

Contents

1	第一基本量	2
2	シェイプ作用素と第二基本量	4
3	ガウス曲率, 平均曲率と主曲率	6
3.1	曲率の回転・平行移動不変性	7
4	種々の曲率と曲面の形状	8
5	第2基本形式と法曲率	10
6	構造方程式	12
7	リーマン計量	15
7.1	接続形式	17
7.2	直交基底と接続形式	19
8	測地線	23
9	共変微分と測地的曲率	26
10	最短経路と測地線	29
11	ホップの回転角定理	32
12	ガウス・ボンネの定理	34

1 第一基本量

Remark 1.1. 正則曲面

$S \subset \mathbb{R}^3$ が正則曲面 $\stackrel{def}{\iff} \forall \mathbf{p} \in S, \exists U \subset \mathbb{R}^3$ は \mathbf{p} の開近傍, $\exists f : U \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty, s.t. \begin{cases} S \cap U = f^{-1}(\{0\}) \\ (\nabla f)(\mathbf{p}) \neq 0 \end{cases}$

このとき, f を S の点 \mathbf{p} における局所方程式という

Remark 1.2. 局所パラメータ表示

S を正則曲面, $D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ とする

σ が S の局所パラメータ表示 $\stackrel{def}{\iff} \begin{cases} \sigma(D) \subset S \\ \sigma : C^\infty \text{かつ単射} \\ \forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, \sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v) \in \mathbb{R}^3 \text{は線型独立} \end{cases}$

Remark 1.3. 接空間・接ベクトル・法ベクトル $\mathbf{p} \in S, f : \mathbf{p}$ における局所方程式とする

$T_{\mathbf{p}}S := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0\}$ は S の \mathbf{p} における接ベクトル空間, その元を接ベクトル, $(T_{\mathbf{p}}S)^\perp$ の元を法ベクトルとよぶ

\mathbf{p} 周辺の局所パラメータ表示 $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{p} \in \sigma(D)$ をとって, $\mathbf{p} = \sigma(a, b)$ と表すと

$$T_{\mathbf{p}}S = \{\xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b) : \xi, \eta \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

ここで σ_u と σ_v は基底である

Definition 1.4. C^∞ 曲線

\mathbb{R}^3 内の C^∞ 曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $\gamma(I) \subset S$ となるものを S 内の C^∞ 曲線とよぶ

Proposition 1.5. $\mathbf{p} \in S$ とする

- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を S 内の C^∞ 曲線とする. $t_0 \in I, \gamma(t_0) = \mathbf{p}$ とすると, $\frac{d}{dt}\gamma(t_0) \in T_{\mathbf{p}}S$
- $\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S, \exists \epsilon > 0, s.t. \exists \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ は S 内の C^∞ 曲線で, $\gamma(0) = \mathbf{p}, \frac{d}{dt}\gamma(0) = \mathbf{v}$

Proof. 1. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathbf{p} における局所方程式とすると, $\gamma(I) \subset S, f|_{S \cap U} \equiv 0$ より, t_0 周辺

$$\text{で } f(\gamma(t)) = 0 \text{ から } 0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = f_x(\mathbf{p}) \frac{d}{dt}x(t_0) + f_y(\mathbf{p}) \frac{d}{dt}y(t_0) + f_z(\mathbf{p}) \frac{d}{dt}z(t_0)$$

$$\text{があつて, } (\nabla f)(\mathbf{p}) \cdot \frac{d}{dt}\gamma(t_0) = 0. \text{ よつて, } \frac{d}{dt}\gamma(t_0) \in T_{\mathbf{p}}S$$

- $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 局所パラメータ表示, $\sigma(a, b) = \mathbf{p}$ とする. $\mathbf{v} = \xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b)$ と表し, $\gamma(t) = \sigma(a + \xi t, b + \eta t)$ とおけば, $\epsilon > 0$ が十分小さいなら $|t| < \epsilon$ で D に入る. $\gamma(0) = \sigma(a, b) = \mathbf{p}$ かつ

$$\frac{d}{dt}\gamma(0) = \sigma_u(a, b) \frac{d(a + \xi t)}{dt} \Big|_{t=0} + \sigma_v(a, b) \frac{d(b + \eta t)}{dt} \Big|_{t=0} = \xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b) = \mathbf{v}$$

□

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$: S 内の C^∞ 曲線, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 局所パラメータ表示とすると, $\gamma(t) \in \sigma(D)$ のとき, $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ と表せる

Proposition 1.6. $u(t), v(t)$ は $\gamma^{-1}(\sigma(D))$ 上で $C^\infty, I = [a, b], \gamma(I) \subset \sigma(D)$ のとき, γ の長さを考える

Proof. $\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt}\sigma(u(t), v(t)) = \sigma_u(u(t), v(t)) \frac{d}{dt}u + \sigma_v(u(t), v(t)) \frac{d}{dt}v$

$$\left\| \frac{d}{dt}\gamma \right\|^2 = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = (\sigma_u \cdot \sigma_u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (\sigma_v \cdot \sigma_v) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \quad \square$$

Definition 1.7. 第一基本量・第一基本形式

$$\begin{cases} E(u, v) = \sigma_u(u, v) \cdot \sigma_u(u, v) \\ F(u, v) = \sigma_u(u, v) \cdot \sigma_v(u, v) \\ G(u, v) = \sigma_v(u, v) \cdot \sigma_v(u, v) \end{cases} \quad \text{とする. これらを } S \text{ の } \sigma \text{ に関する第一基本量とよぶ}$$

$$\gamma \text{ の長さ} = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \gamma \right\| dt = \int_a^b \sqrt{E(u, v) \dot{u}^2 + 2F(u, v) \dot{u} \dot{v} + G(u, v) \dot{v}^2}$$

$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ を第一基本形式とよぶ

Proposition 1.8. $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \|\sigma_u \times \sigma_v\|^2$, よって $EG - F^2 > 0$ で $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$

Proof. $\|a \times b\|^2 = \det \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ b \cdot a & b \cdot b \end{pmatrix}$ □

Example 1.9. $S = S^2(r) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 0 \right\}, \sigma(0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}$ は $S^2(r)$ の局所パラメータ表示

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -r \sin u \sin v \\ r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} E = \sigma_u \times \sigma_u = r^2 \\ F = \sigma_u \times \sigma_v = 0 \\ G = \sigma_v \times \sigma_v = r^2 \sin^2 u \\ I = r^2 du^2 + r^2 \sin^2 u dv^2 \end{cases}$$

2 シェイプ作用素と第二基本量

(S, \mathbf{n}) : 向きつけられた正則曲面, $\mathbf{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ は連続で単位ベクトルとく $\iff \begin{cases} \|\mathbf{n}(\mathbf{p})\| = 1 \\ \mathbf{n}(\mathbf{p}) \perp T_{\mathbf{p}}S \end{cases}$
 $\sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 正の向きの局所パラメータ表示, $\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \mathbf{n}(\sigma(u, v)) =: \mathbf{n}(u, v)$ と表す

Proposition 2.1. 1. $\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_v \cdot \mathbf{n} = 0$

$$2. \begin{cases} \mathbf{n}_u \cdot \sigma_u = -\mathbf{n} \cdot \sigma_{uu} \\ \mathbf{n}_v \cdot \sigma_v = -\mathbf{n} \cdot \sigma_{vv} \\ \mathbf{n}_u \cdot \sigma_v = \mathbf{n}_v \cdot \sigma_u = -\mathbf{n} \cdot \sigma_{uv} \end{cases}$$

Proof. 1. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ より, $0 = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_u = 2\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}, 0 = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{n}$

$$2. \mathbf{n} \cdot \sigma_u \equiv \mathbf{n} \cdot \sigma_v \equiv 0 \text{ より, } \begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{n} \cdot \sigma_u) = \mathbf{n}_u \cdot \sigma_u + \mathbf{n} \cdot \sigma_{uu} \\ 0 = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{n} \cdot \sigma_u) = \mathbf{n}_v \cdot \sigma_u + \mathbf{n} \cdot \sigma_{uv} \\ 0 = \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{n} \cdot \sigma_v) = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{n} \cdot \sigma_v) \end{cases}$$

□

$\mathbf{p} = \sigma(a, b) \in S$ とする, (1) より, $\mathbf{n}_u(a, b), \mathbf{n}_v(a, b) \in T_{\mathbf{p}}S$

Definition 2.2. $\mathbf{v} = \xi \sigma_u(a, b) + \eta \sigma_v(a, b) \in T_{\mathbf{p}}S$ に対し, $\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) := -\xi \mathbf{n}_u(a, b) - \eta \mathbf{n}_v(a, b) \in T_{\mathbf{p}}S$, $\sum_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$ をシェイプ作用素 (形作用素) とよぶ

Proposition 2.3. $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ とすると, $\gamma(0) = \mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}(0) = \mathbf{v}$ となる S 内の C^∞ 曲線 γ に対し,

$$\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\frac{d}{dt} \mathbf{n}(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

$\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ は, \mathbf{v} を初速度とする S 内の曲線に沿う S の曲がり ($\mathbf{n}(\gamma(t))$ の変化) 具合の指標.
 また, $\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ は \mathbf{p} 周辺の正の向きの局所パラメータ表示, σ の取り方に依らない

Proof. $|t|$: 十分小さいなら $\gamma(t) \in \sigma(D), \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ と表す. $\mathbf{v} = \frac{d\gamma}{dt}(0) = \sigma_u(a, b) \frac{du}{dt}(0) + \sigma_v(a, b) \frac{dv}{dt}(0) \implies \xi = \frac{du}{dt}(0), \eta = \frac{dv}{dt}(0)$
 $\frac{d}{dt} \mathbf{n}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \mathbf{n}(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} = \mathbf{n}_u(a, b) \frac{du}{dt}(0) + \mathbf{n}_v(a, b) \frac{dv}{dt}(0) = -\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ □

$\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) + \sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \sum_{\mathbf{p}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$ から, $\sum_{\mathbf{p}}$ は線形変換であり, その表現行列は以下通り定義する

Definition 2.4. $\begin{cases} L := \mathbf{n} \cdot \sigma_{uu} = -\mathbf{n}_u \cdot \sigma_u \\ M := \mathbf{n} \cdot \sigma_{uv} = -\mathbf{n}_u \cdot \sigma_v = -\mathbf{n}_v \cdot \sigma_u \\ N := \mathbf{n} \cdot \sigma_{vv} = -\mathbf{n}_v \cdot \sigma_v \end{cases}$ を第二基本量とよぶ

Theorem 2.5. $T_{\mathbf{p}}S$ の基底 $\sigma_u(a, b), \sigma_v(a, b)$ に関する $\sum_{\mathbf{p}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)=(a,b)}$

Proof. 求める表現行列を $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく

$$\begin{cases} -\mathbf{n}_u = \sum_{\mathbf{p}} (\sigma_u) = p\sigma_u + r\sigma_v \\ -\mathbf{n}_v = \sum_{\mathbf{p}} (\sigma_v) = q\sigma_u + s\sigma_v \end{cases} \quad \text{に関して, 両辺 } \sigma_u, \sigma_v \text{ と内積をとると}$$

$$\begin{cases} L = pE + rF \\ M = pF + rG \\ M = qE + sF \\ N = qF + sG \end{cases} \implies \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pE + rF & qE + sF \\ pF + rG & qF + sG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad \square$

Proposition 2.6. $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S, \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{w})$

Proof. $\mathbf{v} = \xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b), \mathbf{w} = \lambda\sigma_u(a, b) + \mu\sigma_v(a, b)$ と表すと

$$\sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -(\xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b)) \cdot (\lambda\sigma_u(a, b) + \mu\sigma_v(a, b)) \quad (2)$$

$$= -(\xi\lambda\mathbf{n}_u \cdot \sigma_u + \xi\mu\mathbf{n}_u \cdot \sigma_v + \eta\lambda\mathbf{n}_v \cdot \sigma_u + \eta\mu\mathbf{n}_v \cdot \sigma_v) \quad (3)$$

$$= \xi\lambda L + \xi\mu M + \eta\lambda M + \eta\mu N \quad (4)$$

$$= L\xi\lambda + M(\xi\mu + \eta\lambda) + N\eta\mu \quad (5)$$

\square

これは $(\xi, \eta) \longleftrightarrow (\lambda, \mu)$ について対称であるから, $\sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{w})$

Corollary 2.7. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 : T_{\mathbf{p}}S$ の正規直交基底とすると, $\sum_{\mathbf{p}}$ の $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に関する表現行列は対称行列

Proof. $\sum_{\mathbf{p}} (e_i) = b_{1i}\mathbf{e}_1 + b_{2i}\mathbf{e}_2$ と表すと, $\sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = b_{1i}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_j + b_{2i}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_j = b_{ji} = b_{ij} \quad \square$

3 ガウス曲率, 平均曲率と主曲率

(S, \mathbf{n}) : 向きつけられた正則曲面, $\mathbf{p} \in S$ とする, シェイプ作用素 $\sum_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$ を定めた

Definition 3.1. (ガウス曲率・平均曲率)

$K(\mathbf{p}) := \det \sum_{\mathbf{p}}$ を \mathbf{p} における S のガウス曲率, $H(\mathbf{p}) := \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\mathbf{p}}$ を平均曲率とよぶ

$\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を正の向きの局所パラメータ表示とすると

$$K(\sigma(u, v)) = \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

$$= \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (8)$$

$$H(\sigma(u, v)) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \quad (11)$$

Corollary 3.2. 対称行列の一般論より, $\sum_{\mathbf{p}}$ は実数の範囲で固有値をもつ

Definition 3.3. (主曲率・主曲率方向)

$\sum_{\mathbf{p}}$ の固有値を主曲率とよび, ノルム 1 の固有値ベクトルを主曲率方向とよぶ

固有値の一般論より, 主曲率は $\det \left(\kappa \cdot \text{id}_{T_{\mathbf{p}}S} - \sum_{\mathbf{p}} \right) = 0$ の解

$$LHS = \kappa^2 - \left(\text{tr} \sum_{\mathbf{p}} \right) \kappa + \det \sum_{\mathbf{p}} \quad (12)$$

$$= \kappa^2 - 2H(\mathbf{p})\kappa + K(\mathbf{p}) \quad (13)$$

これを解くと, $\kappa = H \pm \sqrt{H^2 - K}$. また, 主曲率を κ_1, κ_2 とおくと, 解と係数の関係から $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), K = \kappa_1\kappa_2$

Example 3.4. $S = S^2(r), \sigma : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}$ とする

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix}, \sigma_v = \begin{pmatrix} -r \sin u \sin v \\ r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E = r^2, F = 0, G = r^2 \sin^2 u$, σ が正の向きとなるように S を向きをつける

$$\sigma_u \times \sigma_v = r^2 \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{n}(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \sigma(u, v)$$

$$\sigma_{uu} = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ -r \cos u \end{pmatrix}, \sigma_{uv} = \begin{pmatrix} -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_{vv} = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n} = -r, M = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n} = 0, N = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n} = -r \sin^2 u$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 u \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

対角行列なので、主曲率（固有値）は対角成分で、主曲率は $-\frac{1}{r}$, $K = \left(-\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2}$, $H = -\frac{1}{r}$

3.1 曲率の回転・平行移動不変性

$A = (a_{ij}) : n$ 次実正方行列, $A : n$ 次直交行列 $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^t A = {}^t A A = I_n$

n 次直交行列 A とベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ で $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$, ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) と表される写像 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の合同変換とよぶ。また, $\det A > 0$ のとき, Φ は向きを保つという。以下, $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ を向きを保つ合同変換とし, $\tilde{S} = \Phi(S)$ とおく。 \tilde{S} も正則曲面で,

$\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{q}) := A\mathbf{n}(\Phi^{-1}(\mathbf{q}))$, ($\mathbf{q} \in \tilde{S}$) は \tilde{S} の単位法ベクトル場。これで \tilde{S} を向きつける。 $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

を S の正の向きの局所パラメータ表示とすると, $\tilde{\sigma} := \Phi \circ \sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ は \tilde{S} の基本量や曲率などを \sim をつけて表す。 $\tilde{\sigma}(u, v) = A\sigma(u, v) + \mathbf{a}$ より, $\tilde{\sigma}_u = A\sigma_u, \tilde{\sigma}_v = A\sigma_v$ 。 一般に A が直交行列なら, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, (A\mathbf{v}) \cdot (A\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 。 理由として, $LHS = {}^t (A\mathbf{v}) (A\mathbf{w}) = {}^t \mathbf{v}^t A A \mathbf{w} = {}^t \mathbf{v} \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 。 よって $\tilde{E} = \tilde{\sigma}_u \cdot \tilde{\sigma}_u = (A\sigma_u) \cdot (A\sigma_u) = \sigma_u \cdot \sigma_u = E$ で, 同様に $\tilde{F} = F, \tilde{G} = G$ 。 また, $\tilde{\mathbf{n}}(u, v) = A\mathbf{n}(u, v)$

で, $\tilde{\sigma}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} (A\sigma_u) = A\sigma_{uu}$ より, $\tilde{L} = \tilde{\sigma}_{uu} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = (A\sigma_{uu}) \cdot (A\mathbf{n}) = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n} = L$ で, 同様に

$$\tilde{M} = M, \tilde{N} = N. \text{ よって, } \begin{cases} \tilde{K}(\tilde{\sigma}(u, v)) = K(\sigma(u, v)) \\ \tilde{H}(\tilde{\sigma}(u, v)) = H(\sigma(u, v)) \end{cases}$$

4 種々の曲率と曲面の形状

(S, \mathbf{n}) : 向き付けられた正則曲面, $\mathbf{p} \in S$ とする

合同変換をすると, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を仮定すればいい. f を点 \mathbf{p} における局所方

程式とすると, $(\nabla f)(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $f_z(\mathbf{p}) \neq 0$. よって, 陰関数定理より, S は \mathbf{p} の周りである C^∞ 関数 $z = g(x, y)$ のグラフ

そこで, $\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v) \end{pmatrix}$ とおくと, $\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u \end{pmatrix}$, $\sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v \end{pmatrix}$ より, $\sigma_u \times \sigma_v = \begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}$.

よって, σ は正の向き. $\sigma_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{uu} \end{pmatrix}$, $\sigma_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{uv} \end{pmatrix}$, $\sigma_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{vv} \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に

おいて, $\sigma_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から, $\begin{cases} E = \sigma_u \cdot \sigma_u = 1 \\ F = \sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \\ G = \sigma_v \cdot \sigma_v = 1 \end{cases}$

$a = g_{uu}(0, 0)$, $b = g_{uv}(0, 0)$, $c = g_{vv}(0, 0)$ とおくと, $\begin{cases} L = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n} = a \\ M = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n} = b \\ N = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n} = c \end{cases}$

よって, $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

よって, $\begin{cases} K(\mathbf{p}) = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = ac - b^2 \\ H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{a+c}{2} \end{cases}$

$K(\mathbf{p}) > 0$ なら, g は $(0, 0)$ で極値で取り, さらに $H(\mathbf{p}) > 0$ なら極小, $H(\mathbf{p}) < 0$ なら極大, $K(\mathbf{p}) < 0$ なら g は $(0, 0)$ で極値を取らない

Definition 4.1. $\mathbf{p} \in S$ の $\begin{cases} \text{楕円点} \\ \text{放物点} \\ \text{双曲点} \end{cases} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} K(\mathbf{p}) > 0 \\ K(\mathbf{p}) = 0 \\ K(\mathbf{p}) < 0 \end{cases}$

Proposition 4.2. \mathbf{p} が S の楕円点のとき

1. (a) $H(\mathbf{p}) > 0$ なら S は \mathbf{p} で $-\mathbf{n}(\mathbf{p})$ 方向に凸
(b) $H(\mathbf{p}) < 0$ なら $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ 方向に凸

2. S は双曲点で鞍状

主曲率を κ_1, κ_2 とすると, $\exists P: 2$ 次直交行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. このとき, $u = v = 0$ における g の 2 次の項までのテイラー展開は $g(u, v) = \frac{1}{2}au^2 + buc + \frac{1}{2}cv^2 + O(x^3)$

$= \frac{1}{2}\kappa_1 s^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 t^2 + O(x^3)$ ($\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ と変数変換). なぜなら

$$\frac{1}{2}au^2 + buv + \frac{1}{2}cv^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} (\kappa_1 s^2 + \kappa_2 t^2) \quad (17)$$

Definition 4.3. \mathbf{p} が S の臍点 $\stackrel{def}{\iff} \kappa_1 = \kappa_2$
 $\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ より, $\kappa_1 = \kappa_2 \iff H^2 = K$

Proposition 4.4. \mathbf{p} が S の臍点 $\stackrel{def}{\iff} \sum_{\mathbf{p}}$ はスカラー倍写像

Proof. $\sum_{\mathbf{p}} = \kappa \text{id}_{T_{\mathbf{p}}S}$ なら, $\sum_{\mathbf{p}}$ の固有値は κ のみ, 逆に $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ なら, $\exists P : 2$ 次正則行列, $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \implies \sum_{\mathbf{p}} = \kappa \text{id}_{T_{\mathbf{p}}S}$ \square

Example 4.5. $S = S^2(r)$, $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \frac{1}{r}\mathbf{p}$ のとき, $K = \frac{1}{r^2}, H = -\frac{1}{r}, \kappa_1 = \kappa_2 = -\frac{1}{r}$, よって, $S^2(r)$ の各点は楕円点かつ臍点. 逆に, 全ての点が臍点なら, S は球面か平面の一部であることを示せる

曲率の向きへの依存 S 上の単位法ベクトル場を \mathbf{n} から $-\mathbf{n}$ に変えると

$$\sum_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$$

$$\xi\sigma_u(a, b) + \eta\sigma_v(a, b) \mapsto -\xi\mathbf{n}_u(a, b) - \eta\mathbf{n}_v(a, b)$$

また, $\sum_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = -\frac{d}{dt}\mathbf{n}(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$, ただし, γ は $t=0$ で \mathbf{p} を通り, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \mathbf{v}$ となる S 内の

曲線, よって, $\sum_{\mathbf{p}}$ は $-\sum_{\mathbf{p}}$ に変わる. よって, κ_1, κ_2 は $-\kappa_1, -\kappa_2$ に, $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ は $-H$ に変わり, $K = \kappa_1\kappa_2$ は変わらない

5 第2基本形式と法曲率

$D \subset \mathbb{R}^2$: 開集合, $\mathbf{q} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$ とする. $T_{\mathbf{q}}D := \{\mathbf{q}$ を始点とする有向線分 $\} = \mathbb{R}^2$ 座標を du, dv と表す成分表示. $du, dv : T_{\mathbf{q}}D \ni \xi \mapsto \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$

D 上の 1-形式とは, $fdu + gdv$ の形の式で, これを $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in T_{\mathbf{q}}D$ に対し, $(fdu + gdv)_{\mathbf{q}}(\xi) = f(u, v)\xi_1 + g(u, v)\xi_2$ を対応させる関数とみなす

D 上の 2-形式とは, $hdu \wedge dv$ の形の式で, 二つの 1-形式 ω, τ の外積 $\omega \wedge \tau$ が分配法則と $du \wedge du = 0, dv \wedge dv = 0, du \wedge dv = -dv \wedge du$ で定まる. D 上の C^∞ 関数 h に対し, $dh = h_u du + h_v dv$, 1-形式 $\omega = fdu + gdv$ に対し, $d\omega = df \wedge du + dg \wedge dv$

d の性質:

1. $d(h\omega) = dh \wedge \omega + h \wedge d\omega, d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau - \omega \wedge d\tau$
2. $d(dh) = 0$

また, 以降ベクトル値の 1-形式 $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ も扱う ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$: 1-形式). これは

$\mathbf{q} \in D, \xi \in T_{\mathbf{q}}D$ に対し, $\omega_{\mathbf{q}}(\xi) = \begin{pmatrix} (\omega_1)_{\mathbf{q}}(\xi) \\ (\omega_2)_{\mathbf{q}}(\xi) \\ (\omega_3)_{\mathbf{q}}(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる関数 $\omega_i = f_i du + g_i dv$ と

表すと, $\omega = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} dv$ と表せる

C^∞ 関数 $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $d\mathbf{h} = \begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \end{pmatrix} = \mathbf{h}_u du + \mathbf{h}_v dv$. 以下, (S, \mathbf{n})

を向きつけられた正則曲面とし, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を正の向きの局所パラメータ表示とする. $\mathbf{n}(\sigma(u, v)) = \mathbf{n}(u, v)$ と表す

$$(d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) = \sigma_u(u, v)\xi_1 + \sigma_v(u, v)\xi_2 \quad (18)$$

$$(d\mathbf{n})_{\mathbf{q}}(\xi) = \mathbf{n}_u(u, v)\xi_1 + \mathbf{n}_v(u, v)\xi_2 = - \sum_{\sigma(u, v)} \left((d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) \right) \quad (19)$$

$I := d\sigma \cdot d\sigma$ (ベクトル値関数としての内積) とおくと

$$I_{\mathbf{q}}(\xi) = (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) \cdot (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) \quad (20)$$

$$= \|\sigma_u(u, v)\xi_1 + \sigma_v(u, v)\xi_2\|^2 \quad (21)$$

$$= E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2 \quad (22)$$

よって, $I := E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$

Definition 5.1. $\mathbb{I} := -d\sigma \cdot \mathbf{n}$ を第二基本形式とよぶ

$$\mathbb{I}_{\mathbf{q}}(\xi) = -(\sigma_u(u, v)\xi_1 + \sigma_v(u, v)\xi_2) \cdot (\mathbf{n}_u(u, v)\xi_1 + \mathbf{n}_v(u, v)\xi_2) \quad (23)$$

$$= -\sigma_u \cdot \mathbf{n}_u \xi_1^2 - (\sigma_u \cdot \mathbf{n}_v + \sigma_v \cdot \mathbf{n}_u) \xi_1 \xi_2 - \sigma_v \cdot \mathbf{n}_v \xi_2^2 \quad (24)$$

$$= L\xi_1^2 + 2M\xi_1\xi_2 + N\xi_2^2 \quad (25)$$

よって, $\mathbb{I} = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2$

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を弧長パラメータ表示 ($\|\gamma'(s)\| \equiv 1$) された S 内の C^∞ 曲線とする

Definition 5.2. $\kappa_n(s) = \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s))$ を γ の法曲率とよぶ

$\gamma(s) \in \sigma(D)$ のとき, $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$ と表して, $\kappa_n(s)$ を計算

$$\gamma'(s) = \sigma_u(u(s), v(s))u'(s) + \sigma_v(u(s), v(s))v'(s) \quad (26)$$

$$\gamma''(s) = \frac{d}{ds}\sigma_u(u(s), v(s))u'(s) + \sigma_u(u(s), v(s))u''(s) \quad (27)$$

$$+ \frac{d}{ds}\sigma_v(u(s), v(s))v'(s) + \sigma_v(u(s), v(s))v''(s) \quad (28)$$

$$= (\sigma_{uu}u' + \sigma_{uv}v')u' + \sigma_u u'' + (\sigma_{vu}u' + \sigma_{vv}v')v' + \sigma_v v'' \quad (29)$$

$\sigma_u \cdot \mathbf{n} = \sigma_v \cdot \mathbf{n} = 0$ より, $\gamma''(s) \cdot \mathbf{n} = (\sigma_{uu} \cdot \mathbf{n})(u')^2 + 2(\sigma_{uv} \cdot \mathbf{n})u'v' + (\sigma_{vv} \cdot \mathbf{n})(v')^2 =$
 $\mathbb{I} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{pmatrix}$ から, $\bar{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix}$ とおくと, $\kappa_n(s) = \mathbb{I}_{\bar{\gamma}(s)}(\bar{\gamma}'(s))$

一般のパラメータ t の場合, $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}, s = \int_{\star}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$ は弧長パラメータ, $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}\|, \frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{d}{dt}$ より

$$\kappa_n = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{d\gamma}{dt} \right) \cdot \mathbf{n} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \ddot{\gamma} \cdot \mathbf{n} \quad (31)$$

よって, S 内の正則曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ の法曲率は $\kappa_n(t) = \frac{1}{\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2} \frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \mathbf{n}(\gamma(t))$

前と同様, $\frac{d^2\gamma}{dt^2} \cdot \mathbf{n}(\gamma(t)) = \mathbb{I}_{\bar{\gamma}(t)} \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dt} \right)$, 一方, $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^2 = \left\| \sigma_u \frac{du}{dt} + \sigma_v \frac{dv}{dt} \right\|^2$
 $= (\sigma_u \cdot \sigma_u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (\sigma_v \cdot \sigma_v) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = I_{\bar{\gamma}(t)} \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dt} \right)$
 $\implies \kappa_n(t) = \frac{\mathbb{I}_{\bar{\gamma}(t)} \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dt} \right)}{I_{\bar{\gamma}(t)} \left(\frac{d\bar{\gamma}}{dt} \right)}$

Proposition 5.3. $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$ とし, $\mathbf{p} = \sigma(u, v)$ における主曲率を $\kappa_1 \leq \kappa_2$ とすると

$$\kappa_1 = \min_{\xi \in I_{\mathbf{q}}D \setminus \{0\}} \frac{\mathbb{I}_{\mathbf{q}}(\xi)}{I_{\mathbf{q}}(\xi)}, \kappa_2 = \max_{\xi \in I_{\mathbf{q}}D \setminus \{0\}} \frac{\mathbb{I}_{\mathbf{q}}(\xi)}{I_{\mathbf{q}}(\xi)} \quad (32)$$

6 構造方程式

(S, \mathbf{n}) : 向きつけられた正則曲面, $\sigma: D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 正の向きの局所パラメータ表示とし, $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{n}(\sigma(u, v)) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$, $\mathbf{e}_1 := \frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|}$, $\mathbf{e}_2 := \frac{\sigma_v - (\sigma_v \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\|\sigma_v - (\sigma_v \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1\|}$ とすると, $\mathbf{e}_{1,2} \in T_p S$ (σ_u, σ_v の正規直交), $\mathbf{e}_3 := \mathbf{n}$ とすると, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を σ に付随する動標構という

$\sigma_u, \sigma_v \perp \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ より, $\begin{cases} \sigma_u = a_1^1 \mathbf{e}_1 + a_1^2 \mathbf{e}_2 \\ \sigma_v = a_2^1 \mathbf{e}_1 + a_2^2 \mathbf{e}_2 \end{cases}$ と表せる

Example 6.1. $a_1^1 = \sigma_u \cdot \mathbf{e}_1: D \rightarrow \mathbb{R}: C^\infty$ とする

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ とおくと, $(\sigma_u \ \sigma_v) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) A$. また

$$\sigma_u \times \sigma_v = (a_1^1 \mathbf{e}_1 + a_1^2 \mathbf{e}_2) \times (a_2^1 \mathbf{e}_1 + a_2^2 \mathbf{e}_2) \quad (33)$$

$$= (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (34)$$

$$= \det A \mathbf{e}_3 \quad (35)$$

$$\Rightarrow \det A = \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

$\theta^j = a_1^j du + a_2^j dv$ とおくと, これらは D 上の 1-形式で

$$d\sigma = \sigma_u du + \sigma_v dv = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2 \quad (36)$$

Proposition 6.2. $\theta^1 \wedge \theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^2 = 0, \theta^1 \wedge \theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^1 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$

Proof.

$$\theta^j \wedge \theta^k = (a_1^j du + a_2^j dv) \wedge (a_1^k du + a_2^k dv) \quad (37)$$

$$= (a_1^j a_2^k - a_2^j a_1^k) du \wedge dv \quad (38)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^j & a_2^j \\ a_1^k & a_2^k \end{vmatrix} \quad (39)$$

□

$\omega_i^j = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = t_{ej} d\mathbf{e}_i$ とおくと, $d\mathbf{e}_i = \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3$

Proposition 6.3. $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$. 特に, $\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0$

Proof. 一般に C^∞ 関数 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \sum_i d(f_i g_i) = d\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{g} \quad (40)$$

$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \delta_{ij}$ より

$$0 = d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad (41)$$

$$= d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j \quad (42)$$

$$= \omega_i^j + \omega_j^i \quad (43)$$

□

$b_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_j)$. ただし, $\mathbf{p} = \sigma(u, v)$ とおき, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とおくと, $b_{ij} = b_{ji}$ で,

$$\sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_j) = b_{1j}\mathbf{e}_1 + b_{2j}\mathbf{e}_2. \implies \left(\sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_1) \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_2) \right) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2) B, {}^t B = B$$

つまり, B は $\sum_{\mathbf{p}}$ の $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に関する表現行列. よって, B の固有値 = 主曲率, $\det B = K, \operatorname{tr} B = 2H$

Proposition 6.4. $\omega_i^3 = \theta^1 b_{i1} + \theta^2 b_{i2}$

Proof. $d\sigma = \sigma_u du + \sigma_v dv = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2$ より

$$\theta^1 \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_1) + \theta^2 \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_2) = \sum_{\mathbf{p}} (d\sigma) \quad (44)$$

$$= \sum_{\mathbf{p}} (\sigma_u) du + \sum_{\mathbf{p}} (\sigma_v) dv \quad (45)$$

$$= -\mathbf{n}_u du - \mathbf{n}_v dv = -d\mathbf{e}_3 \quad (46)$$

$$\implies \omega_i^3 = -\omega_3^i = -d\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i = \left(\theta^1 \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_1) + \theta^2 \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{e}_2) \right) \cdot \mathbf{e}_i = \theta^1 b_{i1} + \theta^2 b_{i2} \quad \square$$

Theorem 6.5. 構造方程式

$$1. d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -\omega_1^2 \wedge \theta^1$$

$$2. d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$$

Proof. $\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} x^1(u, v) \\ x^2(u, v) \\ x^3(u, v) \end{pmatrix}, \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \\ e_i^3 \end{pmatrix}$ と表す

$$1. d\sigma = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \text{ より, } \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_i^k dx^k = \mathbf{e}_i \cdot d\sigma = \begin{cases} \theta^i & (i = 1, 2) \\ 0 & (i = 3) \end{cases} \text{ から} \\ i = 1, 2 \text{ のとき}$$

$$d\theta^i = d \left(\sum_k e_i^k dx^k \right) \quad (47)$$

$$= \sum_k (de_i^k \wedge dx^k + e_i^k d(dx^k)) \quad (48)$$

$$= \sum_k de_i^k \wedge dx^k \quad (49)$$

一方, $\mathbf{de}_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j \wedge \mathbf{e}_j$ より $\mathbf{de}_i^k = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j \wedge e_j^k$. よって

$$d\theta^i = \sum_k \left(\sum_j \omega_i^j \wedge e_j^k \right) \wedge dx^k \quad (50)$$

$$= \sum_{j,k} \omega_i^j e_j^k \wedge dx^k \quad (51)$$

$$= \sum_j \omega_i^j \wedge \left(\sum_k e_j^k dx^k \right) \quad (52)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \omega_i^j \wedge \theta^j \quad (53)$$

つまり, $\begin{cases} d\theta^1 = \omega_1^1 \wedge \theta^1 + \omega_1^2 \wedge \theta^2 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1 + \omega_2^2 \wedge \theta^2 = -\omega_1^2 \wedge \theta^1 \end{cases}$

2. $\omega_i^j = \mathbf{de}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \mathbf{de}_i^k e_j^k$ より

$$d\omega_i^j = \sum_k \mathbf{de}_j^k \wedge \mathbf{de}_i^k \quad (54)$$

$$= \sum_k \left(\sum_l e_l^k \omega_j^l \right) \wedge \left(\sum_m e_m^k \omega_i^m \right) \quad (55)$$

$$= \sum_{k,l,m} e_l^k e_m^k \omega_j^l \wedge \omega_i^m \quad (56)$$

$$= \sum_{l,m} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m) \omega_j^l \wedge \omega_i^m \quad (57)$$

$$= \sum_l \omega_j^l \wedge \omega_i^l \quad (58)$$

特に

$$d\omega_2^1 = \sum_l \omega_1^l \wedge \omega_2^l = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \quad (59)$$

$$= (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \quad (60)$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (61)$$

$$= \det B \theta^1 \wedge \theta^2 = K \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (62)$$

□

7 リーマン計量

$D \subset \mathbb{R}^2$: 開集合, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, T_{\mathbf{q}}D = \mathbb{R}^2 \ni \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definition 7.1. リーマン計量

D 上のリーマン計量とは, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D, \xi, \eta \in T_{\mathbf{q}}D$ の関数, $g : (\mathbf{q}, \xi, \eta) \mapsto g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ で次の条件をみたすもの

1. \mathbf{q} を固定すると, $g_{\mathbf{q}} : (\xi, \eta) \mapsto g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta)$ は $T_{\mathbf{q}}D$ の内積
2. $g_{\mathbf{q}}(\partial_i, \partial_j)$ は $g = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ について D 上 C^∞

g がリーマン計量なら, $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = g_{\mathbf{q}}(\xi_1\partial_1 + \xi_2\partial_2, \eta_1\partial_1 + \eta_2\partial_2) = \sum_{i,j=1}^2 \xi_i\eta_j g_{\mathbf{q}}(\partial_i, \partial_j)$. よって, $E(u, v) = g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_1), F(u, v) = g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_2) = g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \partial_1), G(u, v) = g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \partial_2)$ とおくと

$$g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$= {}^t \xi \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \eta \quad (64)$$

(2) より, E, F, G は D 上 C^∞ で, さらに内積の正値性より, 各 $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$ で, $\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$ は正定値対称行列. (つまり $EG - F^2 > 0, E > 0$. なぜなら, $E = g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_1) > 0, |g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_2)| \leq \sqrt{g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_1)g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \partial_2)}$ より, $|F| \leq \sqrt{E} \sqrt{G}$) 逆に D 上の C^∞ 関数 E, F, G が D 上常に $EG - F^2 > 0, E > 0$ なら, $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = {}^t \xi \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \eta$ はリーマン計量

Example 7.2. $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ とおくと, g はリーマン計量 ($E = G = 1, F = 0$) で, ユークリッド計量とよぶ

Example 7.3. $\mathbb{H}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0 \right\}$ とおき, $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \frac{\xi \cdot \eta}{v^2}$, ($\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2, \xi, \eta \in T_{\mathbf{q}}\mathbb{H}^2$) と定めると, g は \mathbb{H}^2 上のリーマン計量 (なぜなら $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = {}^t \xi \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \eta, EG - F^2 = \frac{1}{v^4} - 0 > 0, E = \frac{1}{v^2} > 0$). これをポアンカレ計量とよぶ

Example 7.4. S : 正則曲面, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 局所パラメータ表示, $g_{\mathbf{q}}^\sigma(\xi, \eta) := (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) \cdot (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\eta) = (\sigma_u(u, v)\xi_1 + \sigma_v(u, v)\xi_2) \cdot (\sigma_u(u, v)\eta_1 + \sigma_v(u, v)\eta_2)$ で, g^σ はリーマン計量で, E, F, G は第一基本量

以下, $g : D$ 上のリーマン計量とする. $(\xi, \eta)_{\mathbf{q}} = g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta), \|\xi\|_{\mathbf{q}} = \sqrt{g_{\mathbf{q}}(\xi, \xi)}$ とおくと, $\partial_1, \partial_2 \in T_{\mathbf{q}}D$ を内積 $(\cdot)_{\mathbf{q}}$ に関し, 正規直交化したものを $\epsilon_1(u, v), \epsilon_2(u, v)$ とおくと. $\epsilon_1 = \frac{\partial_1}{\|\partial_1\|}, \epsilon_2 =$

$\frac{\partial_2 - (\partial_2 \cdot \epsilon_1)\epsilon_1}{\|\partial_2 - (\partial_2 \cdot \epsilon_1)\epsilon_1\|}$. また, $g = g^\sigma$ の場合, $(d\sigma)_{\mathbf{q}}(\epsilon_i) = \mathbf{e}_i$

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = (\epsilon_1 \ \epsilon_2)^{-1}$ と定め, $\theta^j := a_1^j du + a_2^j dv$ とおくと

$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ より

$\theta^1 \epsilon_1 + \theta^2 \epsilon_2 = (\epsilon_1 \ \epsilon_2) \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

Proposition 7.5. $\theta^1 \wedge \theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^2 = 0, \theta^1 \wedge \theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^1 = \det A du \wedge dv$

Proof.

$$\theta^j \wedge \theta^k = (a_1^j du + a_2^j dv) \wedge (a_1^k du + a_2^k dv) \quad (65)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^j & a_2^j \\ a_1^k & a_2^k \end{vmatrix} du \wedge dv \quad (66)$$

□

Proposition 7.6. $\exists! \omega_2^1 : D$ 上の 1-形式, $d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1$

Proof. $\omega_2^1 = f du + g dv$ と表すと

$$\omega_2^1 = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \tilde{f}\theta^1 + \tilde{g}\theta^2 =: \begin{pmatrix} \tilde{f} & \tilde{g} \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta^2 = (\tilde{f}\theta^1 + \tilde{g}\theta^2) \wedge \theta^2 \quad (67)$$

$$= \tilde{f}\theta^1 \wedge \theta^2 = \tilde{f} \det A du \wedge dv \quad (68)$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta^1 = \tilde{g}\theta^2 \wedge \theta^1 = -\tilde{g} \det A du \wedge dv \quad (69)$$

$d\theta^j = h_j du \wedge dv$ と表すと, 証明したい式は $h_1 = -\tilde{f} \det A, h_2 = -\tilde{g} \det A$ と同値で, $\det A \neq 0$ より, この条件で \tilde{f}, \tilde{g} が一意に決まり, $\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \tilde{f} & \tilde{g} \end{pmatrix}$ によって, f, g が一意に決まる □

$$d\omega_2^1 = \Delta du \wedge dv = \frac{\Delta}{\det A} \theta^1 \wedge \theta^2 \text{ と表せる}$$

Definition 7.7. **ガウス曲率**

$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ によって定まる K を g のガウス曲率とよぶ

Example 7.8. ポアンカレ計量 g の場合, $E = G = \frac{1}{v^2}, F = 0$ より

$$\epsilon_1 = \frac{\partial_1}{\sqrt{g_{\mathbf{q}}(\partial_1, \partial_1)}} = \frac{\partial_1}{\sqrt{E}} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

$$g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \epsilon_1) = v g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \partial_1) = 0 \quad (71)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial_2}{\sqrt{g_{\mathbf{q}}(\partial_2, \partial_2)}} = \frac{\partial_2}{\sqrt{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} du \\ \frac{1}{v} dv \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$d\theta^1 = d(v^{-1} du) = -v^{-2} dv \wedge du \quad (75)$$

$$d\theta^2 = d(v^{-1} dv) = 0 \quad (76)$$

$\omega_2^1 = f du + g dv$ と表すと, $d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2 = -(f du + g dv) \wedge (v^{-1} dv) = -f v^{-1} du \wedge dv$. よって, $v^{-2} = -f v^{-1}, f = -v^{-1}$. 同様に $d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1 = (f du + g dv) \wedge (v^{-1} du) = v^{-1} g dv \wedge du$ で, $g = 0$. よって, $\omega_2^1 = -v^{-1} du$. また $d\omega_2^1 = -d(v^{-1} du) = v^{-2} dv \wedge du, \theta^1 \wedge \theta^2 = v^{-2} du \wedge dv \implies K = -1$

7.1 接続形式

Definition 7.9. テンソル積

ベクトル空間 V 上の (k, l) 型テンソルは以下のような多重線型写像

$$T : V_1^* \times \cdots \times V_k^* \times V_1 \times \cdots \times V_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (77)$$

Definition 7.10. f, g をそれぞれベクトル空間 V 上の k -線形関数, l -線形関数とすると, f と g のテンソル積 $f \otimes g$ は V 上の $(k+l)$ -線形関数で, 次を満たすもの

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_1, \dots, v_k) g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \quad (78)$$

Example 7.11.

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v^i w^i \quad (79)$$

$$= \sum_i \alpha^i(v) \alpha^i(w) \quad (80)$$

$$= \sum_i (\alpha^i \otimes \alpha^i)(v, w) \quad (81)$$

Example 7.12.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \otimes [a_1 \ a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \\ a_1 b_4 & a_2 b_4 & a_3 b_4 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Example 7.13. クロネッカー積

$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \cdots \\ u_{21}V & u_{22}V & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (83)$$

Definition 7.14. リーマン計量

$g \in C^\infty(M; \otimes^{0,2}TM)$ とする (i.e. $g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$). $\forall \mathbf{p} \in M, g_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の条件をみたすとき, $g_{\mathbf{p}}$ は接空間 $T_{\mathbf{p}}M$ 上の内積で, g を M 上のリーマン計量とよび, (M, g) をリーマン多様体とよぶ

1. $\forall X_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}M, g_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{p}}, X_{\mathbf{p}}) \geq 0$ で, $g_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{p}}, X_{\mathbf{p}}) = 0 \iff X_{\mathbf{p}} = 0$
2. $\forall X_{\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}M, g_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{p}}, Y_{\mathbf{p}}) = g_{\mathbf{p}}(Y_{\mathbf{p}}, X_{\mathbf{p}})$

多様体上の局所座標系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ では, リーマン計量 g は

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (84)$$

で表せる. ここで, $g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$

Example 7.15. 球面 S^n 上の計量

包含写像 $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を考える. \mathbb{R}^{n+1} では標準リーマン計量 $g_0 = \sum_{i=1}^{n+1} dx^i \otimes dx^i$ が定まっているので, これを S^n への引き戻すを $g_1 = i^*g_0$ を表すと, g_1 は g_0 を S^n の各点での接空間に

制限した計量である．そして局所座標での g_1 の局所表示を考える． $U = S^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}$ とする， U 上の局所座標写像は

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (85)$$

$$\phi(x) = \left(\frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \right) \quad (86)$$

ここで， $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in U$ ．また， ϕ の第 i 成分は u_i であるから

$$x^i = \frac{2u^i}{1 + \sum_{i=1}^n (u^i)^2}, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (87)$$

$$x^{n+1} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n (u^i)^2}{1 + \sum_{i=1}^n (u^i)^2} \quad (88)$$

よって， U では $g_1 = i^*g_0 = \frac{4}{\left[1 + \sum_{i=1}^n (u^i)^2\right]^2} \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i$ である

Definition 7.16. 等長同型

$f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ をリーマン多様体の間の微分同型とする． $g = f^*h$ をみたと， f を (M, g) と (N, h) の間の等長同型とよぶ

リーマン多様体 (M, g) の自分への等長同型を (M, g) の自己等長同型とよび，その全体の成す群は自己等長同型群とよび， $I(M, g)$ で表す

Definition 7.17. Killing ベクトル場

X をリーマン多様体 (M, g) 上のベクトル場とする． X から生成する無限小変換は全て等長同型であるとき， X を (M, g) 上の Killing ベクトル場とよぶ．また，Lie 微分と定義より， X が Killing ベクトル場 $\iff L_X g = 0 \iff$

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \quad (89)$$

ただし， $g : \langle \cdot, \cdot \rangle$

Example 7.18. ポアンカレ円盤 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする． \mathbb{D} 上のリーマン計量は $g_{-1} = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ ．また，上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ があり， \mathbb{H} 上のリ

ーマン計量は $h_{-1} = \frac{1}{(\text{Im}z)^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ ．写像

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \quad (90)$$

$$\phi(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (91)$$

を考えると， $\phi'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2}, 1 - |\phi(z)|^2 = \frac{4\text{Im}z}{|z+i|^2}$ ．よって

$$\phi^*g_{-1} = \frac{4}{[1 - |\phi(z)|^2]^2} |\phi'(z)|^2 (dx \otimes dx + dy \otimes dy) = \frac{1}{(\text{Im}z)^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy) \quad (92)$$

となり, ϕ は等長同型である

これと同様に, $\theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D}$ のとき, $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$ は (\mathbb{D}, g_{-1}) の自己等長同型であり, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ のとき, $\phi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ は (\mathbb{H}, h_{-1}) の自己等長同型である

Example 7.19. ポアンカレ円盤での距離

$z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ とし, $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}$ をみたす等長写像 $\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1}$ とする. $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ が z_1, z_2 を結ぶ曲線であるとき, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ とし

$$L(\sigma) = \int_0^1 \frac{2}{1 - x^2(t) - y^2(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (93)$$

$$\geq \int_0^1 \frac{2|x'(t)|}{1 - x^2(t)} dt \quad (94)$$

$$\geq \left| \int_0^1 \frac{2|x'(t)|}{1 - x^2(t)} dt \right| \quad (95)$$

$$= \left| \log \frac{1 + \phi(z_2)}{1 - \phi(z_2)} \right| = \log \frac{1 + |\phi(z_2)|}{1 - |\phi(z_2)|} \quad (96)$$

$$= \log \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|} \quad (97)$$

等号成立 $\iff \sigma$ は $\phi(z_1) = 0, \phi(z_2) \in \mathbb{R}$ を結ぶ直線分であるとき

よって, $d(z_1, z_2) = d(\phi(z_1), \phi(z_2)) = \log \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}$ で, (\mathbb{D}, g_{-1}) の距離であり, 双曲距離とよぶ

E を多様体 M 上のベクトル束とする. 言い換えれば, E は M 上の全ての点に対するあるベクトル空間の族である. E 上の滑らかな断面全体を $\Gamma(E)$ と表すと, M 上の C^∞ ベクトル場全体は $\Gamma(TM) = C^\infty(M; TM)$

Definition 7.20. 接続形式

以下の条件をみたす $\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ を E のある接続形式とよぶ

1. $\nabla_{fX+gY}s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s, \forall X, Y \in \Gamma(TM), f, g \in C^\infty(M), s \in \Gamma(E)$
2. $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \forall X \in \Gamma(TM), s_1, s_2 \in \Gamma(E)$
3. $\nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s, \forall X \in \Gamma(TM), f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(E)$

7.2 直交基底と接続形式

$M \subset \mathbb{R}^3$ を C^∞ 曲面とし, $\sigma(u, v): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ に対し, 接空間 $T_p M := \{\xi\sigma_u(u, v) + \eta\sigma_v(u, v) : \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$ とすると

Definition 7.21. リーマン計量

$$g = Edu \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + Gdv \otimes dv \quad (98)$$

で, $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle, F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$ とする. 行列表示にすると

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (99)$$

から, $\xi = \xi^1 \partial_u + \xi^2 \partial_v, \eta = \eta^1 \partial_u + \eta^2 \partial_v$ と表せて

$$g_p(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = g_{ij} \xi^i \eta^j \quad (100)$$

Example 7.22. ユークリッド計量

$g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ とすると, 接ベクトル ξ, η の内積は普通の内積で, $E = G = 1, F = 0$ となるから

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

共変微分 ∇ に対し $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0, \nabla_{\xi} \eta = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \partial_j$. 直感的に, 平面に対して曲がりがないから, 平行移動しても向きが変わらないので, $\Gamma = 0$

Example 7.23. ポアンカレ計量

$\mathbb{H}^2 := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ を考える. $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \frac{\xi \cdot \eta}{v^2}$

すると, $E = G = \frac{1}{v^2}, F = 0$ となり

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix} \quad (102)$$

$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$ とすると, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{v}, \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{v}, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{v}$ から, $EG - F^2 = \frac{1}{v^4} > 0$

Example 7.24. 正則曲面の計量

$\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とし, σ_u, σ_v を S が (u, v) での接方向とする. $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \langle (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi), (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\eta) \rangle_{\mathbb{R}^3}$ とすると, $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle, F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle, G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$ で

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (103)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (104)$$

任意の接ベクトル $\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial u} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial v}, \eta = \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v}$ とすると

$$g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = E\xi^1\eta^1 + F(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + G\xi^2\eta^2 \quad (105)$$

言い換えれば, $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = \langle (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi), (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\eta) \rangle$

D で座標基底 ∂_u, ∂_v とし, Gram-Schmidt の正規直交化すると

$$\epsilon_1 = \frac{\partial_u}{\|\partial_u\|_g} = \frac{\partial_u}{\sqrt{E}} \quad (106)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial_v - (g(\partial_v, \epsilon_1)) \epsilon_1}{\|\partial_v - (g(\partial_v, \epsilon_1)) \epsilon_1\|_g} \quad (107)$$

$A^{-1} = (\epsilon_1 \ \epsilon_2), (A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix})$ と定め, $\theta^i(\epsilon_j) = \delta_j^i, (\theta^j := a_1^j du + a_2^j dv)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (108)$$

より, $\theta^1 \epsilon_1 + \theta^2 \epsilon_2 = (\epsilon_1 \ \epsilon_2) \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

Proposition 7.25. $\theta^1 \wedge \theta^1 = \theta^2 \wedge \theta^2 = 0, \theta^1 \wedge \theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^1 = \det A \cdot du \wedge dv$

Proof.

$$\theta^j \wedge \theta^k = (a_1^j du + a_2^j dv) \wedge (a_1^k du + a_2^k dv) \quad (109)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^j & a_2^j \\ a_1^k & a_2^k \end{vmatrix} du \wedge dv \quad (110)$$

□

Proposition 7.26. D 上の 1-形式 ω_2^1 は唯一存在し, $d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1$ をみたす

Proof. $\omega_2^1 = f du + g dv$ と表すと

$$\omega_2^1 = (f \ g) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (f \ g) (\epsilon_1 \ \epsilon_2) \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$= \tilde{f}\theta^1 + \tilde{g}\theta^2 =: (\tilde{f} \ \tilde{g}) \quad (112)$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta^2 = (\tilde{f}\theta^1 + \tilde{g}\theta^2) \wedge \theta^2 \quad (113)$$

$$= \tilde{f}\theta^1 \wedge \theta^2 = \tilde{f} \det A \cdot du \wedge dv \quad (114)$$

$$= (fa_2^2 - ga_1^2) du \wedge dv \quad (115)$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta^1 = \tilde{g}\theta^2 \wedge \theta^1 = -\tilde{g} \det A \cdot du \wedge dv \quad (116)$$

$$= (fa_2^1 - ga_1^1) du \wedge dv \quad (117)$$

$d\theta^1 = h_1 du \wedge dv, d\theta^2 = h_2 du \wedge dv$ とおくと

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2^2 & a_1^2 \\ a_2^1 & -a_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (118)$$

$\det A \neq 0$ であれば, $(f \ g) = (h_1 \ h_2) A^{-1}$ が唯一に解けるから, ω_2^1 が唯一に定まる □

Remark 7.27. これは Cartan の第一構造方程式 $d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j = 0$ が二次元のときである

Definition 7.28. ガウス曲率

g を二次元リーマン計量とし, 局所直交基底を (θ^1, θ^2) とする

言い換えれば $d\sigma = \sigma_u du + \sigma_v dv = \theta^1 \mathbf{e}_1 + \theta^2 \mathbf{e}_2$. 接続形式 1-形式 ω_2^1 とすると, $d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$ で確定された関数 K を g のガウス曲率とよぶ

Example 7.29. ポアンカレ計量のガウス曲率

g をポアンカレ計量とすると, $E = G = \frac{1}{v^2}, F = 0$ であるから

$$\epsilon_1 = \frac{\partial_u}{\sqrt{E}} = v\partial_u \quad (119)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial_v}{\sqrt{G}} = v\partial_v \quad (120)$$

行列で表すと

$$(\epsilon_1 \ \epsilon_2) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \quad (121)$$

$$A = (\epsilon_1 \ \epsilon_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{pmatrix} \quad (122)$$

よって, $\theta^1 = v^{-1}du, \theta^2 = v^{-1}dv$ である. $d\theta^1, d\theta^2$ を計算すると

$$d\theta^1 = d(v^{-1}du) = -v^{-2}dv \wedge du \quad (123)$$

$$= v^{-2}du \wedge dv \quad (124)$$

$$d\theta^2 = d(v^{-1}dv) = 0 \quad (125)$$

$\omega_2^1 = fdu + gdv$ とすると, 構造方程式 $\begin{cases} d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1 \end{cases}$ に代入すると

$$d\theta^1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2 = -(fdu + gdv) \wedge (v^{-1}dv) = -fv^{-1}du \wedge dv \quad (126)$$

$$d\theta^2 = \omega_2^1 \wedge \theta^1 = (fdu + gdv) \wedge (v^{-1}du) = gv^{-1}dv \wedge du \quad (127)$$

係数比較すると, $\begin{cases} f = -v^{-1} \\ g = 0 \end{cases}$ から, $\omega_2^1 = -v^{-1}du$

$d\omega_2^1 = d(-v^{-1}du) = v^{-2}dv \wedge du$ で, $\theta^1 \wedge \theta^2 = v^{-2}du \wedge dv$ より, $K = \frac{d\omega_2^1}{\theta^1 \wedge \theta^2} = -1$

8 測地線

S を正則曲面とする

Definition 8.1. S 内の C^∞ 曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, 条件 $\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) \perp T_{\gamma(t)}S, t \in I$ をみたすものを測地線とよぶ

Proposition 8.2. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を測地線とする

1. $\|\dot{\gamma}(t)\|$ は定数
2. $\lambda := \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ なら, $\tilde{\gamma}(s) := \gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right)$ も測地線. (γ は弧長パラメータ表示)

Proof. 1. $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S$ より, $\ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)) = 0 \implies \|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const.}$

2.

$$\frac{d^2}{ds^2} \tilde{\gamma}(s) = \frac{d^2}{ds^2} \gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right) \tag{128}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \ddot{\gamma}\left(\frac{s}{\lambda}\right) \perp T_{\gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right)}S \tag{129}$$

□

Example 8.3. $S \subset \mathbb{R}^3$ を平面, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : S$ に平行, $\mathbf{p} \in S$. このとき, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}$ は S の測地線である

Proof. $\ddot{\gamma}(t) \equiv \mathbf{0}$

□

Example 8.4. $S = S^2(r)$ とする, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ は赤道. 各 $t \in \mathbb{R}$ で, $\ddot{\gamma}(t) =$

$\begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{n}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ と平行. よって, $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S^2(r)$ で, γ は測地線である

局所パラメータ表示 $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を用いて測地線の条件を調べる. 以下, $(u^1, u^2) = u, v$ とおき, $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_{uu}, \sigma_{uv}, \sigma_{vv}$ などをそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ などと表す. また, $g_{ij} := \sigma_i \cdot \sigma_j, h_{ij} := \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}$

ここで $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, (h_{ij}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, g_{ij} = g_{ji}, h_{ij} = h_{ji}$ に注意

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ の (i, j) 成分を $g^{ij} (= g^{ji})$ とおく, $\sigma_1, \sigma_2, \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 \times \sigma_2}{\|\sigma_1 \times \sigma_2\|}$

は各 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ で \mathbb{R}^3 の基底

よって

$$\sigma_{jk} = \sum_{i=1}^2 \Gamma_{jk}^i \sigma_i + \Gamma_{jk} \mathbf{n}, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{jk} \in \mathbb{R} \tag{130}$$

と表せる. ここで, $h_{jk} = \sigma_{jk} \cdot \mathbf{n} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \sigma_i \cdot \mathbf{n} + \Gamma_{jk} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \Gamma_{jk}$ ($\sigma_i \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$)

Definition 8.5. クリストッフエル記号

Γ_{jk}^i をクリストッフエル記号とよぶ. $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$ より, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$

$\gamma(t) \in \sigma(D)$ となる $t \in I$ に対し, $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) = \sigma(u^1(t), u^2(t))$ と表すと

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^2 \sigma_j(u(t), v(t)) \frac{du^j}{dt} \quad (131)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{d}{dt} \sigma_j(u(t), v(t)) \cdot \frac{du^j}{dt} + \sigma_j(u(t), v(t)) \frac{d^2 u^j}{dt^2} \right) \quad (132)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \sigma_i(u(t), v(t)) \frac{d^2 u^j}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^2 \sigma_{jk}(u(t), v(t)) \frac{du^k}{dt} \frac{du^j}{dt} \quad (133)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(u(t), v(t)) \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} + \frac{d^2 u^i}{dt^2} \right) \sigma_i(u(t), v(t)) \quad (134)$$

$$+ \left(\sum_{j,k=1}^2 h_{jk}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \mathbf{n}(u(t), v(t)) \quad (135)$$

$\implies \ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S$

$\iff \frac{d^2 u^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(u(t), v(t)) \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0$ は $u(t), v(t)$ に関する二階常微分方程式. 常微分

方程式の理論より, 以下は成立

Theorem 8.6. $\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ に対し, $\delta > 0$ を十分小さく取れば, S の測地線 $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, $\gamma(0) = \mathbf{p}, \dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$ をみたすものが一意に存在する

Theorem 8.7. ガウスの公式

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{li} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right) \quad (136)$$

$\sigma_{jk} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \sigma_i + h_{jk} \mathbf{n}$ に定理の式に代入したものをガウスの公式とよぶ

Proof.

$$\sigma_{jk} \cdot \sigma_l = \sum_i \Gamma_{jk}^i \sigma_i \cdot \sigma_l \quad (137)$$

$$= \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il} \quad (138)$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\sigma_j \cdot \sigma_l) \quad (139)$$

$$= \sigma_{jk} \cdot \sigma_l + \sigma_j \cdot \sigma_{lk} \quad (140)$$

$$= \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il} + \sum_i \Gamma_{lk}^i g_{ij} \quad (141)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} = \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il} + \sum_i \Gamma_{lj}^i g_{ik} & j \longleftrightarrow k \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = \sum_i \Gamma_{kl}^i g_{ij} + \sum_i \Gamma_{jl}^i g_{ik} & j \longleftrightarrow l \end{cases} \implies \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = 2 \sum_i \Gamma_{jk}^i g_{il}$$

g^{lm} をかけて l について和：

$$\sum_l g^{lm} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \right) = 2 \sum_{i,l} \Gamma_{jk}^i g_{il} g^{lm} \quad (142)$$

$$= 2 \sum_i \Gamma_{jk}^i \left(\sum_l g_{il} g^{lm} \right) \quad (143)$$

$\sum_l g_{il} g^{lm}$ は $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$ の (i, m) 成分だから、 δ_{im} とおくと

$$2 \sum_i \Gamma_{jk}^i \left(\sum_l g_{il} g^{lm} \right) = 2 \sum_i \Gamma_{jk}^i \delta_{im} = 2 \Gamma_{jk}^m \quad (144)$$

□

一般のリーマン計量 g に対しても、Thm8.7 で Γ_{jk}^i を定めることで、測地線概念を定義できる

9 共変微分と測地的曲率

S : 正則曲面, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を S 内の曲線とする

Definition 9.1. 接ベクトル場 C^∞ 写像 $X: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ が $X(t) \in T_{\gamma(t)}S, t \in I$ ををみたすとき, X を γ に沿う接ベクトル場とよぶ

Example 9.2. $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S$ より, $\dot{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ は γ に沿う接ベクトル場, $\mathbf{p} \in S, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tan} + \mathbf{v}_{nor}$ と分解できる ($\mathbf{v}_{tan} \in T_{\mathbf{p}}S, \mathbf{v}_{nor} \in (T_{\mathbf{p}}S)^\perp$). S の点 \mathbf{p} における単位法ベクトル \mathbf{n} を取れば, $\mathbf{v}_{nor} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \mathbf{v}_{tan} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$

Definition 9.3. 共変微分 γ に沿う接ベクトル場 X に対し, $\frac{DX}{dt}(t) := \left(\frac{dX}{dt}\right)_{tan} \in T_{\gamma(t)}S, t \in I$ と定める. これを X の共変微分とよび, X が γ に沿って平行 $\stackrel{def}{\iff} \frac{DX}{dt}(t) = 0, t \in I$

Example 9.4. $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = \ddot{\gamma}(t)_{tan}$ より, γ が S の測地線 $\iff \frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0, t \in I \iff \dot{\gamma}$ が γ に沿って平行

Example 9.5. $S = S^2(r), \gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ をとって, $X(t) = \dot{\gamma}(t) +$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ f(t) \end{pmatrix} \text{ とおくと, } X(t) \ni T_{\gamma(t)}S^2(r) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \middle| \xi \cos t + \eta \sin t = 0 \right\}$$

X は γ に沿う接ベクトル場であり, $\frac{DX}{dt} = \left(\dot{\gamma}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \right)_{tan} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ より, X が

平行 $\iff f$ は定数

以下, S が単位法ベクトル場 \mathbf{n} によって向きつけられており, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ は弧長パラメータ表示されていると仮定する

Definition 9.6. 測地的曲率

$\kappa_g(s) := \frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) (= \ddot{\gamma}(s)_{tan}), \kappa_n(s) := \ddot{\gamma}(s)_{nor}$ をそれぞれ γ の測地的曲率ベクトルと法曲率ベクトルとよぶ

Proposition 9.7. $\nu(s) = \mathbf{n}(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)$ とおくと, $\exists! K_g(s) \in \mathbb{R}, s.t. \kappa_g(s) = K_g(s) \nu(s)$

$\kappa_n(s) := K_n(s) \mathbf{n}(\gamma(s)), \kappa_n(s)$: 法曲率

Proof. $(\dot{\gamma}(s), \nu(s), \mathbf{n}(\gamma(s)))$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基底. 一方

$$1. \kappa_g(s) \in T_{\gamma(s)}S \text{ より, } \kappa_g(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s)) = 0$$

2.

$$\ddot{\gamma}(s) - \kappa_n(s) = \kappa_g(s) \cdot \dot{\gamma}(s) \tag{145}$$

$$= \ddot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) - \kappa_n(s) \cdot \dot{\gamma}(s) \tag{146}$$

$$= \ddot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) \tag{147}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 0 \tag{148}$$

よって

$$\kappa_g(s) = (\kappa_g(s) \cdot \dot{\gamma}(s)) \dot{\gamma}(s) + (\kappa_g(s) \cdot \nu(s)) \nu(s) + (\kappa_g(s) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s))) \mathbf{n}(\gamma(s)) \tag{149}$$

$$= (\kappa_g(s) \cdot \nu(s)) \nu(s) \tag{150}$$

□

Definition 9.8. 測地的曲率

$\kappa_g(s) := \kappa_g(s) \cdot \nu(s)$ を γ の測地的曲率とよぶ

一般のパラメータの場合では, $s = \int_x^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ は弧長パラメータ, $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|$ であるから

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \gamma \right) \quad (151)$$

$$= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \gamma \right) = \Delta \dot{\gamma} + \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^2} \ddot{\gamma} \quad (152)$$

$$\nu = \mathbf{n} \times \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \mathbf{n} \times \dot{\gamma}$$

$$\kappa_g = \kappa_g \cdot \nu \quad (153)$$

$$= \left(\frac{d^2\gamma}{ds^2} - \kappa_n \right) \cdot \nu \quad (154)$$

$$= \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot \nu \quad (155)$$

$$= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\gamma}) \quad (156)$$

$$= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \det \left(\frac{d^2\gamma}{ds^2} \quad \mathbf{n} \quad \dot{\gamma} \right) \quad (157)$$

$$= \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \left(\ddot{\gamma} \quad \mathbf{n} \quad \dot{\gamma} \right) \quad (158)$$

一般に, S 内の正則曲線 γ の測地的曲率は

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|^3} \det \left(\frac{d\gamma}{dt} \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} \quad \mathbf{n}(\gamma(t)) \right) \quad (159)$$

Proposition 9.9. S 内の正則曲線 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, 以下は同値

1. γ は測地線
2. $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$ は定数かつ $\kappa_g(t) \equiv 0$

Proof. (1) \implies (2)

γ は測地線であるから, $\|\dot{\gamma}(t)\|$ は定数であり, $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S$ より, $\ddot{\gamma}(t)$ は $\mathbf{n}(\gamma(t))$ のスカラー一倍である. よって, $\kappa_g(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \left(\dot{\gamma} \quad \ddot{\gamma} \quad \mathbf{n} \right) = 0$

(2) \implies (1)

$\det \left(\dot{\gamma} \quad \ddot{\gamma} \quad \mathbf{n} \right) = 0$ より, $\ddot{\gamma}(t) = \Delta \dot{\gamma}(t) + \square \mathbf{n}(\gamma(t))$, $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}S$ より, $\dot{\gamma}(t) \cdot \mathbf{n}(\gamma(t)) = 0$.

よって, $\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = \Delta \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 0 \implies \Delta = 0$

よって, $\ddot{\gamma}(t) = \square \mathbf{n}(\gamma(t)) \perp T_{\gamma(t)}S$ □

Example 9.10. $S = S^2(r)$ に $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \frac{1}{r} \mathbf{p}$ で向き付ける. $-r < h < r, \rho = \sqrt{r^2 - h^2}$ とし,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \rho \cos t \\ \rho \sin t \\ h \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -\rho \sin t \\ \rho \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \ddot{\gamma} = \begin{pmatrix} -\rho \cos t \\ -\rho \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{n}(\gamma(t)) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho \cos t \\ \rho \sin t \\ h \end{pmatrix}$$

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} & \ddot{\gamma} & \mathbf{n}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \quad (160)$$

$$= \frac{1}{r\rho^3} \begin{vmatrix} -\rho \sin t & -\rho \cos t & \rho \cos t \\ \rho \cos t & -\rho \sin t & \rho \sin t \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} \quad (161)$$

$$= \frac{h}{r\rho} \quad (162)$$

10 最短経路と測地線

(S, \mathbf{n}) : 向きつけられた正則曲面, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ とする

Example 10.1. 1. S : 平面のとき, 最短曲線は \mathbf{p}, \mathbf{q} を結ぶ直線である

2. $S = S^2(r)$ のとき, 最短曲線は \mathbf{p}, \mathbf{q} と原点を通る平面で S を切った円弧である

Remark 10.2. 最短曲線は存在するとは限らないし, 存在しても一つとは限らない

Example 10.3. 1. $\forall \mathbf{p} \in S = \{z = 0\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に対し, \mathbf{p} と $-\mathbf{p}$ を結ぶ最短曲線は存在しない

2. $S = S^2(r)$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$ とすると, \mathbf{p}, \mathbf{q} を結ぶ最短曲線は無数にある

以下, $\mathbf{x} = \gamma(s)$, $a \leq s \leq b$ を弧長パラメータ表示された S 内の曲線とし, $\gamma(a) = \mathbf{p}$, $\gamma(b) = \mathbf{q}$ とおく

Theorem 10.4. γ が \mathbf{p} と \mathbf{q} を結ぶ S 内の曲線の中で最短 $\implies \gamma$ は測地線

Definition 10.5. C^∞ 関数 $F: (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\lambda, s) \mapsto F(\lambda, s)$, $\epsilon > 0$ で次の条件を満たすものを γ の変分とよぶ

1. $F(\lambda, s) \in S, \forall \lambda, s$
2. $F(\lambda, a) \equiv \mathbf{p}, F(\lambda, b) \equiv \mathbf{q}$
3. $F(0, s) \equiv \gamma(s)$

λ を固定して, $\gamma_\lambda(s) = F(\lambda, s)$ とおくと, (1) より γ_λ は S 内の曲線で (2) より, $\gamma_\lambda(a) = \mathbf{p}, \gamma_\lambda(b) = \mathbf{q}$. 変分は曲線 γ の「滑らかな変形」を与える

Remark 10.6. 変分 F に対し

$$V_F(s) := \frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, s) \in T_{\gamma(s)}S \quad (163)$$

Proof. s を固定すると, $V_F(s)$ は S 内の曲線 $\lambda \mapsto F(\lambda, s)$ の $\lambda = 0$ における速度 □

Lemma 10.7. 定理の仮定の下で, γ の任意の変分 F に対し, $\int_a^b V_F(s) \cdot \kappa_g(s) ds = 0$

Proof. γ の最短性より, $L(s) := \int_a^b \|\dot{\gamma}_\lambda(s)\| ds$ は $\lambda = 0$ で最小値をとる. よって

$$0 = \frac{dL}{d\lambda}(0) \quad (164)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \int_a^b \|\dot{\gamma}_\lambda(s)\| ds \Big|_{\lambda=0} \quad (165)$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \int_a^b \sqrt{\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}} ds \Big|_{\lambda=0} \quad (166)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}} \Big|_{\lambda=0} ds \quad (167)$$

$$= \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right) \Big|_{\lambda=0}}{2 \sqrt{\frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial F}{\partial s}} \Big|_{\lambda=0}} ds \quad (168)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial s} (0, s) \cdot \frac{\partial F}{\partial s} (0, s) ds \quad (169)$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda} (0, s) \cdot \dot{\gamma}(s) \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \lambda} (0, s) \cdot \ddot{\gamma}(s) ds \quad (170)$$

$$= - \int_a^b V_F(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) ds \quad (171)$$

$V_F(s) \in T_{\gamma(s)}S$ より, $V_F(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) = V_F(s) + \kappa_g(s) \implies \int_a^b V_F(s) \cdot \kappa_g(s) ds = 0$ \square

Lemma 10.8. $\forall s_0 \in (a, b), \gamma$ の変分 F と C^∞ 関数 $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たすものが存在

1. $V_F(s) = h(s) \kappa_g(s), a \leq s \leq b$

2. $h(s) \geq 0, h(s_0) > 0$

これを一旦認めて定理を示す

補題のような F に対し, 前の補題より $0 = \int_a^b V_F(s) \cdot \kappa_g(s) ds = \int_a^b h(s) \|\kappa_g(s)\|^2 ds$ から, $h(s) \|\kappa_g(s)\|^2 \equiv 0$. $h(s_0) > 0$ より, $\kappa_g(s) = 0$. s_0 は任意にとるから, $\kappa_g \equiv 0 \implies \gamma$ は測地線

補題の証明. $\gamma(s_0)$ の周りの局所パラメータ表示 $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ を取り, $\gamma(s) \in \sigma(D)$ となる. s に対し

$$\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s)) \quad (172)$$

$$\kappa_g(s) = \xi(s) \sigma_u(u(s), v(s)) + \eta(s) \sigma_v(u(s), v(s)) \quad (173)$$

と表す. $\rho > 0, \epsilon > 0$ を $\gamma(s) \in \sigma(D), \left(\begin{array}{c} u(s) + \lambda \xi(s) \\ v(s) + \lambda \eta(s) \end{array} \right) \in D, (|s - s_0| \leq \rho, |\lambda| \leq \epsilon)$ をみたすようにとり, h, F を次のように定めればよい

$$h(s) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{(s - s_0)^2 - \rho^2}\right) & |s - s_0| < \rho \\ 0 & |s - s_0| \geq \rho \end{cases} \quad (174)$$

$$F(\lambda, s) = \begin{cases} \sigma(u(s) + \lambda h(s) \xi(s), v(s) + \lambda h(s) \eta(s)) & |s - s_0| < \rho \\ \gamma(s) & |s - s_0| \geq \rho \end{cases} \quad (175)$$

$$V_F(s) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, s) = \begin{cases} \sigma_u(u(s), v(s)) h(s) \xi(s) + \sigma_v(u(s), v(s)) h(s) \eta(s) & |s - s_0| < \rho \\ 0 & |s - s_0| \geq \rho \end{cases}$$

$$\implies V_F(s) = \begin{cases} h(s) \kappa_g(s) & |s - s_0| < \rho \\ h(s) \kappa_g(s) & |s - s_0| \geq \rho \end{cases}$$

□

11 ホップの回転角定理

$D \subset \mathbb{R}^2$: 開集合, $g: D$ 上のリーマン計量とする. $(\xi, \eta)_{\mathbf{q}} = g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in T_{\mathbf{q}}D$, $\|\xi\|_{\mathbf{q}} = \sqrt{(\xi, \xi)_{\mathbf{q}}}$ と書く. 各 $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D$ に対し, $\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\partial_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_{\mathbf{q}}D$ を $g_{\mathbf{q}}$ について正規直交化したものを $\epsilon_1(\mathbf{q}), \epsilon_2(\mathbf{q})$ とおく

Proposition 11.1. $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ を C^∞ 曲線. $\xi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C^∞ 写像で, $\xi(t) \neq 0, (t \in [a, b])$ とすると

$$\frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|} = (\cos(\phi(t)))\epsilon_1(\gamma(t)) + (\sin(\phi(t)))\epsilon_2(\gamma(t)), \quad (a \leq t \leq b) \quad (176)$$

をみたく C^∞ 関数 $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する

Proof.

$$\text{RHS} = \begin{pmatrix} \epsilon_1(\gamma(t)) & \epsilon_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (177)$$

よって, 条件は

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1(\gamma(t)) & \epsilon_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}^{-1} \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|} = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix} \quad (178)$$

左側は単位円周上を動く C^∞ 関数であるから, 条件を満たす C^∞ 関数 ϕ を取ればいい \square

γ が正則曲線なら, $\xi(t) := \dot{\gamma}(t)$ は仮定をみたく. このときの ϕ を γ の接角とよぶ. また, ϕ は $+2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ の任意性を除き一意

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を区分的に正則な単純閉曲線とし, $\Omega: \gamma$ で囲まれた領域とし, γ は Ω を左手に見る向きで $\bar{\Omega} \subset D$ と仮定する. $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ を $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ が正則であるようにとる. $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を γ_i の接角とし, $\gamma(t_i)$ における外角 $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ を $\phi_{i+1}(t_i) - \phi_i(t_i) - \theta_i \in 2\pi\mathbb{Z}$ となるように定める. γ が $t = t_i$ で滑らか ($\dot{\gamma}_i(t_i) = \dot{\gamma}_{i+1}(t_i)$) なら $\theta_i = 0$

Theorem 11.2. ホップ

$$\sum_{i=1}^N (\phi_i(t_i) - \phi_i(t_{i-1}) + \theta_i) = 2\pi \quad (179)$$

左辺を $\text{Rot}_g(\gamma)$ とおき, γ の回転角とよぶ

Example 11.3. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とし, g : ユークリッド計量とする. $N =$

$1, 0 = t_0 < t_1 = 2\pi$. $\epsilon_1 = \partial_1, \epsilon_2 = \partial_2, \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$ で, $\phi(t) = t + \frac{\pi}{2}$ は接角, $\text{Rot}_g(\gamma) = \gamma(t_1) - \gamma(t_0) = 2\pi$

Lemma 11.4. $\text{Rot}_g(\gamma) = \text{Rot}_{g^0}(\gamma), g^0$: ユークリッド計量

Proof. 定義から, $\phi_i(t_i) - \phi_{i+1}(t_i) + \theta_i \in 2\pi\mathbb{Z}$. これを足し上げると, $\text{Rot}_g(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$. また, $\text{Rot}_g(\gamma)$ は各 ϕ_i の取り方にはよらない, $g^s = (1-s)g^0 + sg$, $s \in [0, 1]$ とおくと, g^s もリーマン計量で, $\text{Rot}_{g^s}(\gamma)$ は s について連続. 一方, $\text{Rot}_{g^s}(\gamma) \in 2\pi\mathbb{Z}$ であるから, Rot_{g^s} は s について定数で, $\text{Rot}_g(\gamma) = \text{Rot}_{g^0}(\gamma)$. よって, $g = g^0$ と仮定すればいい \square

Lemma 11.5. $\text{Rot}_g(\gamma)$ は分割, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ を細かくしても変わらない

Proof. 例えば $t_{i-1} < c < t_i$ でさらに分割しても, $\gamma(c)$ での外角は 0 で, $\phi_i(t_i) - \phi_i(t_{i-1}) = (\phi_i(t_i) - \phi_i(c)) + (\phi_i(c) - \phi_i(t_{i-1}))$ \square

Lemma 11.6. $\text{Rot}_g(\gamma)$ は始点を他の分割点にしても変わらない

Proof. 添字 i が巡回置換されるだけ \square

Hopf-Umlaufsatz 定理の証明. 補題 2, 3 より, $\theta_N = 0$ (始点で滑らか) と仮定してよい. 分割を十分細かく取り, γ を滑らかに近似する $\tilde{\gamma}$ を作り, $\tilde{\phi}$ を $\tilde{\gamma}$ の接角とする. $\tilde{\phi}(t_{i+1}) - \tilde{\phi}(t_{i-1}) \simeq \theta_i \simeq \phi_{i+1}(t_{i+1}) - \phi_i(t_{i-1})$ から, $2\pi\mathbb{Z} \ni \text{Rot}_g(\gamma) \simeq \text{Rot}_g(\tilde{\gamma}) \in 2\pi\mathbb{Z}$ で, $\text{Rot}_g(\gamma) = \text{Rot}_g(\tilde{\gamma}) = \tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(a)$. $\tilde{\gamma}$ を円に連続変形すると, $\tilde{\phi}$ も連続的に変化するから, $\text{Rot}_g(\gamma) = \text{Rot}_g(\text{円}) = 2\pi$ \square

12 ガウス・ボンネの定理

$(S, \kappa) : \mathbb{R}^3$ 内の向きつけられた正則曲面, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$: 正の向きの局所パラメータ表示, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 三つの正則曲線をつなげた単純閉曲線で囲まれた領域. $\Omega \subset D$ であるとき, $\Delta = \sigma(\Omega)$ を S の三角性によぶ. 頂点を S の表側から見て反時計回りに A, B, C とするとき, 三辺を AB, BC, CA を表し, Δ を ΔABC と表す. また, 内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ を接線のなす角で定める. AB, BC, CA の弧長パラメータ表示 $x_i = \gamma_i(s), (a_i \leq s \leq b_i, i = 1, 2, 3)$ をとり, $\bar{\gamma}_i : [a_i, b_i] \rightarrow D$ を $\gamma_i(s) = \sigma(\bar{\gamma}_i(s))$ で定める. $\kappa_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ を γ_i の測地的曲率とする

Theorem 12.1. 三角形に対するガウス・ボンネの定理

$$\iint_{\Delta ABC} KDA + \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \kappa_i(s) ds = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \quad (180)$$

Proof. g を σ が定める D 上のリーマン計量 g^σ とする. $g_{\mathbf{q}}(\xi, \eta) = (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\xi) \cdot (d\sigma)_{\mathbf{q}}(\eta)$. $\bar{\gamma}_i$ の g に関する接角 ϕ_i をとり, θ_i を Ω の $\bar{\gamma}_i(b_i)$ における (g に関する) 外角とする

$$d\sigma_{\bar{\gamma}_i(s)}(\bar{\gamma}'_i(s)) = \frac{du}{ds} \sigma_u(\bar{\gamma}_i(s)) + \frac{dv}{ds} \sigma_v(\bar{\gamma}_i(s)) = \gamma'_i(s) \quad (181)$$

$$\bar{\gamma}_i(s) = \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \quad (182)$$

$$d\sigma_{\bar{\gamma}_i(s)}(\epsilon_1) = d\sigma_{\bar{\gamma}_i(s)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \sigma_u(\bar{\gamma}_i(s)) + 0 \cdot \sigma_v(\bar{\gamma}_i(s)) \quad (183)$$

$$= \sigma_u(\bar{\gamma}_i(s)) \quad (184)$$

よって, $\phi_i(s)$ は接空間 $T_{\gamma_i(s)}S$ における $\sigma_u(\bar{\gamma}_i(s))$ から $\gamma'_i(s)$ への角で, θ_i は $T_{\gamma_i(b_i)}S$ における $\gamma'_i(b_i)$ から $\gamma'_{i+1}(a_{i+1})$ への角 $= \pi - \angle \gamma_i(b_i)$ である. よって

$$2\pi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \sum_{i=1}^3 (\phi_i(b_i) - \phi_i(a_i)) \quad (185)$$

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \sum_{i=1}^3 (\phi_i(b_i) - \phi_i(a_i)) \quad (186)$$

$$\phi_i(b_i) - \phi_i(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} \phi'_i(s) ds \quad (187)$$

$\phi'_i(s)$ を計算する. 以下, 添え字を一時省略する. $(\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$ を σ に付随する動標構とし, $\mathbf{e}_j(s) = \mathbf{e}_j(\bar{\gamma}(s))$ とおくと

$$\gamma'(s) = \cos(\phi(s))\mathbf{e}_1(s) + \sin(\phi(s))\mathbf{e}_2(s) \quad (188)$$

$\gamma'(s)$ は $\mathbf{e}_1(s)$ を角 $\phi_i(s)$ で回転移動したベクトルであるから

$$\gamma''(s) = -\phi'(s) \sin(\phi(s))\mathbf{e}_1(s) + \cos(\phi(s))\mathbf{e}'_1(s) \quad (189)$$

$$+ \phi'(s) \cos(\phi(s))\mathbf{e}_2(s) + \sin(\phi(s))\mathbf{e}'_2(s) \quad (190)$$

$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \delta_{ij}$ より, $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = 0$. よって

$$\gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = -\phi'(s) \sin(\phi(s)) + \sin(\phi(s)) (\mathbf{e}'_2(s) \cdot \mathbf{e}_1(s)) \quad (191)$$

$$\gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) = \phi'(s) \cos(\phi(s)) + \cos(\phi(s)) (\mathbf{e}'_1(s) \cdot \mathbf{e}_2(s)) \quad (192)$$

整理すると,
$$\begin{cases} \gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = (-\phi'(s) + \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1) \sin(\phi(s)) \\ \gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) = (\phi'(s) - \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1) \cos(\phi(s)) \end{cases} \quad \text{一方}$$

$$\gamma''(s) = \kappa(s) \nu(s) + \mathbf{n}(\gamma(s)) \quad (193)$$

$$\nu(s) = \mathbf{n}(\gamma(s)) \times \gamma'(s) \quad (194)$$

$$= -\sin(\phi(s))\mathbf{e}_1(s) + \cos(\phi(s))\mathbf{e}_2(s) \quad (195)$$

より,
$$\begin{cases} \gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_1(s) = -\kappa(s) \sin(\phi(s)) \\ \gamma''(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) = \kappa(s) \cos(\phi(s)) \end{cases}$$

以上より,
$$\begin{cases} (\kappa(s) - \phi'(s) + \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1) \sin(\phi(s)) = 0 \\ (\kappa(s) - \phi'(s) + \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1) \cos(\phi(s)) = 0 \end{cases} \implies \kappa(s) = \phi'(s) - \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1. \quad \text{よって}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \phi'_i(s) ds \quad (196)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \left(\kappa_i(s) + \frac{d\mathbf{e}_2(\bar{\gamma}_i(s))}{ds} \cdot \mathbf{e}_1(\bar{\gamma}_i(s)) \right) ds \quad (197)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \kappa_i(s) ds + \int_{\partial\Omega} \frac{d\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\omega_2^1} \quad (198)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \kappa_i(s) ds + \iint_{\Omega} \quad (199)$$

$$\mathit{mathrm}d\omega_2^1 \quad (200)$$

また

$$d\omega_2^1 = K \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv \quad (201)$$

$$= K \|\sigma_u \times \sigma_v\| du \wedge dv \quad (202)$$

よって,
$$\iint_{\Omega} d\omega_2^1 = \iint_{\Delta} K dA \quad \square$$

Definition 12.2. 測地三角形

$\triangle ABC$ が測地三角形 $\stackrel{def}{\iff} AB, BC, CA$ が弧長パラメータ表示に関する測地線である

Theorem 12.3. 測地三角形に対するガウス・ボンネの定理

測地三角形 $\triangle ABC$ に対し

$$\iint_{\triangle ABC} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \quad (203)$$

参考文献