

## 1 1.1

(1)

$\sin, \cos$  は  $C^\infty$  であるから、 $\sigma$  も  $C^\infty$  である

$$\sigma_u(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix}, \sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2u^2 \cos v \\ -2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$u \in (0, \infty), v \in (0, 2\pi)$  から  $\cos v = \sin v = 0$  をみたす  $v$  は存在しない  
よって、 $\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ 、 $\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v)$  は線形独立である

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \in (0, \infty) \times (0, 2\pi), \sigma(u, v) = \sigma(u', v')$  とする

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \sigma(u', v') \\ \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u' \cos v' \\ u' \sin v' \\ 2u'^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u' \\ \cos v = \cos v' \\ \sin v = \sin v' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases} \Rightarrow \sigma \text{ は単射である}$$

以上より、 $\sigma(D)$  は  $\sigma$  でパラメーター表示された曲面片である

(2)

$x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z$  から、 $\forall p \in S, p \in T$ . また  $u \in (0, \infty), v \in (0, 2\pi)$  から、 $y = u \sin v \neq 0$  (実際、この  $y \neq 0$  の意味は、定義域の中ですべて  $y = 0$  をみたす点を除くものである。言い換えれば、 $x \geq 0, y = 0$  を除く ( $x = 0$  は  $v = \pi$  であるとき))

よって、 $S \subset T \setminus C$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T \setminus C$  とする。 $xy$  平面で極座標変換をすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix} \Rightarrow z = x^2 + y^2 = u^2$$

また、極座標変換より  $u > 0$ . なお、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \notin C$  から、 $v \neq 2n\pi$

よって、 $v \in (0, 2\pi)$ . 言い換えれば、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S, T \setminus C \subset S$

以上より、 $S = T \setminus C$

(3)

$$p = \sigma(1, \pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} \sigma_u(1, \pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_v(1, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \sigma_u(1, \pi) \times \sigma_v(1, \pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \pi := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x+1) + (z-1) = 0 \right\}$$

(4)

$$\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} -2u^2 \cos v \\ -2u^2 \sin v \\ u \end{pmatrix}, \|\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)\| = u\sqrt{4u^2 + 1}$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \cos v \\ -2u \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2 2.1

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos u \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\sigma_u(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 u \cos v \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 u \sin v \\ \sin u \cos u \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{\frac{1}{3} \sin^4 u \cos^2 v + \frac{1}{3} \sin^4 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos^2 u} \quad (5)$$

$$= \sin u \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2 u + \cos^2 u} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin u \sqrt{2 \cos^2 u + 1} \quad (7)$$

よって、 $T$  の曲面積は

$$\text{Area}(T) = \iint_{\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 2\pi)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv \quad (8)$$

$$= \iint_{\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 2\pi)} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin u \sqrt{2 \cos^2 u + 1} \, du \, dv \quad (9)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin u \sqrt{2 \cos^2 u + 1} \, du \quad (10)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_{-1}^0 \sqrt{2s^2 + 1} \, ds \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \int_{-\arctan \sqrt{2}}^0 \frac{1}{\cos^3 t} \, dt \quad (12)$$

ここでまず、 $\int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt$  を考える

$$I = \int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt \quad (13)$$

$$= \tan t \frac{1}{\cos t} - \int \tan^2 t \frac{1}{\cos t} \, dt \quad (14)$$

$$= \tan t \frac{1}{\cos t} - \int \left( \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \frac{1}{\cos t} \, dt \quad (15)$$

$$= \tan t \frac{1}{\cos t} - \int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt + \int \frac{1}{\cos t} \, dt \quad (16)$$

$$= \tan t \frac{1}{\cos t} - \int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt + \log \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| \quad (17)$$

$$\text{よって、} 2 \int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt = \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log \left| \tan t + \frac{1}{\cos t} \right|$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos^3 t} \, dt = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log \left| \tan t + \frac{1}{\cos t} \right| \right)$$

$$\text{Area}(T) = \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \int_{-\arctan \sqrt{2}}^0 \frac{1}{\cos^3 t} \, dt \quad (18)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log \left| \tan t + \frac{1}{\cos t} \right| \right) \right]_{-\arctan \sqrt{2}}^0 \quad (19)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \left( 0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(-\arctan \sqrt{2})}{\cos^2(-\arctan \sqrt{2})} + \log \left| \tan(-\arctan \sqrt{2}) + \frac{1}{\cos(-\arctan \sqrt{2})} \right| \right) \right) \quad (20)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \pi \left( -\frac{1}{2} \left( -\sqrt{6} + \log \left| -\sqrt{2} + \sqrt{3} \right| \right) \right) \quad (21)$$

$$= \pi - \frac{\sqrt{6}}{6} \pi \log(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad (22)$$

## 3 2.2

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{2} \quad (27)$$

(1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} x^2 + y - 4 \\ 3xy \\ 2xz + z^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\nabla \times v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 + y - 4 \\ 3xy \\ 2xz + z^2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ 3y - 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

(2)

$$\iint_{\sigma(\bar{\Omega})} \nabla \times v_1 \, dA = \iint_{\sigma(\bar{\Omega})} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{u^2+v^2} \\ 3v-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv \quad (31)$$

$$= \iint_{\sigma(\bar{\Omega})} (5v-1) \, dudv \quad (32)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_2^3 (5a^2 \sin t - a) \, dadt \quad (33)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{5}{3}a^3 \sin t - \frac{1}{2}a^2 \right]_2^3 \, dt \quad (34)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{95}{3} \sin t - \frac{5}{2} \right) \, dt \quad (35)$$

$$= \left[ -\frac{95}{3} \cos t - \frac{5}{2}t \right]_0^{2\pi} \quad (36)$$

$$= -5\pi \quad (37)$$

一方  $C_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $C_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \\ 2 \end{pmatrix}$  とすると

$$C_1'(t) = \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, C_2'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{C_1} v_1 \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 9 \cos^2 t + 3 \sin t - 4 \\ 27 \sin t \cos t \\ 18 \cos t + 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \quad (38)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-27 \sin t \cos^2 t - 9 \sin^2 t + 12 \sin t + 81 \sin t \cos^2 t) \, dt \quad (39)$$

$$= \int_0^{2\pi} (54 \sin t \cos^2 t - 9 \sin^2 t + 12 \sin t) \, dt \quad (40)$$

$$= -9\pi \quad (41)$$

$$\int_{C_2} v_1 \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4 \cos^2 t - 2 \sin t - 4 \\ -12 \sin t \cos t \\ 8 \cos t + 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \quad (42)$$

$$= \int_0^{2\pi} (16 \sin t \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 8 \sin t) \, dt \quad (43)$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} (4 \sin t \cos^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t) \, dt \quad (44)$$

$$= 4\pi \quad (45)$$

$$\int_{\sigma(\partial\Omega)} v_1 \cdot dx = \int_{C_1} v_1 \cdot dx + \int_{C_2} v_1 \cdot dx = -5\pi$$

(3)

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2z - x^2 \\ -2xy - y \\ 2y \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\nabla \times v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2z - x^2 \\ -2xy - y \\ 2y \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2y \end{pmatrix} \quad (48)$$

(4)

$$\iint_{\sigma(\bar{\Omega})} \nabla \times v_2 \, dA = \iint_{\sigma(\bar{\Omega})} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \, du \, dv \quad (49)$$

$$= -2 \iint_{\sigma(\bar{\Omega})} \left( \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + v \right) \, du \, dv \quad (50)$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_2^3 (a(a+1) \sin \theta + a \cos \theta) \, da \, d\theta \quad (51)$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{23}{6} \sin \theta + \frac{5}{2} \cos \theta \right) \, d\theta \quad (52)$$

$$= 0 \quad (53)$$

一方

$$\int_{C_1} v_2 \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6 - 9 \cos^2 t \\ -18 \sin t \cos t - 3 \sin t \\ 6 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ 3 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \quad (54)$$

$$= -9 \int_0^{2\pi} (3 \sin t \cos^2 t + 2 \sin t + \sin t \cos t) \, dt \quad (55)$$

$$= 0 \quad (56)$$

$$\int_{C_2} v_2 \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4 - 4 \cos^2 t \\ 8 \sin t \cos t + 2 \sin t \\ -4 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \quad (57)$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos^2 t + 2 \sin t + \sin t \cos t) \, dt \quad (58)$$

$$= 0 \quad (59)$$

$$\text{よって、} \int_{\sigma(\partial\Omega)} v_2 \cdot dx = \int_{C_1} v_2 \cdot dx + \int_{C_2} v_2 \cdot dx = 0$$

## 4 3.1

(1)

$f = x^2 + y^2 - z^2 + r^2$  とすると  $S \cap \mathbb{R}^3 = S = f^{-1}(\{0\})$

$$\forall p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$$

$$(\nabla f)(p) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad (60)$$

もし  $(\nabla f)(p) = 0$  となると、 $x = y = z = 0$  で、 $r = 0$   
これは  $r > 0$  と矛盾するから  $(\nabla f)(p) \neq 0$

(2)

$\sigma_+$  が局所パラメーター表示

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \sigma_+(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

$u^2 + v^2 - (r^2 + u^2 + v^2) = -r^2$  から、 $\sigma_+(\mathbb{R}^2) \subset S$

・  $u, v$  と  $\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}$  は  $C^\infty$  から、 $\sigma_+$  も  $C^\infty$

$$\cdot \sigma_{+u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}, \sigma_{+v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{+u} \times \sigma_{+v} = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の第三成分は } 0 \text{ でないから } \sigma_{+u} \times \sigma_{+v} \neq 0$$

よって、 $\sigma_{+u}$  と  $\sigma_{+v}$  は線形独立

$$\cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \sqrt{r^2 + u'^2 + v'^2} \end{pmatrix} \text{ とすると、} \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$$

よって、 $\sigma_+$  は単射

以上より、 $\sigma_+$  は  $S$  の局所パラメーター表示である

$\sigma_-$  が局所パラメーター表示

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \sigma_-(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

$u^2 + v^2 - (r^2 + u^2 + v^2) = -r^2$  から、 $\sigma_-(\mathbb{R}^2) \subset S$

・  $u, v$  と  $\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}$  は  $C^\infty$  から、 $\sigma_-$  も  $C^\infty$

$$\cdot \sigma_{-u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix}, \sigma_{-v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{-u} \times \sigma_{-v} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{r^2 + u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の第三成分は } 0 \text{ でないから } \sigma_{-u} \times \sigma_{-v} \neq 0$$

よって、 $\sigma_{-u}$  と  $\sigma_{-v}$  は線形独立

$$\cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ -\sqrt{r^2 + u'^2 + v'^2} \end{pmatrix} \text{ とすると、} \begin{cases} u = u' \\ v = v' \end{cases}$$

よって  $\sigma_{-}$  は単射

以上より、 $\sigma_{-}$  は局所パラメータ表示

(3)

$$(S \subset \sigma_{+}(\mathbb{R}^2) \cup \sigma_{-}(\mathbb{R}^2))$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S, x^2 + y^2 - z^2 + r^2 = 0$$

$$\implies z = \pm \sqrt{r^2 + x^2 + y^2}$$

$$\text{よって、} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2 + x^2 + y^2} \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{r^2 + x^2 + y^2} \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{これを言い換えると、} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \sigma_{+}(\mathbb{R}^2) \cup \sigma_{-}(\mathbb{R}^2)$$

$$(S \supset \sigma_{+}(\mathbb{R}^2) \cup \sigma_{-}(\mathbb{R}^2))$$

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\sigma_{+}(\mathbb{R}^2) \cup \sigma_{-}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R} \right\} \quad (61)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \pm \sqrt{r^2 + u^2 + v^2} \end{pmatrix} \middle| u, v \in \mathbb{R} \right\} \quad (62)$$

(3) に対して、 $u^2 + v^2 - (\pm \sqrt{r^2 + u^2 + v^2})^2 = r^2$  であるから

$$\sigma_{+}(u, v) \vee \sigma_{-}(u, v) \in S$$

以上より、 $S = \sigma_{+}(\mathbb{R}^2) \cup \sigma_{-}(\mathbb{R}^2)$

(4)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + r^2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \text{ から}$$

$$T_p S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_0x + 2y_0y - 2z_0z = 0 \right\}$$

(5)

 $\sigma_+$  に対して

$$\frac{\sigma_{+u} \times \sigma_{+v}}{\|\sigma_{+u} \times \sigma_{+v}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{r^2+u^2+v^2} + \frac{v^2}{r^2+u^2+v^2} + 1}} \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ -\frac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \quad (64)$$

 $\sigma_-$  に対して

$$\frac{\sigma_{-u} \times \sigma_{-v}}{\|\sigma_{-u} \times \sigma_{-v}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{r^2+u^2+v^2} + \frac{v^2}{r^2+u^2+v^2} + 1}} \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{r^2+u^2+v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \quad (66)$$

また、 $n(\sigma_+(u, v))$ ,  $n(\sigma_-(u, v))$  それぞれは

$$n(\sigma_+(u, v)) = \frac{(\nabla f)(\sigma_+(u, v))}{\|(\nabla f)(\sigma_+(u, v))\|} \quad (67)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -2\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$= -\frac{\sigma_{+u} \times \sigma_{+v}}{\|\sigma_{+u} \times \sigma_{+v}\|} \quad (69)$$

$$n(\sigma_-(u, v)) = \frac{(\nabla f)(\sigma_-(u, v))}{\|(\nabla f)(\sigma_-(u, v))\|} \quad (70)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2+2u^2+2v^2}} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 2\sqrt{r^2+u^2+v^2} \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$= \frac{\sigma_{-u} \times \sigma_{-v}}{\|\sigma_{-u} \times \sigma_{-v}\|} \quad (72)$$

よって、単位法ベクトル場  $n$  と共に正の向きになるのは  $\sigma_-$  である

## 5

(1)

$$T_{R,r} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

$$\text{有界性: } \begin{cases} \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 \leq r^2 \\ z^2 \leq r^2 \end{cases} \quad \text{から} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq (R+r)^2 \\ z^2 \leq r^2 \end{cases}$$

$$\text{言い換えれば} \quad \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \leq \sqrt{(R+r)^2 + r^2}$$

閉集合:  $\{x_n\} \subset T_{R,r}$  を収束列とすると  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  であり、 $f$  は連続写像であるから、 $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

また、 $f$  に対して、 $f(x) = r^2, f(x_n) = r^2$  だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in T_{R,r}$

以上より、 $T_{R,r}$  は閉曲面である

(2)

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} (R+r \cos u) \cos v \\ (R+r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -(R+r \cos u) \sin v \\ (R+r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(R+r \cos u) \sin v \\ (R+r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$= \begin{pmatrix} -r(R+r \cos u) \cos u \cos v \\ -r(R+r \cos u) \cos u \sin v \\ -r(R+r \cos u) \sin u \cos^2 v - r(R+r \cos u) \sin u \sin^2 v \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$= \begin{pmatrix} -r(R+r \cos u) \cos u \cos v \\ -r(R+r \cos u) \cos u \sin v \\ -r(R+r \cos u) \sin u \end{pmatrix} \quad (75)$$

また

$$v(\sigma(u, v)) = v((R+r \cos u) \cos v, (R+r \cos u) \sin v, r \sin u) \quad (76)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(R+r \cos u) \sin v}{(R+r \cos u)^2} \\ \frac{(R+r \cos u) \cos v}{(R+r \cos u)^2} \\ \frac{r \sin u}{(R+r \cos u)^2} \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sin v}{R+r \cos u} \\ \frac{\cos v}{R+r \cos u} \\ \frac{r \sin u}{(R+r \cos u)^2} \end{pmatrix} \quad (78)$$

以上

$$\begin{aligned}
\iint_S v \cdot dA &= \iint_{[0,2\pi]^2} \begin{pmatrix} -\frac{\sin v}{R+r \cos u} \\ \frac{R+r \cos u}{r \sin u} \\ (R+r \cos u)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r(R+r \cos u) \cos u \cos v \\ -r(R+r \cos u) \cos u \sin v \\ -r(R+r \cos u) \sin u \end{pmatrix} du dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( r \cos u \sin v \cos v - r \cos u \sin v \cos v - \frac{r^2 \sin^2 u}{R+r \cos u} \right) du dv \\
&= -r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r \cos u} du dv \\
&= -2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r \cos u} du
\end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r \cos u} du$  だけ考えよう

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r \cos u} du = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos^2 u}{R+r \cos u} du \quad (79)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{r^2} (R+r \cos u) (R-r \cos u) + 1 - \frac{R^2}{r^2}}{R+r \cos u} du \quad (80)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} (R-r \cos u) + \frac{1 - \frac{R^2}{r^2}}{R+r \cos u} \right) du \quad (81)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{r^2} - \frac{1}{r} \cos u \right) du + \frac{r^2 - R^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r \cos u} du \quad (82)$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} + \frac{r^2 - R^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r \cos u} du \quad (83)$$

ここで、 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r \cos u} du$  を計算しよう

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r \cos u} du = \int_0^{2\pi} \frac{R-r \cos u}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du \quad (84)$$

$$= R \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du - r \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du \quad (85)$$

$$= R \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du \quad (86)$$

後ろの  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du$  について、 $\frac{\cos u}{R^2 - r^2 \cos^2 u}$  は奇関数だから積分範囲内で総和 0

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 - r^2 \cos^2 u} du = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 - r^2 \frac{\cos 2u + 1}{2}} du \quad (87)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right) - \frac{r^2}{2} \cos 2u} du \quad (88)$$

計算便利のため、 $a = R^2 - \frac{r^2}{2}$ ,  $b = \frac{r^2}{2}$  とすると (28) 式は  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b \cos 2u} du$  になり.

また、定積分の処理が面倒なので、不定積分の形で計算しよう

$$\int \frac{1}{a - b \cos 2u} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{a - b \cos x} dx \quad (89)$$

ここで、 $t = \tan \frac{x}{2}$  と変換すると  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  で  
積分の上下限は共に 0 になるが、実際 2 回  $-\infty \rightarrow \infty$  の広義積分が出てくるから

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{a-b \cos x} dx = 2 \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a-b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \quad (90)$$

$$= 2 \int \frac{1}{a(1+t^2) - b(1-t^2)} dt \quad (91)$$

$$= 2 \int \frac{1}{(a-b) + (a+b)t^2} dt \quad (92)$$

$$= \frac{2}{a-b} \int \frac{1}{1 + \frac{a+b}{a-b} t^2} dt \quad (93)$$

そして、 $\frac{a+b}{a-b} t^2 = \tan^2 \theta$  となる変数変換をすると  $dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} d\theta$  となり

$$\frac{2}{a-b} \int \frac{1}{1 + \frac{a+b}{a-b} t^2} dt = \frac{2}{a-b} \int \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} d\theta \quad (94)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \int d\theta \quad (95)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \theta \quad (96)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} t \right) \quad (97)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (98)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan u \right) \quad (99)$$

以上より

$$\int \frac{1}{a-b \cos 2u} du = \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan u \right) + C \quad (100)$$

から

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b \cos 2u} du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan u \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \quad (101)$$

$$+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan u \right) \right]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\epsilon} \quad (102)$$

$$+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan u \right) \right]_{\frac{3\pi}{2}+\epsilon}^{2\pi} \quad (103)$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \quad (104)$$

$$= \frac{2\pi}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (105)$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r\cos u} du = R \int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos 2u} du \quad (106)$$

$$= \frac{2\pi R}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (107)$$

$$= \frac{2\pi R}{R^2-r^2} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} \quad (108)$$

(24) 式に代入すると

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r\cos u} du = \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{R^2-r^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R+r\cos u} du \quad (109)$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{R^2-r^2}{r^2} \frac{2\pi R}{R^2-r^2} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} \quad (110)$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{2\pi R}{r^2} \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}} \quad (111)$$

$$= \frac{2\pi R}{r^2} - \frac{2\pi}{r^2} \sqrt{R^2-r^2} \quad (112)$$

$$= \frac{2\pi}{r^2} \left( R - \sqrt{R^2-r^2} \right) \quad (113)$$

だから

$$\iint_S v \cdot dA = -2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 u}{R+r\cos u} du \quad (114)$$

$$= -2\pi r^2 \cdot \frac{2\pi}{r^2} \left( R - \sqrt{R^2-r^2} \right) \quad (115)$$

$$= -4\pi^2 \left( R - \sqrt{R^2-r^2} \right) \quad (116)$$

(3)

$v = \nabla \times \omega$  をみたま  $\omega$  が存在すると仮定すると、Stokes の定理より

$$\iint_S v \cdot dA = \iint_S (\nabla \times \omega) \cdot dA = 0 \quad (117)$$

(2) の計算結果により、 $R = \sqrt{R^2-r^2}$ . 言い換えれば、 $r = 0$   
これは  $r > 0$  と反するから. このような  $\omega$  は存在しない

## 6 4.1

(1)

$$\partial V = \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

(2)

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2, \nabla f = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{2}y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (118)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + 4y^2 + 4z^2}} \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{2}y \\ 2z \end{pmatrix} \quad (119)$$

(3)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \quad (120)$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3 \quad (121)$$

(4)

$$\iiint_{\bar{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz = \iiint \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} 3 dx dy dz \quad (122)$$

$$= 3 \iiint \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1 \right\} 2 du dv dw \quad (123)$$

$$= 6 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \int_{-\sqrt{1-u^2-v^2}}^{\sqrt{1-u^2-v^2}} dw dv du \quad (124)$$

$$= 6 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 2\sqrt{1-u^2-v^2} dv du \quad (125)$$

$$= 12 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} 2\sqrt{1-u^2-v^2} dv du \quad (126)$$

$$= 12 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{2}\pi(u^2 - 1) \right) du \quad (127)$$

$$= 6\pi \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \quad (128)$$

$$= 8\pi \quad (129)$$

ここで  $\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 2 \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$  とする.

$\sigma_u = \begin{pmatrix} 2 \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -2 \sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} 2 \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ 2 \sin^2 u \sin v \\ 2 \sin u \cos u \end{pmatrix} \quad (131)$$

で

$$\iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \begin{pmatrix} 2 \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ 2 \sin^2 u \sin v \\ 2 \sin u \cos u \end{pmatrix} du dv \quad (132)$$

$$= \iint_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} (2 \sin^3 u + 2 \sin u \cos^2 u) du dv \quad (133)$$

$$= 4\pi \int_0^\pi (\sin^3 u + \sin u \cos^2 u) du \quad (134)$$

$$= 4\pi [-\cos u]_0^\pi \quad (135)$$

$$= 8\pi \quad (136)$$

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz \quad (137)$$

**Remark 6.1.** 三重積分  $\iiint \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} dx dy dz$  に対して、分割方法は二つがある.

$z = h > 0$  の平面による断面積に対して  $h$  に関して積分した体積の 2 倍 と 第一象限の体積の 8 倍

### 三重積分の別解の 1

まず  $z = h > 0$  の平面による断面積  $S(h)$  を考える

断面の方程式は  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 - h^2$  であるから、これは楕円  $\frac{x^2}{4(1-h^2)} + \frac{y^2}{1-h^2} = 1$  である

$\begin{cases} x = 2\sqrt{1-h^2} \cdot u \\ y = \sqrt{1-h^2} \cdot v \end{cases}$  で変数変換すると、 $\det J = \begin{vmatrix} 2\sqrt{1-h^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-h^2} \end{vmatrix} = 2(1-h^2)$

だから  $S(h)$  は

$$S(h) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 1 \cdot |\det J| du dv \quad (138)$$

$$= 2(1-h^2) \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv \quad (139)$$

$$= 2(1-h^2) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv du \quad (140)$$

$$= 2(1-h^2) \pi \quad (141)$$

$$\iiint \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} dx dy dz = 2 \int_0^1 S(h) dh \quad (142)$$

$$= 2 \int_0^1 2(1-h^2) \pi dh \quad (143)$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1-h^2) dh \quad (144)$$

$$= \frac{8}{3}\pi \quad (145)$$

だから、 $\iiint_{\overline{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz = 3 \cdot \frac{8}{3}\pi = 8\pi$

### 三重積分の別解の2

$$\iiint \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} dx dy dz = 8 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{1-z^2-\frac{x^2}{4}}} dy dx dz \quad (146)$$

$$= 8 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-z^2}} \sqrt{1-z^2-\frac{x^2}{4}} dx dz \quad (147)$$

$$= 4\pi \int_0^1 (1-z^2) dz \quad (148)$$

$$= \frac{8}{3}\pi \quad (149)$$

だから、 $\iiint_{\overline{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz = 3 \cdot \frac{8}{3}\pi = 8\pi$

## 7 4.2

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = y + 0 + 2y = 3y \quad (150)$$

であるから

$$\iint_{\partial T} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\bar{T}} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy dz \quad (151)$$

$$= \iiint_{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}} 3y dx dy dz \quad (152)$$

$$= 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y dz dy dx \quad (153)$$

$$= 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - xy - y^2) dy dx \quad (154)$$

$$= 3 \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (1-x) y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{1-x} dx \quad (155)$$

$$= 3 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} (1-x)^3 - \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) dx \quad (156)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^3 dx \quad (157)$$

$$= \frac{1}{8} \quad (158)$$

## 8 5.1

$$\omega = dx_1 - x_3 dx_2 - x_5 dx_4$$

$$d\omega = d(dx_1) - d(x_3 dx_2) - dx_5 (dx_4) \quad (159)$$

$$= 0 - dx_3 \wedge dx_2 - dx_5 \wedge dx_4 \quad (160)$$

$$= dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5 \quad (161)$$

$$d\omega \wedge d\omega = (dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5) \wedge (dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5) \quad (162)$$

$$= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (163)$$

$$+ dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \quad (164)$$

$$= dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \quad (165)$$

$$= 2dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \quad (166)$$

$$\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = (dx_1 - x_3 dx_2 - x_5 dx_4) \wedge (dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5) \wedge (dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5) \quad (167)$$

$$= (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_5 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 - x_3 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5) \quad (168)$$

$$\wedge (dx_2 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_5) \quad (169)$$

$$= dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \quad (170)$$

$$= 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 \quad (171)$$

## 9 5.2

$$\omega = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix}$$

(1)

$$d\omega = 3(x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz \quad (172)$$

(2)

$$\begin{cases} dx = \cos u \cos v du - \sin u \sin v dv \\ dy = \cos u \sin v du + \sin u \cos v dv \\ dz = -\sin u du \end{cases}$$

$$dx \wedge dy = (\cos u \cos v du - \sin u \sin v dv) \wedge (\cos u \sin v du + \sin u \cos v dv) \quad (173)$$

$$= \sin u \cos u du \wedge dv \quad (174)$$

$$dy \wedge dz = (\cos u \sin v du + \sin u \cos v dv) \wedge (-\sin u du) \quad (175)$$

$$= \sin^2 u \cos v du \wedge dv \quad (176)$$

$$dz \wedge dx = (-\sin u du) \wedge (\cos u \cos v du - \sin u \sin v dv) \quad (177)$$

$$= \sin^2 u \sin v du \wedge dv \quad (178)$$

$$\phi^* \omega = \sin^5 u \cos^4 v du \wedge dv + \sin^5 u \sin^4 v du \wedge dv + \sin u \cos^4 u du \wedge dv \quad (179)$$

$$= \sin u \left( \frac{1}{4} \sin^4 u (\cos 4v + 3) + \cos^4 u \right) du \wedge dv \quad (180)$$

(3)

$$\int_{\phi|K} \omega = \iint_{(0,\pi) \times (0,2\pi)} \sin u \left( \frac{1}{4} \sin^4 u (\cos 4v + 3) + \cos^4 u \right) du dv \quad (181)$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin u \left( \frac{1}{4} \sin^4 u (\cos 4v + 3) + \cos^4 u \right) dv du \quad (182)$$

$$= \int_0^\pi \left( 2\pi \sin u \cos^4 u + \frac{3}{2}\pi \sin^5 u \right) du \quad (183)$$

$$= \frac{12}{5}\pi \quad (184)$$

## 10 5.3

$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$  とする

$$\int_{\partial V} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) = \int_V d\omega \quad (185)$$

$$= \int_V 3dx dy dz \quad (186)$$

$$= 4\pi r^3 \quad (187)$$