0)^n}$ が収束しているので，Laurent 級数は $\{|z - z_0| = r\}$ 上で絶対一様収束している

2. 係数の一意性：
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$ と展開されているとする,$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$ とおく．$m \in \mathbb{Z}$ を任意に取り，固定しておくと

$$2\pi i a_m = \int_\gamma f(z) (z - z_0)^{-m-1} \mathrm{d}z \tag{154}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_\gamma (z - z_0)^{n-m-1} \mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \int_\gamma (z - z_0)^{-n-m-1} \mathrm{d}z \tag{155}$$

$$= 2\pi i b_m \tag{156}$$

3. 展開可能性：
$z \in A(z_0; R_1, R_2)$ を任意に取り固定する．$R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ をみたす r_1, r_2 をとり，$\gamma_i(t) := z_0 + r_i e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$ とおく．Cauchy の積分定理より

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{157}$$

ここで，$\frac{1}{\xi - z}$ を冪級数展開すると，$\xi \in \gamma_2^*$ のとき，$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1$ に注意すれば

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \tag{158}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \tag{159}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \tag{160}$$

$\xi \in \gamma_1^*$ のとき，$\left|\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{r_1}{|z - z_0|} < 1$ なので

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} \tag{161}$$
$$= \frac{1}{z_0 - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} \tag{162}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{163}$$

従って

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{164}$$
$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi \tag{165}$$

なので，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ と Laurent 展開できる

□

Definition 10.2. 孤立特異点
$f : D \to \mathbb{C}, z_0 \in \overline{D}$． z_0 が f の孤立特異点である $\iff \exists R > 0, s.t. f$ は $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上で正則であるが，$D(z_0, R)$ 上で正則ではない

Definition 10.3. 孤立特異点の分類
z_0 : f の孤立特異点，z_0 を中心とする Laurent 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$．
ここで，$R_f(z; z_0) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は正則部で，$P_f(z; z_0) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ を主要部とする

- z_0 が f の可除特異点である $\iff P_f(z; z_0) \equiv 0$
- z_0 が f の位数 k の極である $\iff \exists k \in \mathbb{N}, s.t. a_{-k} \neq 0, \forall n \geq k+1, a_{-n} = 0$
- z_0 が f の真性特異点である $\iff \forall n \in \mathbb{N}, a_{-n} \neq 0$（主要部の項が無限個）

Theorem 10.4. Riemann の定理
$\exists R > 0, s.t. f : D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上で正則かつ有界 $\Longrightarrow z_0$ は f の除去可能特異点

Remark 10.5. 逆に，z_0 が除去可能特異点ならば，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ on $D(z_0, R') \setminus \{z_0\}$ と Taylor 展開できる

Proof. f は $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ での Laurent 展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ の a_{-n} について評価を行う
f は $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上で有界なので，$+\infty > M := \sup\{|f(z)| : z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}\}$ とおく

と，$|z-z_0| = r\,(< R) \Longrightarrow |f(z)| \leq M$ に注意して，$\forall r \in (0, R)$ に対して

$$
\begin{aligned}
|a_{-n}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,(z-z_0)^{n-1}\,\mathrm{d}z \right| && (166) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} |f(z)|\,|z-z_0|^{n-1}\,|\mathrm{d}z| && (167) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n \xrightarrow{r \to 0} 0 && (168)
\end{aligned}
$$

従って，z_0 は f の除去可能特異点である □

11 留数定理

Definition 11.1. 留数
$f : D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \quad (0 < R \le \infty)$ 上正則で，f の z_0 を中心とした Laurent 展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \forall z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\} \tag{169}$$

の $\dfrac{1}{z - z_0}$ の係数 a_{-1} を z_0 における f の留数といい，$\mathrm{Res}(f, z_0)$ で表す．言い換えれば

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \tag{170}$$

また，$R_f(z, z_0) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は正則部で，$P_f(z, z_0) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ は主要部である

Remark 11.2. 1. z_0 が除去可能特異点 $\overset{def}{\iff}$ $P_f(z, z_0) = 0$ で，$a_{-1} = 0, i.e. \mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

2. f が z_0 で正則 $\Longrightarrow$ 展開可能 $\Longrightarrow P_f(z, z_0) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

(2) の逆は一般には成立しない．例えば $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ のとき，$\mathrm{Res}(f, 0) = 0$ だが，0 で除去可能でも正則でもない

Lemma 11.3. $f : D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ とし，$0 < r < R$ に対して，$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$ とすると

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P_f(z, z_0)\,\mathrm{d}z \tag{171}$$

Theorem 11.4. 留数定理（円板）
$p_1, p_2, \cdots, _n \in D(z_0, R), f$ は $D(z_0, R) \setminus \{P_1, \cdots, P_n\}$ 上正則,$\delta := \mathrm{dist}(\partial D(z_0, R), \{P_1, \cdots, P_n\}) > 0, \gamma(t) := z_0 + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]), R - \delta < r < R$ とおく．このとき

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, P_k) \tag{172}$$

Theorem 11.5. 留数定理（扇型）
$z_1, z_2 \in \partial D(z_0, R), R > 0$ とし，$0 \le \theta_1 := \arg(z_1 - z_0) < \arg(z_2 - z_0) =: \theta_2 < 2\pi$ とする．$D_+ := \{z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\} : \theta_1 < \arg(z - z_0) < \theta_2\} \ni p_1, p_2, \cdots, p_l$ で，$D_- := D(z_0, R) \setminus \overline{D_+} \ni q_1, q_{2, \cdots, }q_m$ とおく．f は $\overline{D(z_0, R)} \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_l, q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ 上で正則とする．$\gamma_\pm$ は $\partial D_\pm$ を正の向きに一周した閉路とする．このとき

1. $\displaystyle\int_{\gamma_+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \mathrm{Res}(f, p_k)$

2. $\displaystyle\int_{\gamma_-} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, q_k)$

が成り立つ

Remark 11.6. 留数定理（円板）より

$$\int_{\gamma_+} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D(z_0, R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{l} \mathrm{Res}(f, p_k) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, q_k) \right) \tag{173}$$

なので，(1) が示れば，(2) も示せたことになる

Example 11.7. 極の場合の留数計算・I
$f : D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上で正則とし，z_0 は f の位数 k の極とする
$k = 1$ のとき，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$
$k \geq 2$ のとき，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$

Proof. $k = 1$ のとき，$f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ と Laurent 展開されているので

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{174}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \tag{175}$$

$k \geq 2$ のとき

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^{-k}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{176}$$

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1} (z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{177}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right) = (k-1)! a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \times \cdots \times (n+2) a_n (z - z_0)^{n+1} \tag{178}$$

より，$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right)$ □

Example 11.8. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ とし，$z = 0$ は見かけ上では位数 4 に見えるが，実際は位数 3 の極である

Proof. $e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ なので

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{179}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!} \tag{180}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z} + \cdots \tag{181}$$

□

Example 11.9. 計算方法・II
$f(z) = \dfrac{h(z)}{(z - z_0)^k}$ とし，h は z_0 で正則とする
このとき，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right) = \dfrac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(z_0)$．とくに，$m := \min \left\{ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : h^{(0)}(z_0) \neq 0 \right\}$ とおくと

1. $m < k \Longrightarrow z_0$ は $(k - m)$ 位の極

2. $m \geq k \Longrightarrow z_0$ は除去可能特異点

Proof. $h(z_0)$ で正則なので，展開すると $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ *in* $D(z_0, \exists R)$ なので，$z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} && (182)\\
&= \frac{b_0}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z-z_0} + \sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-k} && (183)
\end{aligned}
$$

なので，留数の定義から

$$
\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{k-1} = \frac{h^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \tag{184}
$$

m の定め方から，$b_m \neq 0$ かつ $n \leq m-1 \Longrightarrow b_n = 0$ なので

- $m \leq k-1$ のとき，$P_f(z, z_0) = \frac{b_m}{(z-z_0)^{k-m}} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z-z_0}$ となるので，z_0 の位数は $k-m$
- $m \geq k$ のとき，$n \leq k-1 \Longrightarrow n \leq m-1 \Longrightarrow b_n = 0$ なので，$P_f(z, z_0) \equiv 0$ となり，z_0 は除去可能特異点

□

Example 11.10. 計算方法・III

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ とし，h, g は z_0 で正則，$g(z_0) = 0$ かつ $g'(z_0) \neq 0$ とする．このとき，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$ となり，$h(z_0) \neq 0$ のとき，z_0 の位数は 1

Proof. $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$ に注意して，g を z_0 で展開すると

$$
\begin{aligned}
g(z) &= (z-z_0) g'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n && (185)\\
&= (z-z_0)\left(g'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}\right) =: (z-z_0)\tilde{g}(z) && (186)
\end{aligned}
$$

このとき，$\tilde{g}(z_0) = g'(z_0) \neq 0$ に注意すれば，$f(z) = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{h(z)}{\tilde{g}(z)}$ と考えれば

$$
\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{\tilde{g}(z_0)} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \tag{187}
$$

また，$h(z_0) \neq 0$ のとき

$$
m = \min\left\{ l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l}\left(\frac{h(z)}{\tilde{g}(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0} \neq 0 \right\} = 0 \quad \leq k = 1 \tag{188}
$$

なので，z_0 の位数は 1 である □

12 Fourier 変換

Theorem 12.1. 上半平面

- f は $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}\setminus\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ で正則
- f は実軸 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z=0\}$ で正則
- 上半平面で $\exists M>0,\exists R>0, s.t.\forall z\in\mathbb{C},\mathrm{Im}z>0$ かつ $|z|\geq R\Longrightarrow|f(z)|\leq\dfrac{M}{|z|}$

このとき，$\forall t>0$

$$F_t(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{itx}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(F_t,p_k\right) \tag{189}$$

Theorem 12.2. 下半平面

- f は $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z<0\}\setminus\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ で正則
- f は実軸 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z=0\}$ で正則
- 上半平面で $\exists M>0,\exists R>0, s.t.\forall z\in\mathbb{C},\mathrm{Im}z<0$ かつ $|z|\geq R\Longrightarrow|f(z)|\leq\dfrac{M}{|z|}$

このとき，$\forall t>0$

$$F_{-t}(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\mathrm{d}x=-2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(F_{-t},p_k\right) \tag{190}$$

Example 12.3. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin(tx)\mathrm{d}x\quad(t>0,a>0), e^{itx}=\cos(tx)+i\sin(tx)$ なので，$F_t(z):=f(z)e^{itx}$ とおくと，Thm12.1 を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}F_t(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(tx)\mathrm{d}x+i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(tx)\mathrm{d}x &(191)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(tx)\mathrm{d}x+2i\int_{0}^{\infty}f(x)\sin(tx)\mathrm{d}x &(192)\end{aligned}$$

- f の極は $z=ia$ と $z=-ia$ であり，上半平面にあるのは位数が 1 の $z=ia$ のみである
- $|f(z)|=\dfrac{1}{\left|z+\frac{a^2}{z}\right|}\leq\dfrac{1}{|z|-\frac{a^2}{|z|}}=\dfrac{|z|}{|z|-\frac{a^2}{|z|}}\cdot\dfrac{1}{|z|}$

Thm12.1 より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}F_t(x)\mathrm{d}x&=2\pi i\mathrm{Res}\left(F_t,ia\right) &(193)\\ &=2\pi i\lim_{z\to ia}(z-ia)F_t(z) &(194)\\ &=2\pi i\cdot\left.\frac{ze^{itz}}{z+ia}\right|_{z=ia} &(195)\\ &=i\pi e^{-at} &(196)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F_t(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(tx)\mathrm{d}x+2i\int_{0}^{\infty}f(x)\sin(tx)\mathrm{d}x$ より，両辺の実部と虚部を比べれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\cos(tx)\mathrm{d}x=0 \tag{197}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin(tx)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-at} \tag{198}$$

12.1 Cauchy の主値積分

12.1.1 $\mathbb{R}$ 上での広義積分

f が $\mathbb{R}$ 上で広義積分可能なとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{199}$$

$a=-b, i.e. 0$ を中心に対称な積分区間

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{200}$$

Example 12.4. $f(x)=x$ で，$p.v. \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\mathrm{d}x = 0$
f の Cauchy の主値積分は存在して 0 である．一方，$a<0<b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 x\mathrm{d}x + \int_0^b x\mathrm{d}x \tag{201}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{202}$$

なので，$a\to-\infty, b\to\infty$ のとき極限は存在しないから，f は $\mathbb{R}$ 上で広義積分可能ではない

12.1.2 $[a,b]\setminus\{c\}$ 上で連続なときの広義積分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{203}$$

は一般には非対称から

$$p.v. \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^{b}\right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{204}$$

$a=-\infty<c<b=\infty$ のときも同様に考えて,$p.v. \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^{\infty}\right) f(x)\,\mathrm{d}x$

Remark 12.5. 広義積分可能 $\Longrightarrow$ 主値積分可能で値も一致
主値積分可能 $\not\Longrightarrow$ 広義積分可能

Example 12.6. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $[-1,1]$ 上で Cauchy の主値積分可能であるが, 広義積分できない

$$p.v. \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0 \tag{205}$$

$\epsilon,\delta>0$ とすると

$$\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\log|x|]_{-1}^{-\epsilon} + [\log|x|]_{\delta}^{1} \tag{206}$$

$$= \log\epsilon - \log\delta \tag{207}$$

12.2　有理関数の積分

12.2.1　$\sin\theta, \cos\theta$ からなる有理関数

$F(X,Y)$ を X,Y に関する有理関数とすると，$\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ を計算する方法を考える
γ : 単位円周とし，$\gamma(\theta) := z = e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{208}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{209}$$

$$\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \tag{210}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{iz}\mathrm{d}z \tag{211}$$

なので

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_\gamma \frac{1}{i}F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}\mathrm{d}z \tag{212}$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma H(z)\,\mathrm{d}z \tag{213}$$

ここで，$H(z) := F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}$

Theorem 12.7. $H(z) := \dfrac{1}{z}F\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ は

1. 単位円周上に極を持たない
2. 単位円板内 $D(0,1)$ に含まれる H の極は $p_1, p_2, \cdots, p_m$ のみ

のとき

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(H, p_k) \tag{214}$$

Proof. $\displaystyle\int_\gamma H(z)\,\mathrm{d}z$ を留数定理を使えば

$$\int_\gamma H(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(H, p_k) \tag{215}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}\int_\gamma H(z)\,\mathrm{d}z \tag{216}$$

□

Example 12.8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ を計算してみる

Proof. $z = e^{i\theta}$ で変数変換すると，$\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{iz}\mathrm{d}z$ で

$$\frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^2}{5 - 4\frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \tag{217}$$

$$= \frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4z(2z-1)(z-2)} \tag{218}$$

変数変換した関数の単位円板内にある極はを考えると

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} \cdot \frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4z(2z-1)(z-2)}\mathrm{d}z \tag{219}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4z^2(2z-1)(z-2)}\mathrm{d}z \tag{220}$$

極は $z=0, z=\dfrac{1}{2}, z=2$ であり，円板内にあるのは位数 2 の $z=0$ と位数 1 の $z=\dfrac{1}{2}$ である

$$H(z) = \frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4z^2(2z-1)(z-2)} \tag{221}$$

$$\mathrm{Res}(H,0) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2 H(z)\right) \tag{222}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4(2z-1)(z-2)}\right) = \frac{5}{16} \tag{223}$$

$$\mathrm{Res}\left(H,\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)H(z) \tag{224}$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\cdot\frac{(z-1)^2(z+1)^2}{4z^2(z-2)} = -\frac{3}{16} \tag{225}$$

以上より

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} H(z)\,\mathrm{d}z \tag{226}$$

$$= 2\pi\left(\mathrm{Res}(H,0) + \mathrm{Res}\left(H,\frac{1}{2}\right)\right) \tag{227}$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{16}\right) = \frac{\pi}{4} \tag{228}$$

□

Example 12.9. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$ を計算してみる

Proof. $z=e^{i\theta}$ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ で

$$\cos^{2n}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \tag{229}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n}} \tag{230}$$

$$\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iz\mathrm{d}\theta \tag{231}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{iz}\mathrm{d}z \tag{232}$$

なので

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{i}\frac{1}{2^{2n}}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z \tag{233}$$

ここで，$\dfrac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}} = \dfrac{1}{z^{2n+1}}\left(1+2n\cdot z^2+\cdots+\left(z^2\right)^{2n}\right)$ から

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta \mathrm{d}\theta &= \frac{1}{i}\frac{1}{2^{2n}}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z && (234)\\
&= \frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n} && (235)\\
&= 2\pi\cdot\frac{\frac{1}{2^n}(2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n)(1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1))}{2n(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n)(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n)} && (236)\\
&= 2\pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n} && (237)\\
&= 2\pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} && (238)
\end{aligned}$$

□

12.2.2 有理関数の広義積分

R,Q：多項式とし，$F(z)=\dfrac{R(z)}{Q(z)}, P_F := \left\{z\in\mathbb{C} : z\text{は }F\text{ の極}\right\}$ とする

Theorem 12.10. 1. $F(x)$ は実軸上に極を持たない，$P_F\cap\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}z=0\}=\emptyset$

2. 分母 Q の次数 $\geq$ 分子 R の次数 $+2$

のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\substack{z\in P_F\\ \mathrm{Im}z>0}}\mathrm{Res}(F,z) \tag{239}$$

Example 12.11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ を計算してみる

Proof. $F(z) := \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ とし，F の極は $z=i$ と $z=-i$ で，ともに位数が 1 である．上半平面にある極は $z=i$ のみであるから

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= 2\pi i\mathrm{Res}(F,i) && (240)\\
&= 2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)F(z) && (241)\\
&= \pi && (242)
\end{aligned}$$

□

Example 12.12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

Proof. $F(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4} = \dfrac{z^2}{(z-A)(z-B)(z-C)(z-D)}$ とし，極は $z=\exp\left(\dfrac{1}{4}\pi\right), z=\exp\left(\dfrac{3}{4}\pi\right), z=\exp\left(\dfrac{5}{4}\pi\right), z=\exp\left(\dfrac{7}{4}\pi\right)$ であるから,上半平面にあるのは $z=\exp\left(\dfrac{1}{4}\pi\right), z=\exp\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ である

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= 2\pi i(\mathrm{Res}(F,A)+\mathrm{Res}(F,B)) && (243)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}}-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} && (244)
\end{aligned}$$

□

参考文献