Contents

1 曲面片

$D \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sigma(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Def 1. σ が次の条件を満たすとき $S = \sigma(D)$ をσ でパラメーター表示された曲面片とよぶ
(1) σ は C^∞
(2) $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D$ に対し、$\sigma_u(a,b) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(a,b), \sigma_v \in \mathbb{R}^3$ は線形独立
(3) σ は単射

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in D$ を固定し、曲線 $\begin{cases} C_u : x = \sigma(a+t,b) \\ C_v : x = \sigma(a,b+t) \end{cases}$ を考える.

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sigma(a+t,b) - \sigma(a,b)}{t} = \sigma_u(a,b) & C_u \\ \sigma_v(a,b) & C_v \end{cases}$$

e.g. 1. $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, D = \mathbb{R}^2, \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ とする.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が線形独立なら、$\sigma(\mathbb{R}^2)$ は σ でパラメーター表示された曲面片（$\mathbf{p}$ を通り、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に平行な平面）

Proof. (1) $\sigma(u,v)$ の各成分は u, v の一次関数、故に C^∞
(2) $\sigma_u(u,v) = \mathbf{a}, \sigma_v(u,v) = \mathbf{b}$、仮定より線形独立
(3) $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \in D, \sigma(c,d) = \sigma(c',d')$ とする
$\mathbf{p} + c\mathbf{a} + d\mathbf{b} = \mathbf{p} + c'\mathbf{a} + d'\mathbf{b} \Longrightarrow (c-c')\,\mathbf{a} + (d-d')\,\mathbf{b} = 0$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が線形独立であるから、$c - c' = d - d' = 0$
だから $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}$ □

Rem 1. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 線形独立 $\Longleftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$

Proof.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

線形独立でない場合では、$\mathbf{a}_i = k\mathbf{b}_i$ から、すべての成分は 0 である □

e.g. 2. グラフ型曲面片
$D \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合.$f : D \to \mathbb{R} : C^\infty$ とする.
$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \right)$ とおくと

$\sigma(D)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in D, z=(x,y)\right\}$（$z$ は $f(x,y)$ のグラフ）は σ でパラメーター表示された曲面片

Proof. (1) f は D 上 C^∞ から、σ も C^∞

(2) $\sigma_u=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ f_u\end{pmatrix},\sigma_v=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ f_v\end{pmatrix}$ より $\sigma_u\times\sigma_v=\begin{pmatrix} -f_u\\ -f_v\\ 1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$

(3) $\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} c'\\ d'\end{pmatrix}\in D,\sigma(c,d)=\sigma(c',d')$ とする

$\begin{pmatrix} c\\ d\\ f(c,d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c'\\ d'\\ f(c',d')\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c'\\ d'\end{pmatrix}$ □

e.g. 3. 球面

$r>0, D=(0,\pi)\times(0,\pi)=\left\{\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\middle|0<u<\pi,0<v<2\pi\right\}$

$$\sigma:D\to\mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} r\sin u\cos v\\ r\sin u\sin v\\ r\cos u\end{pmatrix}$$

$\sigma(D)$ は球面 $S^2(r)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2=r^2\right\}$ から $x\geq 0, y=0$ の部分を除いた図形

Proof. (1) $\cos,\sin$ は C^∞ から、σ も D 上 C^∞

(2) $\sigma_u=\begin{pmatrix} r\cos u\cos v\\ r\cos u\sin v\\ -r\sin u\end{pmatrix},\sigma_v=\begin{pmatrix} -r\sin u\sin v\\ r\sin u\cos v\\ 0\end{pmatrix}$

$$\sigma_u\times\sigma_v=r^2\sin u\begin{pmatrix} \sin u\cos v\\ \sin u\sin v\\ \cos u\end{pmatrix}$$
$$=r\sin u\sigma(u,v)$$

σ の中ではもう一つの r があるから

$\|\sigma(u,v)\|=r>0$ より、$(\sigma_u\times\sigma_v)(u,v)\neq 0$

(3) $\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} c'\\ d'\end{pmatrix}\in D,\sigma(c,d)=\sigma(c',d')$ とする

第三成分では $r\cos c=r\cos c'.0<c,c'<\pi$ で $\cos$ は $[0,\pi]$ で全単射だから、$c=c'$

次は第 1,2 成分

$\begin{cases} r\sin c\cos d=r\sin c'\cos d'\\ r\sin c\sin d=r\sin c'\sin d'\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\cos d=\cos d'\\ \sin d=\sin d'\end{cases}\Longrightarrow d=d'$ □

2 接平面と変数変換

$S\subset\mathbb{R}^2$ を $\sigma:D\to\mathbb{R}^3$ でパラメーター表示された曲面片とし、$\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}\in D,\mathbf{p}=\sigma(a,b)\in S$ とする

Def 2. 点 $\mathbf{p}$ を通り、ベクトル $\sigma_u(a,b), \sigma_v(a,b)$ に平行な平面 $\{\mathbf{p}+\xi\sigma_u(a,b)+\eta\sigma_v(a,b)|\xi,\eta\in\mathbb{R}\}$ を S の点 $\mathbf{p}$ における接平面とよぶ. 接平面に平行なベクトル、垂直なベクトルをそれぞれ接ベクトル、法ベクトルとよぶ.

Rem 2. ここで

· 接ベクトル：$\sigma_u(a,b), \sigma_v(a,b)$ の線形結合 $\xi\sigma_u(a,b)+\eta\sigma_v(a,b)\,(\xi,\eta\in\mathbb{R})$

· 法ベクトル：$\sigma_u(a,b), \sigma_v(a,b)$ 両方に垂直なベクトル $=\sigma_u(a,b)\times\sigma_v(a,b)$ のスカラー倍

$$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3 \text{ が接ベクトル} \Longleftrightarrow \mathbf{v}\cdot(\sigma_u(a,b)\times\sigma_v(a,b))=0$$

よって、接平面 $=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\middle|(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot(\sigma_u(a,b)\times\sigma_v(a,b))=0\right\}$

Def 3. $\mathbf{n}:D\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbf{n}(u,v)=\dfrac{\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v)\|}$ と定め、σ が定める S の単位法ベクトル場とよぶ.

e.g. 4. $\sigma(u,v)=\begin{pmatrix} r\sin u\cos v\\ r\sin u\sin v\\ r\cos u\end{pmatrix}(0<u<\pi, 0<v<2\pi)$

$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\sigma(a,b), 0<a<\pi, 0<b<2\pi$ とする

$\sigma_u(a,b)\times\sigma_v(a,b)=r\sin a\sigma(a,b)$. ノルムは $|r\sin a|\,\|\sigma(a,b)\|=r^2\sin a$

$\mathbf{n}(a,b)=\dfrac{1}{r}\sigma(a,b)=\dfrac{1}{r}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$

接平面の方程式:

$\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\cdot(r\sin a)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

$U,V\subset\mathbb{R}^n$ 開集合、$\Phi:U\to V$ が微分同相 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Φ 全単射で、$\Phi,\Phi^{-1}:C^\infty$
Φ が微分同相なら、各 $\mathbf{x}\in U$ におけるヤコビ行列 $(D\Phi)(x)$ は正則で、
$(D\Phi)(x)^{-1}=D\left(\Phi^{-1}\right)(\Phi(x))$

Prop 1. $R\subset\mathbb{R}^2$ 開集合、$\Phi:E\to D$ 微分同相とする.S は $\sigma\circ\Phi:E\to\mathbb{R}^3$ でパラメーター表示された曲面片でもある.$\sigma\circ\Phi$ を σ の $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\Phi(s,t)$ による変数変換とよぶ.

Proof. $\tau=\sigma\circ\Phi$ とおく.$\sigma,\Phi:C^\infty$ より τ も C^∞.$\begin{pmatrix}u,v\end{pmatrix}=\Phi(s,t)$ とおくと
$\tau_s(s,t)=\sigma_u(\Phi(s,t))u_s(s,t)+\sigma_v(\Phi(s,t))v_s(s,t)$
$\tau_t(s,t)=\sigma_u(\Phi(s,t))u_t(s,t)+\sigma_v(\Phi(s,t))v_t(s,t)$
よって

$$\begin{aligned}\tau_s\times\tau_t&=(u_s\sigma_u+v_s\sigma_v)\times(u_t\sigma_u+v_t\sigma_v)\\&=u_sv_t\sigma_u\times\sigma_v+v_su_t\sigma_v\times\sigma_u\\&=(u_sv_t-v_su_t)\sigma_u\times\sigma_v\\&=\begin{vmatrix}u_s&u_t\\v_s&v_t\end{vmatrix}\sigma_u\times\sigma_v\\&=(\det D\Phi)\sigma_u\times\sigma_v\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}\in E$ なら、$\Phi:$ 微分同相より $\det(D\Phi)(s,t)\neq 0$
また、曲面片の定義より、$\sigma_u\times\sigma_v\neq\mathbf{0}, \tau_s(s,t)\times\tau_t(s,t)\neq\mathbf{0}$
σ 単射、Φ 単射より、$\tau=\sigma\circ\Phi$ 単射 □

Def 4. 変数変換が向きを保つ $\overset{def}{\iff} \det(D\Phi)(s,t) > 0, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in E$

変数変換が向きを反対にする $\overset{def}{\iff} \det(D\Phi)(s,t) < 0, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in E$

Prop 2. この Φ について、$\sigma, \tau = \sigma \circ \Phi$ が定める単位法ベクトル場を $\mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_\tau$ と表すと

$$\mathbf{n}_\tau(s,t) = \begin{cases} \mathbf{n}_\sigma(\Phi(s,t)) & \text{向きを保つとき} \\ -\mathbf{n}_\sigma(\Phi(s,t)) & \text{反対にするとき} \end{cases}$$

Proof. 先の計算の両辺でノルムをとると、$\mathbf{n}_\tau(s,t) = \dfrac{\det D\Phi(s,t)}{|\det D\Phi(s,t)|}\mathbf{n}_\sigma(\Phi(s,t))$ □

e.g. 5. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A \neq 0, \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as+bt \\ cs+dt \end{pmatrix}$

$E = \Phi^{-1}(D)$ とおくと、$\Phi|_E : E \to D$ は微分同相、$(D\Phi)(s,t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$

$\therefore \Phi$ が向きを保つ $\iff \det A > 0$

3 曲面積と面積分

$S \subset \mathbb{R}^3$ を $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ でパラメーター表示された曲面片とする.$T \subset S$ とし、$\sigma^{-1}(T) \subset \mathbb{R}^2$ は面積確定、有界とする.

Def 5. $Area(T) = \displaystyle\iint_{\sigma^{-1}(T)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ を T の曲面積とよび、$\mathrm{d}A = \|\sigma_u \times \sigma_v\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ を面積要素とよぶ

Rem 3. 曲線の長さ

$C : \mathbf{x} = r(t), (a \leq t \leq b)$ の長さ $L(C) = \displaystyle\int_a^b \|\dot{r}(t)\| \,\mathrm{d}t$

面積の拡大率:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta u \Delta v \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta u \Delta v} \\
&= \lim_{\Delta u \Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta u \Delta v} \|(\sigma(u+\Delta u, v) - \sigma(u,v)) \times (\sigma(u, v+\Delta v) - \sigma(u,v))\| \\
&= \lim_{\Delta u \Delta v \to 0} \left\| \frac{\sigma(u+\Delta u, v) - \sigma(u,v)}{\Delta u} \times \frac{\sigma(u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)}{\Delta v} \right\| \\
&= \|\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v)\|
\end{aligned}$$

Def 6. $f : T \to \mathbb{R}, \mathbf{v} : T \to \mathbb{R}^3$ 連続のとき

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_T f\mathrm{d}A = \iint_{\sigma^{-1}(T)} f(\sigma(u,v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ \displaystyle\iint_T \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_{\sigma^{-1}(T)} \mathbf{v}(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{cases}$$ を (T に沿う) 面積分とよぶ

T を細かく分割、$T = \bigcup_{i=1}^{N} T_i$、各 T_i の点 p_i をとる

$$\sum_{i=1}^{N} f(p_i)\, Area(T_i) \xrightarrow{\text{分割}} \iint_T f\mathrm{d}A$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathbf{n}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{R}^3 \\
S \arrow[ur, "\mathbf{n}(\sigma(u,v))=\mathbf{n}(u,v)"'] &
\end{tikzcd}$$

すると $\mathrm{d}\mathbf{A} = (\sigma_u \times \sigma_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathbf{n}\mathrm{d}A$ より

$\displaystyle\iint_T \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_T (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}A$

$\displaystyle\iint_T \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_T \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}A$ は $\mathbf{v}$ の「高さ」の面積要素による積分

e.g. 6. $h, r > 0$ 定数

$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ v \end{pmatrix}, (0 < u < 2\pi, 0 < v < h)$

$\sigma_u = \begin{pmatrix} -r\sin u \\ r\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \|\sigma_u \times \sigma_v\| = r$

$\displaystyle Area(S) = \iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D r\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi rh$

e.g. 7. $\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - y \\ x + yz \\ e^z \end{pmatrix}, (x, y, z \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \iint_D \mathbf{v}(\sigma(u,v))\cdot(\sigma_u \times \sigma_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D \begin{pmatrix} rv\cos u - r\sin u \\ r\cos u + rv\sin u \\ e^v \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin v \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_D r^2 v\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \pi r^2 h^2
\end{aligned}$$

Prop 3. $\Phi : E \longrightarrow D$ 微分同相、$\tau = \sigma \circ \Phi$ とする.

(1) $\displaystyle\iint_T f\mathrm{d}A$ は σ を τ に置き換えても同じ

(2) Φ が向きを保つなら $\displaystyle\iint_T \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$ についても同じ

Proof. $(J\Phi)(s,t) := \det(D\Phi)(s,t)$

(1) $\displaystyle\iint_{\sigma^{-1}(T)} f(\sigma(u,v))\,\|(\sigma_u \times \sigma_v)(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi(s,t)\right)$

$\displaystyle\Longrightarrow = \iint_{\Phi^{-1}(\sigma^{-1}(T))} f(\sigma(\Phi(s,t)))\,\|(\sigma_u \times \sigma_v)(\Phi(s,t))\|\cdot|(J\Phi)(s,t)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \iint_{\tau^{-1}(T)} f(\tau(s,t))\,\|(\tau_s \times \tau_t)(s,t)\|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle\iint_T \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_T \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}A$ □

4　ストークスの定理

5 正則曲面

Def 7. $\mathbb{R}^3$ の部分集合 S の各点 p に対し、以下の条件を満たす p の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ と C^∞ 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ が存在するとき、S を正則曲面とよぶ

· $S \cap U = f^{-1}(\{0\})$

· $(\nabla f)(p) \neq 0$

Prop 4. $U \subset \mathbb{R}^3$ 開集合、$f : U \to \mathbb{R}^3$：C^∞ 関数とし、$S = f^{-1}(\{0\})$ とおく.$\forall p \in S, (\nabla f)(p) \neq 0 \Longrightarrow S$ は正則曲面で、f は S の各点における局所方程式である

Proof. $\forall p \in S, U, f$ が条件を満たす □

e.g. 8. $r > 0, S^2(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\}$ は正則曲面

Proof. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ とおくと、f は C^∞ で $f^{-1}(\{0\}) = S^2(r)$ なら
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0, \nabla f \neq 0$ □

Def 8. $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合から $\mathbb{R}^3$ への写像 $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ が以下の条件をみたすとき σ を S の局所パラメーター表示とよぶ

· $\sigma(D) \subset S$

· $\sigma(D)$ は σ でパラメーター表示された曲面片である

Thm 1. $\forall p \in S$ に対し、p の周辺の（つまり $p \in \sigma(D)$ であるような）S の局所パラメーター表示 $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ が存在する

Proof. $p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$ とすると
$\exists U : p$ の開近傍、$\exists f : U \to \mathbb{R} : C^\infty$、$S \cap U = f^{-1}(\{0\}), (\nabla f)(p) \neq 0$
$(\nabla f)(p) \neq 0$ より、$f_x(p), f_y(p), f_z(p)$ のどれかは $\neq 0$、x, y, z を入れ替えて $f_z(p) \neq 0$ と仮定すると、陰関数の定理より、方程式 $f(x, y, z) \neq 0$ を p の周辺で $z = g(x, y)$ の形で表せる $(g : C^\infty)$
つまり $V \subset \mathbb{R}^2, W \subset \mathbb{R}$：開集合
$g : V \to W : C^\infty$ で

· $p \in V \times W \subset U$

· $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \times W$ に対し、$f(x, y, z) = 0 \iff z = g(x, y)$

となるものが存在.
このとき、$S_n(V \times W) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \right\}$($z = g(x, y)$ のグラフ)
そこで $\sigma : V \to \mathbb{R}^3$ を $\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v) \end{pmatrix}$ と定めると、$\sigma(V) = S_n(V \times W)$ は σ でパラメーター表示された曲面片 □

Rem 4. $\begin{cases} f_x(p) \neq 0 \Longrightarrow x = g(y,z) \\ f_y(p) \neq 0 \Longrightarrow y = g(x,z) \end{cases}$ の形のグラフで表せる

e.g. 9. $S = S^2(r) \ni p = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,$p$ 周辺の局所パラメーター表示を考える
$S = f^{-1}(\{0\}), f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
$f_x(p) = -2r \neq 0$ より $f \neq 0$ を x について解いてみると $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$
p がみたすのはマイナスの方
そこで、$x = -\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$ のグラフを考える
$D = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| u^2 + v^2 < r^2 \right\} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sqrt{r^2 - u^2 - v^2} \\ u \\ v \end{pmatrix}$ とおくと
$f(\sigma(u,v)) = \left(-\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}\right)^2 + u^2 + v^2 - r^2 = 0$ より
$\sigma(D) \subset S$ で $-\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$ は D 上 C^∞ より、σ は C^∞
σ はグラフ型より (2) もＯＫ
$p = \sigma(0,0) \in \sigma(D)$ より σ は p 周辺の局所パラメーター表示

Thm 2. $\sigma : D \to \mathbb{R}^3, \tau : E \to \mathbb{R}^3$ が S の局所パラメーター表示で $\sigma(D) \cap \tau(E) \neq \emptyset$ であるとする.
$\begin{cases} D' = \sigma^{-1}(\sigma(D) \cap \tau(E)) \\ E' = \tau^{-1}(\sigma(D) \cap \tau(E)) \end{cases}$ とおくと、$\exists \Phi : E' \to D'$ 微分同相、$\tau|_E = \sigma|_{D'} \circ \Phi$

6　接空間と正則曲面の向き

$S \subset \mathbb{R}^2$ 正則曲面
$f : p \in S$ における局所方程式とし、$T_pS := \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| \left(\nabla f\right)(p) \cdot v = 0 \right\}$
$\left(\nabla f\right)(p) \neq 0$ より、T_pS は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分ベクトル空間

Prop 5. $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ を点 p 周辺の局所パラメーター表示とする
$T_pS = \left\{ \text{曲面片}\sigma(D)\text{の}p\text{における接ベクトル} \right\}$

Proof. $\sigma(u,v) = p$ とする.$\sigma(D) \subset S$ より、$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の周りで $f(\sigma(u,v)) \equiv 0$
$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u} f(\sigma(u,v)) \Big|_{u=a, v=b} \\ &= f_x(p)\, x_u(a,b) + f_y(p)\, y_u(a,b) + f_z(p)\, z_u(a,b) \\ &= \left(\nabla f\right)(p) \cdot \sigma_u(a,b) \end{aligned}$$

同様に $\left(\nabla f\right)(p) \cdot \sigma_v(a,b) = 0$
$\therefore \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \xi \sigma_u(a,b) + \eta \sigma_v(a,b) \in T_pS$
$\supset$ が示された. 両辺 2 次元ベクトル空間なので $=$ □

Def 9. T_pS を S の点 p における接（ベクトル空間）とよび、その元を接ベクトルとよぶ
$\star : p + T_pS := \{ p + v | v \in T_pS \}$: 接平面

e.g. 10. $S = S^2(r), f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
$\left(\nabla f\right) = (x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S^2(r)$ に対し

$$\begin{aligned} T_pS^2(r) &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 2z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta = 0 \right\} \end{aligned}$$

Def 10. 正則曲面 S が向き付け可能 $\iff$ 連続写像 $n : S \to \mathbb{R}^3$ で
$\begin{cases} \|n(p)\| = 1 \\ n(p) \perp T_pS \end{cases}$ となるものが存在. このような n を S 上の単位法ベクトル場とよぶ

e.g. 11. $U \subset \mathbb{R}^3$ 開、$f : U \to \mathbb{R} : C^\infty$
$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \middle| f(x,y,z) = 0 \right\}$
$\left(\nabla f\right)(p) \neq 0\ (p \in S)$ なら、$T_pS = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| \left(\nabla f\right)(p) \cdot v = 0 \right\}$
よって、$n : S \to \mathbb{R}^3, p \mapsto \dfrac{\left(\nabla f\right)(p)}{\|\left(\nabla f\right)(p)\|}$ は S 上の単位法ベクトル場

Def 11. 向き付け可な正則曲面 S と単位法ベクトル場 $n : S \to \mathbb{R}^3$ の対 (S, n) を向き付けられた正則曲面とよぶ.

以下、(S,n) : 向き付けられた曲面とする.$\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ を S の局所パラメーター表示とすると、各 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$ で

$$\frac{(\sigma_u \times \sigma_v)(u,v)}{\|(\sigma_u \times \sigma_v)(u,v)\|} = \pm n(\sigma(u,v))$$

Def 12. 局所パラメーター表示 $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ が

$$\text{正（負）の向きを持つ} \overset{def}{\iff} \frac{(\sigma_u \times \sigma_v)(u,v)}{\|(\sigma_u \times \sigma_v)(u,v)\|} = +n(\sigma(u,v)), (-n(\sigma(u,v)))$$

Rem 5. σ が負の向きなら
例えば $E := \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in D \right\}$ とおいて、$\Phi : E \to D, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$ で変数変換すると $\sigma \circ \Phi : E \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto \sigma(t,s)$ は正の向き（もとが正なら負になる）

Rem 6. 正の向き、負の向きを持つ局所パラメーター表示はどの点の周りでも存在

e.g. 12. $S = S^2(r) = f^{-1}(\{0\}), f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
$(\nabla f)(p)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ より、$S^2(r)$ 上 $\|\nabla f\| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2r$
$\therefore n(x,y,z) = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \dfrac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $S^2(r)$ 上の単位法ベクトル場. これで $S^2(r)$ を向き付ける

e.g. 13. $S^2(r)$ の局所パラメーター表示 $\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\sqrt{r^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \left(u^2 + v^2 < r^2\right)$ が正の向きか調べる
$\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \star \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}, \sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 1 \end{pmatrix} > 0$
一方、$n(\sigma(u,v))$ の第三成分 $\dfrac{1}{r}\left(-\sqrt{r^2-u^2-v^2}\right)$ は < 0
σ は負の向き.
$\tau(s,t) = \sigma(t,s) = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -\sqrt{r^2 - t^2 - s^2} \end{pmatrix}$ なら正の向き

7　正則曲面上の面積分とストークスの定理

S: 正則曲面、$T \subset S$
以下の条件をみたす $T_1, T_2, \cdots, T_n$ が存在すると仮定

$(M1)$ $T = \bigcup_{i=1}^{N} T_i$

$(M2)$ 各 i について、ある S の局所パラメーター表示 $\sigma_i : D_1 \to \mathbb{R}^3$ と面積確定な有界集合 $K_i \subset D_i$ があって、$\sigma_i (K_i) = T_i$

$(M3)$ $i \neq j$ なら、$\sigma_i^{-1} (T_i \cap T_j)$ は面積 0

Def 13. $f : T \to \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}\iint_T f \mathrm{d}A &= \sum_{i=1}^{N} \iint_{T_i} f \mathrm{d}A \\ &= \sum_{i=1}^{N} \iint_{K_i} f (\sigma_i (u, v)) \| (\sigma_i)_u \times (\sigma_i)_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

特に $Area\,(T) = \iint_T 1 \mathrm{d}A = \sum_{i=1}^{N} Area\,(T_i)$
S が単位法ベクトル場 n で向き付けられているとき、各 σ_i を正の向きに取って、$v : T \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{aligned}\iint_T v \cdot \mathrm{d}A &= \iint_T v \cdot n \mathrm{d}A \\ &= \sum_{i=1}^{N} \iint_{K_i} v (\sigma_i (u, v)) \cdot ((\sigma_i)_u \times (\sigma_i)_v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

e.g. 14. $S = S^2 (r)\,, Area\,(S) = ?$

Proof. $\sigma (u, v) = \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$
$\tau (u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ r \cos u \\ r \sin u \sin v \end{pmatrix}$
$\tau' (C)$ は $\cos u = 0, \sin u \cos v \leq 0$
つまり、$u = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{3\pi}{2}$ の部分 $\tau' (C)$ の面積は 0
$\therefore Area\,(C) = \iint_{\tau'(C)} \| \tau_u \times \tau_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$

$$\begin{aligned}Area\,(S) &= Area\,(S \backslash C) + Area\,(C) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \| \sigma_u \times \sigma_v \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin u \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

□

Def 14. 正則曲面 S が $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合でもあるとき、S を閉曲面とよぶ
S が閉集合 $\iff$ $\mathbb{R}^3$ の収束点列 $\{x_n\}$ に対し、もし $x_n \in S \, (n \in \mathbb{N})$ なら必ず $\lim_{n\to\infty} x_n \in S$

e.g. 15. (1) 平面は有界でない

(2) 上半球面（赤道含まず）S は有界だが閉ではない

$$x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - \dfrac{1}{n+1}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \end{pmatrix} \in S \text{ だが } \lim_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$$

(3) 球面、トーラスは閉曲面

Thm 3. (閉曲面に対するストークスの定理)
(S, n) を向き付けられた閉曲面とすると、S を含む開集合 U 上のベクトル場 $v : U \to \mathbb{R}^3$ に対し、$\iint_S (\nabla \times v)\, \mathrm{d}A = 0$

8　ガウスの発散定理

Def 15. $T \subset \mathbb{R}^3$ が曲四面体 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists V, W \in \mathbb{R}^3$ 開集合,$\exists \phi : V \to W$ 微分同相,$\exists \Delta \subset V$ 四面体,$\phi(\Delta) = T$

Thm 4. T を含む開集合上のベクトル場 v に対し

$$\iiint_T (\nabla \cdot v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \iint_{F_j} v \cdot \mathrm{d}A$$
$$= \iint_{\partial T} v \cdot \mathrm{d}A$$

Thm 5. （ガウスの発散定理）
$V \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし、境界 ∂V を含む閉曲面であると仮定する
このとき、$\overline{V} = V \cup \partial V$ を含む開集合 U 上のベクトル場 $v : U \to \mathbb{R}^3$ に対し

$$\iint_{\partial V} v \cdot \mathrm{d}A = \iiint_{\overline{V}} (\nabla \cdot v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ただし、∂V の向きは単位法ベクトル場が V から出る方向となるようにつける

Proof. $\overline{V}$ に含まれる曲四面体 $T_1, \cdots, T_N$ を次の条件をみたすようにとれる

(1) $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i$

(2) $i \neq j$ のとき $T_i \cap T_j \neq 0$ なら T_i は一つの面か一辺か一頂点

このとき T_i の面を $F_{ij}\,(j = 1, 2, 3, 4)$ とすると

$$\iiint_{\overline{V}} (\nabla \cdot v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{N} \iiint_{T_i} (\nabla \cdot v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \iint_{F_j} v \cdot \mathrm{d}A \qquad (*)$$

F_{ij} について、$F_{ij} \not\subset \partial V$ なら $F_{ij} = F_{i'j'}$ となる (i', j') がただ一つ存在.F_{ij} と $F_{i'j'}$ の向きは反対なので $\iint_{F_{ij}} v \cdot \mathrm{d}A + \iint_{F_{i'j'}} v \cdot \mathrm{d}A = 0$

$$(*) = \sum_{F_{ij} \subset \partial V} \iint_{F_{ij}} v \cdot \mathrm{d}A$$
$$= \iint_{\partial V} v \cdot \mathrm{d}A$$

□

e.g. 16. $r(x) = \|x\|$ とおく. ガウスの発散定理のような V に対し,$0 \notin \overline{V}$ なら、$\iint_{\partial V} \frac{x}{r^3} \cdot \mathrm{d}A = 0$

Proof. $0 \notin \overline{V}$ より、$\frac{x}{r^3}$ は $\overline{V}$ を含む開集合 $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ 上 C^∞

$$\nabla \cdot \frac{x}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)$$
$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

よって

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}A &= \iiint_{\overline{V}} \nabla \cdot \left(\frac{x}{r^3}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 0\end{aligned}$$

$\square$

e.g. 17. $0 \in V, \iint_{\partial V} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}A = 4\pi$

Proof. $\epsilon > 0$ を $B_\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \|x\| < \epsilon\right\} \subset V$ となるように取る
$V' = V \backslash \overline{B_\epsilon}$ とおく. ガウスの発散定理を使うと $\iint_{\partial V} \frac{x}{r^3} = 0$ $\square$

9　微分形式

$U\subset\mathbb{R}^n$：閉集合、$p\in U$ に対し、$T_pU=\mathbb{R}^n$：U の点 p における接空間
U の座標を $(x_1,\cdots,x_n)$ とするとき、T_pU の座標を $(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n)$ と表す

Def 16. $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}:(T_pU)^k\to\mathbb{R},(1\le i_1,i_2,\cdots,i_k\le n)$

$$\left(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}\right)(v_1,\cdots,v_k)=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x_{i_1}(v_1) & \mathrm{d}x_{i_1}(v_2) & \cdots & \mathrm{d}x_{i_1}(v_k)\\ \mathrm{d}x_{i_2}(v_1) & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathrm{d}x_{i_k}(v_1) & \cdots & \cdots & \mathrm{d}x_{i_k}(v_k)\end{vmatrix}$$

と定める
特に、$i_1,\cdots,i_k$ の中に同じものがあると、$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdot\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0$

e.g. 18. $(n=3)$
$$\begin{cases}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0\end{cases}$$

よって、$k>n$ なら、$\forall i_1,\cdots,i_k,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0$（$i_1,\cdots,i_k$ の中で必ず重複がある）
$f:U\to\mathbb{R}$ に対し、$p:v_1,\cdots,v_k$ の関数
$f\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}:(p,v_1,\cdots,v_k)\mapsto f(p)\left(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)(v_1,\cdots,v_k)$ が定まる

Def 17. U 上の k 次微分形式($k-$ 形式)とは､U 上の C^∞ 関数 $f_{i_1\cdots i_k}:U\to\mathbb{R},(1\le i_1,\cdots,i_k\le n)$ を用いて

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}f_{i_1,\cdots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

と表される $p\in U,v_1,\cdots,v_k\in T_pU$ の関数.$(p,v_1,\cdots,v_k)$ における値を $\omega_p(v_1,\cdots,v_k)$ と表す

Rem 7. U 上の $0-$ 形式は単に U 上の C^∞ 関数 $f:U\to\mathbb{R}$ である

e.g. 19. (1) $\omega=\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ は $\mathbb{R}$ 上の $1-$ 形式、$p=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}\omega_p(v)&=\mathrm{d}x(v)+x(p)\,\mathrm{d}y(v)\\&=a+xb\end{aligned}$$

(2) $U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|y>0\right\}$、$\omega=e^x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-\log y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ は U 上の $2-$ 形式

$p=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{aligned}\omega_p(v,w)&=e^x\begin{vmatrix}b&e\\c&f\end{vmatrix}-\log y\begin{vmatrix}c&f\\a&d\end{vmatrix}\\&=(bf-ce)\,e^x-(cd-af)\log y\end{aligned}$$

交代性より、任意の $k-$ 形式 ω は $\omega = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} h_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdot\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ の形で表せる. ここで $h_{i_1\cdots i_k}$ は C^∞ 関数
例えば、$n=3$ の場合

$$\begin{cases} \text{1-形式} & f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z \\ \text{2-形式} & f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + g\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + h\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\ \text{3-形式} & f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \end{cases}$$

Def 18. U 上の $k-$ 形式 α、$l-$ 形式 β をそれぞれ

$$\alpha = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} f_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$
$$\beta = \sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^{n} g_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}$$

に対して

$$\alpha\wedge\beta = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\sum_{j_1,\cdots,j_l=1}^{n} f_{i_1\cdots i_k}g_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x_{j_1}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}$$

$(k+l)-$ 形式 $\alpha\wedge\beta$ を α と β の外積とよぶ.
$k=0$ または $l=0$ のとき、$\alpha\wedge\beta=\alpha\beta$

e.g. 20. $n=3$

・ $(x^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z) = x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - x^3y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y - xy^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z$

・ $\mathrm{d}y\wedge(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$

Prop 6. U 上の $k-$ 形式 α,α_1,α_2、$l-$ 形式 β、$m-$ 形式 γ に対して以下成立

$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta = \alpha_1\wedge\beta + \alpha_2\wedge\beta$$
$$\beta\wedge(\alpha_1+\alpha_2) = \beta\wedge\alpha_1 + \beta\wedge\alpha_2$$
$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$
$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{kl}\,\beta\wedge\alpha$$

10　外微分

11　微分形式の引き戻しと積分

Def 19. U 上の $k-$ 形式 $\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} f_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ に対し、V 上の $k-$ 形式 $\phi^*\omega$ を

$$\phi^*\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \left(f_{i_1\cdots i_k}\circ\phi\right)\mathrm{d}\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\phi_{i_k}$$

と定め、ω の ϕ による引き戻しとよぶ

Prop 7. U 上の $k-$ 形式 α、$l-$ 形式 β に対して以下成立

$$\phi^*\left(\alpha\wedge\beta\right) = \phi^*\alpha\wedge\phi^*\beta$$

Prop 8. U 上の $k-$ 形式 ω に対し、以下は成立

$$\mathrm{d}\left(\phi^*\omega\right) = \phi^*\left(\mathrm{d}\omega\right)$$

Prop 9. $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m, W\subset\mathbb{R}^l$ を開集合とし、$\phi : B\to U, \psi : W\to V$ を C^∞ 写像とすると、U 上の $k-$ 形式 ω に対し次が成り立つ

12　ポアンカレの補題

Def 20. $U \subset \mathbb{R}^n$：開集合とする．$\omega \in \Omega^k(U)$ とする $(k \geq 0)$

1. ω が閉形式 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{d}\omega = 0$
2. $k > 0$ のとき，k が完全形式 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(U), \mathrm{d}\eta = \omega$

完全 0 形式は定数関数 0 をさす

$$k = 0 \text{ のとき } f \in \Omega^0(U) \text{ に対し，} \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \text{ で } f \text{ が閉} \iff \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$k = n$ のとき，$(n+1)$ 形式は 0 しかないので，全ての n 形式は閉．$\mathrm{d}^2 = 0$ より，完全形式は必ず閉形式である

Def 21. U が点 $\mathbf{p} \in U$ について星型 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in U, \forall t \in [0,1], t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p} \in U$
言い換えれば $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ を結ぶ線分 $\subset U$
U が凸 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ U の任意の $\mathbf{p} \in U$ について星型

Thm 6. ポアンカレの補題
U のある点 $\mathbf{p} \in U$ について星型なら，$k > 0$ のとき U 上の任意の閉 $k-$ 形式は完全形式

Proof.

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{p} \end{aligned}$$

と定め，$\hat{U} = F^{-1}(U)$ とおく，F は連続より $\hat{U}$ は開集合．また，仮定より $U \times [0,1] \subset \hat{U}$．$\iota_0, \iota_1 : U \to \hat{U}$ を $\iota_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 0), \iota_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 1)$ と定める

Lem 1. 線型写像 $J_k : \Omega^k\left(\hat{U}\right) \to \Omega^{k-1}(U), (k > 0)$ で $\iota_1^*\tau - \iota_0^*\tau = J_{k+1}(\mathrm{d}\tau) + d(J_k\tau)$ をみたすものが存在
ここで $\tau \in \Omega^k\left(\hat{U}\right), k > 0$

この補題より,$\omega \in \Omega^k(U), (k > 0), \mathrm{d}\omega = 0$ とする.補題より $\iota_1^* F^*\omega - \iota_0^* F^*\omega = J_{k+1}(\mathrm{d}F^*\omega) + \mathrm{d}(J_k(F^*\omega))$ で $\begin{cases} (F \circ \iota_1)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x} \\ (F \circ \iota_0)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{p} \end{cases}, (\mathbf{x} \in U)$
よって，$(F \circ \iota_1)^*\omega = \omega, (F \circ \iota_0)^*\omega = 0$．すなわち $\omega = \mathrm{d}(J_k(F^*\omega))$：完全

補題の証明. $\hat{U}$ の座標を $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ と表す．$\Omega^k\left(\hat{U}\right)$ の元は次の形いくつかの和

1. $f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$
2. $g\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}}$

$J_k : \Omega^k\left(\hat{U}\right) \to \Omega^{k-1}(U)$ を $J_k(f\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = 0, J_k\left(g\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}}\right)$
$= \left(\int_0^1 g(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}} \in \Omega^{k-1}(U)$ によって定める．これが条件をみたすことを示す．
線形性より τ は 1 または 2 として OK

1. $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ と略記，$\mathrm{d}(J_k\tau) = \mathrm{d}(0) = 0$
   $$J_{k+1}(\mathrm{d}\tau) = J_{k+1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_I + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_I\right) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_I$$
   $= (f(\mathbf{x}, 1) - f(\mathbf{x}, 0))\,\mathrm{d}x_I$
   $\iota_1^*\tau - \iota_0^*\tau = f(\mathbf{x}, 1)\,\mathrm{d}x_I - f(\mathbf{x}, 0)\,\mathrm{d}x_I = J_{k+1}(\mathrm{d}\tau) + \mathrm{d}(J_k\tau)$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(J_k\tau\right) &= \mathrm{d}\left(\left(\int_0^1 g\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_J\right) \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 g\left(\mathbf{x}, t\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_J \\
&= \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_J
\end{aligned}
$$

$J_{k+1}\left(\mathrm{d}\tau\right) = J_{k+1}\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_J\right) = -\sum_i\left(\int_0^1\frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_J$
$\therefore J_{k+1}\left(\mathrm{d}\tau\right)+\mathrm{d}\left(J_k\tau\right)=0$
一方，$\iota_1^*\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(1\right)=0, \iota_0^*\mathrm{d}t=0$ より $\iota_1^*\tau-\iota_0^*\tau=0$

□

□

e.g. 21. $U=\mathbb{R}^2\backslash\left\{\mathbf{0}\right\}$ とする．$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\in\Omega^1\left(U\right), \mathrm{d}\omega=0$ だが ω は完全形式ではない

Proof. $C:\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, 0\leq t\leq 2\pi$ について，もし ω が完全なら $\int_C\omega=\int_C\mathrm{d}f=f\left(b\right)-f\left(a\right)=0$
ところが

$$
\begin{aligned}
\int_C\omega &= \int_0^{2\pi}\left(-\sin t\right)\mathrm{d}\left(\cos t\right)+\cos t\mathrm{d}\left(\sin t\right) \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\neq 0
\end{aligned}
$$

□