Contents

0

0.1

(1)

$\sup{(0,2]} = 2$

(2)

$\sup{(0,2)} = 2$

(3)

$\inf{\left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}} = 0$

(4)

$\inf{\{n | n \in \mathbb{Z}_{>0}\}} = 1$

(5)

$\inf{\{x | x \in \mathbb{R}_{>0}\}} = 0$

(6)

$\sup{\left\{e^{-\frac{1}{x}}\middle| x > 0\right\}} = 1$

0.2

(1)

$\beta < \infty, \beta = \min{\{k | S \subset (-\infty, k]\}}$ なので、$\forall \epsilon > 0, S \not\subset (-\infty, \beta - \epsilon] \implies \exists s \in S, s.t. s \notin (-\infty, \beta - \epsilon]$. つまり $\exists s \in S, s.t. \beta - \epsilon < \epsilon \leq \beta$. 一方、$S \subset (-\infty, \beta]$ であるから、$s \in S \subset (-\infty, \beta] \iff s \in (-\infty, \beta]$. よって、$\exists s \in S, \beta - \epsilon < s \leq \beta$

(2)

$\beta = \infty \iff S$ が上に有界ではない $\iff \neg(\exists k \in \mathbb{R}, s.t. S \subset (-\infty, k]) \iff \forall k \in \mathbb{R}, S \not\subset (-\infty, k] \iff \forall k \in \mathbb{R}, \exists s \in S, s.t. s \notin (-\infty, k]$. $k = M$ とすると、$\exists s \in S, s > M$

(3)

$\beta < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists s \in S, s.t. \beta - \dfrac{1}{n} < s \leq \beta$ で、この s を s_n とおくと、$\beta - \dfrac{1}{n} < s_n \leq \beta$ となり、$n \to \infty$ とすると、$\lim\limits_{n \to \infty} s_n \leq \beta$

$\beta = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists s \in S, s.t. s > n = M$. この s を s_n とおくと、$\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$

(4)

$S \subset S'$ のとき、$\beta < \infty$ ならば、$\beta = \min\{k|S \subset (-\infty, k]\} \leq \{k|S' \subset (-\infty, k]\} = \beta'$. $\beta = \infty$ のとき、S' も上に有界でないので、$\beta' = \infty$

(5)

$\beta' \leq \beta$ とする. $S \subset S' \cup S$ なので $\sup(S \cup S') \geq \beta = \max\{\beta, \beta'\}$. 一方で $\beta < \infty$ のとき $S \subset (-\infty, \beta], S' \subset (-\infty, \beta]$. したがって、$S \cup S' \subset (-\infty, \beta], \therefore \sup(S \cup S') \leq \beta = \max\{\beta, \beta'\}$

0.3

(1)

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \emptyset \subset [a, b] \subset \begin{cases} [a, \infty) \\ (-\infty, b] \end{cases}$ があるから、$\{a \in \mathbb{R}|\emptyset \subset [a, \infty)\} = \{a|a \in \mathbb{R}\} = \{b \in \mathbb{R}|\emptyset \subset (-\infty, b]\} = \{b|b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

(2)

(1) より、$\inf\emptyset = \max\{a|a$ は $\emptyset$ の下界$\} = \max\mathbb{R} = \infty, \sup\emptyset = \min\{b|b$ は $\emptyset$ の上界$\} = \min\mathbb{R} = -\infty$

0.4

(1)

$(a - \epsilon, a + \epsilon)$

(2)

$x \in (1, 2)$ とする. $\epsilon := \dfrac{1}{2}\min\{x - 1, 2 - x\} > 0$ と取れば $B(x, \epsilon) \subset (1, 2]$

(3)

開集合ではない
$0 \in [0, 1)$ である. $\forall\epsilon > 0, B(0, \epsilon) \not\subset [0, 1)$ であるので、$[0, 1)$ は開集合ではない

(4)

$[-1, 1] \subset \overline{[-1, 1]}$ は明らかに成立するので、以下は $\overline{[-1, 1]} \subset [-1, 1]$ を示す. $x \in \overline{[-1, 1]}$ とすると $\forall\epsilon > 0, (x - \epsilon, x + \epsilon) = B(x, \epsilon) \cap [-1, 1] \neq \emptyset$ であるから、$x + \epsilon \geq -1, x - \epsilon \leq 1$. つまり $-1 - \epsilon \leq x \leq 1 + \epsilon$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して成立するので、$-1 \leq x \leq 1$

0.5

(1)

$f^{-1}((0, 1)) = \{x \in [0, 2\pi]|\sin x \in (0, 1)\} = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

(2)

$(0,1]$

(3),(4)

$x_0 \in f^{-1}(I)$ とおくと、$f(x_0) \in I$、I は開区間なので、$\exists \epsilon_0 > 0, s.t. B_1(f(x_0), \epsilon_0) \subset I$. つまり、$(f(x_0) - \epsilon_0, f(x_0) + \epsilon_0) \subset I$. 一方で、$f$ は $[0, 2\pi)$ 上連続なので、$\exists \delta_0 > 0, s.t. \forall x \in [0, 2\pi), |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_0$ となるので、$\{x \in [0, 2\pi) : |x - x_0| < \delta_0\} \subset f^{-1}(I)$

0.6

$\Longrightarrow$

$\{a_n\}$ を $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A \\ a := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ とすると、$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall j \geq N, |a_j - a| < \epsilon$. つまり $a_j \in A \cap B(a, \epsilon)$. したがって $A \cap B(a, \epsilon) \neq \emptyset$、$a \in \overline{A} = A$

$\Longleftarrow$

$a \in \overline{A}$ とする. このとき、$\forall j \in \mathbb{N}, B\left(a, \frac{1}{j}\right) \cap A \neq \emptyset$ より、$\exists a_j \in B\left(a, \frac{1}{j}\right) \cap A$ となる. このとき $\lim_{j\to\infty} a_j = a \in A$

1

1.1

$(D1)$ と $(D2)$ は明らかに成立するから、ここで $(D3)$ だけ示す

$(d_E(x,z))^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2 = \sum_{j=1}^{n}((x_j - y_j) + (y_j - z_j))^2$

$= \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 + 2\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^{n}(y_j - z_j)^2$

$\leq \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{2}(y_j - z_j)^2\right)} + \sum_{j=1}^{n}(y_j - z_j)^2$

$= (d_E(x,y))^2 + 2d_E(x,y)\,d_E(y,z) + (d_E(y,z))^2 = (d_E(x,y) + d_E(y,z))^2$

1.2

$(D1)$ と $(D2)$ は明らかに成立するから、ここで $(D3)$ だけ示す

$d_1^{(n)}(x,z) = \sum_{j=1}^{n}|(x_j - y_j) + (y_j - z_j)| \leq \sum_{j=1}^{n}(|x_j - y_j| + |y_j - z_j|) = d_1^{(n)}(x,y) + d_1^{(n)}(y,z)$

1.3

$d_\infty^{(n)}(x,z) = \max_j\{|(x_j - y_j) + (y_j - z_j)|\} \leq \max_j\{|x_j - y_j| + |y_j - z_j|\} \leq \max_j|x_j - y_j| + \max_j|y_j - z_j| = d_\infty^{(n)}(x,y) + d_\infty^{(n)}(y,z)$

1.4

$x, y, z \in X$ を以下のように分ける

$(1)x = y = z, (2-1)x = y \neq z, (2-2)x = z \neq y, (2-3)x \neq y = z, (3)x \neq y \neq z$

	(1)	(2-1)	(2-2)	(2-3)	3
d(x,z)	0	0	1	1	1
d(x,y)	0	1	1	0	1
d(y,z)	0	1	1	0	1

1.5

(1)

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$
$$(a+b)(1+a)(1+b) \leq a(1+a+b)(1+b) + b(1+a+b)(1+a)$$
$$a(1+a)(1+b) + b(1+a)(1+b) \leq a(1+a)(1+b) + b(1+a)(1+b) + ab(2+a+b)$$
$$0 \leq ab(2+a+b)$$

(2)

$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ から、f が単調増加である

(3)

$$\widetilde{d}(x,z)=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\leq\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\leq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}=\widetilde{d}(x,y)+\widetilde{d}(y,z)$$

1.6

$d_\infty\left((x_n)_n,(z_n)_n\right)=\sup\left|(x_n-y_n)-(y_n-z_n)\right|$
$\leq\sup\left(|x_n-y_n|-|y_n-z_n|\right)\leq\sup|x_n-y_n|-\sup|y_n-z_n|$

1.7

$(D3)$ は同様
$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|=0$ とすると、$\forall x\in[0,1]\ f(x)-g(x)=0\Longrightarrow f=g$

2

2.1

(1)

$(a,b) \in A$ とする．$N\left((a,b), \frac{a}{2}\right) \subset A$ から A は開集合である

(2)

$\overline{A} = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \geq 0 \right\}$

(3)

B が開集合でない $\iff \exists (a,b) \in B, s.t. \forall \epsilon > 0, N((a,b), \epsilon) \not\subset B$
$\iff \exists (a,b) \in B, s.t. \forall \epsilon > -, \exists (c,d) \in N((a,b), \epsilon), s.t. (c,d) \notin B$
$(1,0) \in B$ であるが $\forall \epsilon > 0, N((1,0), \epsilon) \not\subset B$ である

(4)

$B^i = \emptyset, \overline{B} = \{(x,0) | x \geq 0\}$

2.2

$\mathbb{Q}^i = \emptyset, \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
証明は稠密性から自明

2.3

(1)

$f \in \overline{A}$ とする．このとき $\forall \epsilon > 0, N(f, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$、よって $\exists g \in N(f, \epsilon) \cap A$ であり、$g \in A$ で $d_\infty(f,g) < \epsilon$．このとき $f(x) = g(x) + (f(x) - g(x)) \geq g(x) - \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$．両辺に $[0,1]$ での最小値をとると $\min_x f(x) \geq \min_x g(x) - \sup |f(x) - g(x)| \geq -\epsilon$．$\epsilon > 0$ の任意性より、$\min f(x) \geq 0$、$\therefore f \in A$

(2)

$f \in B$ とすると、$\exists c > 0, s.t. \min f(x) = c$．このとき、$g \in N\left(f, \frac{c}{2}\right)$ とすれば $x \in [0,1]$、
$g(x) \geq f(x) + (g(x) - f(x)) \geq f(x) - \sup |f(x) - g(x)|$
$\min g(x) \geq \min f(x) - \sup |f(x) - g(x)| > c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c > 0$、よって $g \in B, N\left(f, \frac{1}{2}c\right) \subset B$

2.4

(1)

定義より $\emptyset, X \in \mathcal{O}_d$

(2)

$O_1, O_2, \cdots, O_n \in \mathcal{O}_d$ とする．$\bigcap_{k=1}^{n} O_k = \emptyset$ ならば開集合．$\bigcap_{k=1}^{n} O_k \neq \emptyset$ のときは $x \in \bigcap_{k=1}^{n} O_k$ とすると、$\exists \{\epsilon_k\}_{k=1}^{n}$：正の数列、$s.t. N(x, \epsilon_k) \subset O_k$．ここで、$\epsilon_0 := \min\{\epsilon_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ とおくと $N(x, \epsilon_0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} O_k$ となり、$\bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{O}_d$

(3)

$O_\lambda \in \mathcal{O}_d, x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とすると $\exists \lambda_0 \in \Lambda, s.t. x \in O_{\lambda_0}$
$\exists \epsilon > 0, s.t. N(x, \epsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ なので、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$：開集合

2.5

(1)

$$N(x, \epsilon) = \begin{cases} x & \epsilon > 1 \\ \{x\} & 0 < \epsilon < 1 \end{cases}$$

(2)

$x \in A$ とし $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ とすると $N\left(x, \dfrac{1}{2}\right) = \{x\} \subset A$

(3)

$x \in \overline{A}$ とする．$\forall \epsilon > 0, A \cap N(x, \epsilon) \neq \emptyset$．$\epsilon = \dfrac{1}{2}$ とすると、$N(x, \epsilon) = \{x\} \cap A \neq \emptyset$ より $x \in A$.
よって、A は閉集合である

2.6

$x \notin A^c \Longrightarrow x \notin \overline{A^c}$ と示せばいいで $X \notin \overline{A^c} \iff \exists \epsilon < 0, s.t. N(x, \epsilon) \cap A^c = \emptyset \iff \exists \epsilon > 0, s.t. N(x, \epsilon) \subset A \iff x \in A^i$
$\iff x \notin \overline{A^c} \Longrightarrow x \in A \iff \forall \epsilon > 0, N(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow x \in A \iff \forall \epsilon > 0, N(x, \epsilon) \not\subset A^c \Longrightarrow x \in A \iff x \notin (A^c)^i \Longrightarrow x \notin A^c \iff x \in A^c \Longrightarrow x \in (A^c)^i \iff A^c : open$
よって $A : open \Longrightarrow A^c : closed$ で逆方向の証明は逆方向であるから略

3

3.1

$(1) \Longrightarrow (2)$

(1) は $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t. x \in X, d_X(x,a) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$
よって、$x \in N(a,\delta) \Longrightarrow f(x) \in N(f(a),\epsilon) \iff x \in f^{-1}(N(f(a),\epsilon))$
$\therefore N(a,\delta) \subset f^{-1}(N(f(a),\epsilon))$

$(2) \Longrightarrow (3)$

$d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon$ より、$a \in f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$ であり、(2) から、$\exists\delta > 0, s.t. N_X(a,\delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$、$\therefore a$ は $f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$ の内点

$(3) \Longrightarrow (4)$

$M \in N_Y(f(a))$ とすると $\exists\epsilon > 0, N_Y(f(a),\epsilon) \subset M$. このとき、$f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon)) \subset f^{-1}(M)^i$、(3) から $a \in f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$ なので、$a \in f^{-1}(M)^i, f^{-1}(M) \in N_X(a)$

$(4) \Longrightarrow (1)$

$f(a) \in N_Y(f(a),\epsilon)^i = N_Y(f(a),\epsilon)$ より、$N_Y(f(a),\epsilon) \in N_Y(f(a))$ なので (4) より $f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon)) \in N_X(a)$. つまり $a \in f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$

3.2

$(1) \Longrightarrow (2)$

$A \subset X, b \in f\left(\overline{A}\right)$ とすると $\exists a \in \overline{A}, s.t. b = f(a), \forall\epsilon > 0, N_Y(a,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$、(1) から f は $x = a$ で連続なので、3.2 の (2) より $N(a,\epsilon) \subset f^{-1}(N_Y(f(a),\epsilon))$ なので $f^{-1}(N_Y(b,\epsilon)) \cap A \neq \emptyset$、したがって、$x \in f^{-1}(N_Y(b,\epsilon)) \cap A$ とすると $f(x) \in N_Y(b,\epsilon)$ かつ $x \in A$. したがって、$N_Y(b,\epsilon) \cap f(A) \neq \emptyset, \therefore \emptyset \in \overline{f(A)}$

$(2) \Longrightarrow (1)$

$Y \supset F : closed$ とおくと、$f^{-1}(Y) \subset X$ なので (2) から $f\left(\overline{f^{-1}(Y)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$.
したがって、$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ となり、$f^{-1}(F)$ は閉である. 以下は f の連続性を示す
$O \subset Y, O : open$ とし、2.6 から $O^c : closed$ なので $f^{-1}(O^c)$ は閉で、$f^{-1}(O^c) = \{x \in X | f(x) \in O^c\} = \{x \in X | f(x) \in O\}^c = \left\{f^{-1}(O)\right\}^c$. よって $\left\{f^{-1}(O)\right\}^c$ は閉で $f^{-1}(O)$ は開であるから f は連続である

3.3

(1)

$d_\infty(f,f_0)<\delta, G=\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ とすると $\delta:=\dfrac{\epsilon}{G}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
|l_g(f)-l_g(f_0)| &= \left|\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^1 (f(t)-f_0(t))\,g(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f(t)-f_0(t)|\,g(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-f_0(t)|\,g(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \delta g(t)\,\mathrm{d}t<\epsilon
\end{aligned}
$$

(2)

$d_\infty(f,g)<\delta:=\epsilon$ とすれば

$$
\begin{aligned}
d_\infty(T(f),T(g)) &= \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]}\int_0^x |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x \|f-g\|_\infty\,\mathrm{d}t = x\cdot\|f-g\|_\infty \\
&\leq \|f-g\|_\infty = d_\infty(f,g)<\epsilon
\end{aligned}
$$

(3)

$M:=\max\{f(t),g(t)\},\delta:=\dfrac{\epsilon}{2M+1}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
d_\infty(D(f),D(g)) &= \sup_{x\in[0,1]}\left|f(0)-g(0)+\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]}|f(0)-g(0)|+\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)^2\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\cdot\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&< \delta+\delta\cdot 2M=(2M+1)\,\delta<\epsilon
\end{aligned}
$$

3.4

(1)

$f:X\to Y$ が *Lipschitz* 連続であるから、$\exists k, s.t.\forall a,b\in X, d_Y(f(a),f(b))\leq Kd_X(a,b)$．ここで $d_X(a,b)<\delta:=\dfrac{\epsilon}{K}$ とすると、$d_Y(f(a),f(b))\leq Kd_X(a,b)<K\dfrac{\epsilon}{K}=\epsilon$ だから、f は一様連続

(2)

f は一様連続であるから、$\forall x, y \in X, \exists \delta, s.t. \forall d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. 言い換えれば $y = x_0$ を固定すれば任意の $x_0 \in X$ に対して連続であり、x_0 の任意性より f は連続である

4

4.1

$\subset$

$x \in \{x \in X | \forall O \in \mathcal{O}, [x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset]\}$ とする．$F \in \mathcal{F}$ に対し、$F^c \in \mathcal{O}$ となるから、$\exists O \in \mathcal{O}, s.t. F^c = O \in \mathcal{O}, x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset$ より $x \in F^c \Longrightarrow F^c \cap A \neq \emptyset$ があるので、これの対偶をとると $F^c \cap A = \emptyset \Longrightarrow x \notin F^c$ である．$A \subset F$ のとき、$F^c \cap A = \emptyset$ なので、$x \notin F^c \iff x \in F$．よって $\forall F \in \mathcal{F}, A \subset F, x \notin F^c \Longrightarrow x \in F$ より $x \in \bigcap \{F \in \mathcal{F} | A \subset F\}$

$\supset$

$x \in \bigcap \{F \in \mathcal{F} | A \subset F\}$ とする、$O \in \mathcal{O}$ に対し、$O^c \in \mathcal{F}$ なので $A \subset O^c \Longrightarrow x \in O^c$ である．したがって、$A \cap O = \emptyset \Longrightarrow A \subset O^c \Longrightarrow x \in O^c$．これの対偶から $x \in O \Longrightarrow A \cap O \neq \emptyset$

4.2

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 = \{\emptyset, X\} \\ \mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\} \\ \mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{2\}, X\} \\ \mathcal{O}_4 = \mathcal{P}(X) \end{cases}$$

4.3

(1)

$X \notin \mathcal{O}_1, \emptyset \notin \mathcal{O}_2$ から、(O_1) が満たされていない
$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{O}_3$ から、(O_2) が満たされていない
$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{O}_4$ から、(O_3) が満たされていない

(2)

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_1 \cup X \\ \widetilde{\mathcal{O}}_2 = \mathcal{O}_2 \cup \emptyset \\ \widetilde{\mathcal{O}}_3 = \mathcal{O}_3 \cup \{2\} \\ \widetilde{\mathcal{O}}_4 = \mathcal{O}_4 \cup \{1,2\} \end{cases}$$

4.4

(1)

$\mathcal{O}_1$

$(O1)$ $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{O}_1$

$(O2)$ $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_1, O_1, O_2 \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ のとき自明であるから、任意の O_1, O_2 に対して $O_1, O_2 \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ とする．$O_1 := (-\infty, a_1), O_2 := (-\infty, a_2)$ とし、対称性より $a_1 \leq a_2$ とすると、$O_1 \cap O_2 = O_1 \in \mathcal{O}_1$

$(O3)$ $(-\infty, a_i) \in \mathcal{O}_1, i \in I$ とすると、$\bigcup_{i \in I} (-\infty, a_i) = \left(-\infty, \max_{i \in I} \{a_i\}\right) \in \mathcal{O}_1$

$\mathcal{O}_2$

(O_1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{O}_2$

(O_1) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_2, O_1 := [-n_1, n_1], [-n_2, n_2]$ とし、対称性より $n_1 \leq n_2$ とすると $O_1 \cap O_2 = O_1 \in \mathcal{O}_2$

(O_1) $[-n_i, n_i] \in \mathcal{O}_2, i \in I$ とすると

$$\bigcup_{i \in I} [-n_i, n_i] = \left[-\max_{i \in I} \{n_i\}, \max_{i \in I} \{n_i\}\right] = \begin{cases} \mathbb{R} & \max_{i \in I} \{n_i\} = \infty \\ \left[-\max_{i \in I} \{n_i\}, \max_{i \in I} \{n_i\}\right] & \max_{i \in I} \{n_i\} < \infty \end{cases}$$

から $\bigcup_{i \in I} [-n_i, n_i] \in \mathcal{O}_2$

(2)

$\mathcal{F}_1 = \{O^c | O \in \mathcal{O}_1\} = \{[a, +\infty) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$
$\mathcal{F}_2 = \{O^c | O \in \mathcal{O}_2\} = \{(-\infty, -n) \cup (n, \infty) | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

(3)

$A_1^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset A_1\}$ であるが、これをみたす $O \in \mathcal{O}_1$ は存在しないから、$A_1^i = \emptyset$
$\overline{A}_1 = \bigcap \{F \in \mathcal{F}_1 | A_1 \subset F\} = [-3, +\infty)$
$A_2^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O}_2 | O \subset A_2\} = \emptyset$
$\overline{A}_2 = \bigcap \{F \in \mathcal{F}_2 | A_2 \subset F\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(4)

$B_1^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset B_1\} = \emptyset$
$\overline{B}_1 = \bigcap \{F \in \mathcal{F}_1 | B_1 \subset F\} = [-3, +\infty]$
$B_2^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O}_2 | O \subset B_2\} = [-1, 1]$
$\overline{B}_2 = \bigcap \{F \in \mathcal{F}_2 | B_2 \subset F\} = \emptyset$

4.5

(1)

$A^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O} | O \subset A\}$ で $\forall O \in A^i, O \subset A$ から $A^i \subset A$

(2)

$A^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O} | O \subset A\} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$ から $A^i \subset \mathcal{O}$

(3)

$A \in \mathcal{O}$ から $A \subseteq A$ より $A \subset A^i$
$A \subset A^i$ と仮定すると、$A \subset A$ かつ $A \in \mathcal{O}$
以上より、$A \in \mathcal{O} \iff A \subset A^i$

4.6

(1)

$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} | A \subset F\}$ で $A \subset A$ から $A \subset \overline{A}$

(2)

$\overline{A} = \bigcap\{F \in \mathcal{F} | A \subset F\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ から $\overline{A} \in \mathcal{F}$

(3)

$A \in \mathcal{F}$ と仮定すると $A \subseteq A$ から $\overline{A} \subseteq A$
$\overline{A} \subset A$ と仮定すると $\bigcap\{F \in \mathcal{F} | A \subset F\} \subset A$ から $A \subset A$ より $A \in \mathcal{F}$

4.7

$(O1)$ $\emptyset, A \in \mathcal{O}$ から $\emptyset, A \in \mathcal{O}_A$

$(O2)$ $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_A, O_1, O_2 \subset A$ で $O_1 \cap O_2 \subset A$ から $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_A$

$(O3)$ $\forall i \in I, O_i \in \mathcal{O}_A$ とすると $\bigcup_{i \in I} O_i \subset A$ であるから $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_A$

5

5.1

$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$

$(1 \Longrightarrow 2)$

$p \in X, N \in N_Y(f(p))$ とすると $f(p) \in N^i$
$\exists O \in \mathcal{O}_Y, s.t. f(p) \in O \subset N$
よって、$p \in f^{-1}(O)$ となるが、(1) より $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ なので
$(O \subset N) \Longrightarrow f^{-1}(O)^i \subset f^{-1}(N)^i$
したがって、$p \in f^{-1}(O) \overset{open}{=} f^{-1}(O)^i \subset f^{-1}(N)^i$
$\therefore f^{-1}(N) \in N_X(p)$

$(2 \Longrightarrow 4)$

$S \subset X, y \in f\left(\overline{S}\right)$ とする.$\exists p \in \overline{S}, s.t. y = f(p)$ である.$O \in \mathcal{O}_Y, y = f(p) \in O\left(= O^i\right)$ とすると
(2) から $p \in f^{-1}(O)^i$
$p \in \overline{S}$ なので、$\forall O' \in \mathcal{O}_X$ に対し、$p \in O' \Longrightarrow O' \cap S \neq \emptyset$ より $f^{-1}(O)^i \cap S \neq \emptyset$
$x \in f^{-1}(O)^i \cap S$ とすると、$f\left(f^{-1}(O)^i\right) \subset O$ から $f(x) \in O \cap f(S)$

$(4 \Longrightarrow 3)$

$F \in \mathcal{F}_Y$ とする.(4) から $f^{-1}(F) \subset X$ に対し、$f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \overset{(4)}{\subset} \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} \subset \overline{F} = F$ なので
$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right)\right) \subset f^{-1}(F)$

$(3 \Longrightarrow 1)$

$O \in \mathcal{O}_Y$ とすると、$O^c \in \mathcal{F}_Y$ なので、(3) から $f^{-1}(O^c) \in \mathcal{F}_Y$.
$\therefore f^{-1}(O) = f^{-1}(O^c)^c = \mathcal{O}_X$

5.2

(1)

$O \in \mathcal{O}_Y$ とすると $f^{-1}(O) \in \mathcal{P}(X) = \mathcal{O}_X$

(2)

$$\begin{cases} \phi = \mathcal{O}_Y \\ Y = \mathcal{O}_Y \end{cases} \quad \text{とすると} \begin{cases} f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{O}_X \\ f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X \end{cases}$$

5.3

$O \in \mathcal{O}_Y$ とすると、$y_0 \in O \Longrightarrow f^{-1}(O) = X = \mathcal{O}_X$,$y_0 \notin O \Longrightarrow f^{-1}(O) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$

5.4

$O \in \mathcal{O}_z$ とする.g：連続
$g^{-1}(O)$ は開で、f：連続
$f^{-1}\left(g^{-1}(O)\right)$：開
$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\left(g^{-1}(O)\right) \in \mathcal{O}_X$
$\therefore g \circ f$ 連続

5.5

(1)

$|f| : X \to \mathbb{R}$ を $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ の合成で $|\cdot| \circ f = |f|$ と考える
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \delta := \epsilon$ ととると
$|x-a| < \delta \Longrightarrow ||a| - |x|| \leq |x-a| < \delta = \epsilon$

(2)

$\max : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ として、$f_+ = \max \circ f$ と考える
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \delta := \begin{cases} \epsilon & a = 0 \\ \min\left\{\frac{|a|}{2}, \epsilon\right\} & a \neq 0 \end{cases}$ ととると
$|x-a| < \delta \Longrightarrow |\max\{x, 0\} - \max\{a, 0\}| < \epsilon$

5.6

(1)

$(O1)$ $\emptyset, X \in \mathcal{O}_X$ は自明

$(O2)$ $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$ とすると、$O_1 \cap O_2 \subset X$ から $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_X$

$(O3)$ $\forall i \in I, O_i \in \mathcal{O}_X$ とすると、$\bigcup_{i \in I} O_i \subset X$ から $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_X$

(2)

$\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, Y\}$

(3)

$\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, Y\}$

5.7

1. $id : X \to X$ より $X \simeq X$
2. $X \simeq Y$ とすると $\exists f : X \to Y$ は同相写像であり、f の逆写像 f^{-1} も同相写像であるから $f^{-1} : Y \to X$ より $Y \simeq X$
3. $X \simeq Y, Y \simeq Z$ とすると $\exists f : X \to Y, g : Y \to Z$ は同相写像で、これらの逆写像 $f^{-1} : Y \to X, g^{-1} : Z \to Y$ も存在するから、$\exists h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ も同相写像だから $X \simeq Z$

5.8

(1) $\sim$ (4)

$f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a) + c$

(5)

$f(x) = 1 - x, [0,1) \simeq (0,1]$
$f(x) = \log x, (0,1] \simeq (-\infty, 1]$

(6)

$f(x) = \tan x$

5.9

(1)

$f(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1$ は連続で
$g(x,y) := \begin{cases} \arccos x & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos x & y < 0 \end{cases}$ とおくと、$f \circ g = g \circ f = id$ で g は連続

(2)

($\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{S}^1$ を示す)
$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$：連続、全単射　が存在すると仮定する
ここで $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ を $g(0) := (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと、g は連続　全単射になる
(g^{-1} は連続にならない)
したがって、$f \circ g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ も連続　全単射
よって、$f \circ g$ は単調増加としてよい. そこで $f \circ g(0) =: \alpha$ とおくと $f \circ g(x) \geq \alpha, \forall x \in [0, 2\pi)$ であるが、これは $f \circ g$ 全射であることと矛盾
f：連続　全単射となるものは存在しない

6

6.1

$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}} = \{U \cap \mathbb{Z} | U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}$

(1)

$x \in \mathbb{Z}$ のとき、$\{x\} = \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} \therefore \{x\} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$
次 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ は明らか、$A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ とすると、$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ であるが、$\{x\} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$ と $(O3)$ から $A \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$

(2)

$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \{U \cap \mathbb{Q} | U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}\}$、$x \in \mathbb{Q}$ とする
$\{x\}$ が $\mathbb{Q}$ の開集合でない $\iff \neg\left(x\text{が}\mathbb{Q}\text{の開集合}\right) \iff \neg\left(\exists U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, \{x\} = U \cap \mathbb{Q}\right)$
$\iff \forall U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, \{x\} \neq U \cap \mathbb{Q}$
$U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ を任意にとる、$x \notin U$ のとき、$\{x\} \neq U \cap \mathbb{Q}$ は自明なので、$x \in U$ とすると
$\exists \epsilon > 0, s.t. (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$
ここで、有理数の稠密性から $\exists y \in \mathbb{Q}, s.t. y \in (x, x + \epsilon)$
このとき、$x < y \in U \cap \mathbb{Q}, \{x\} \neq \{y\} \subset U \cap \mathbb{Q}$

6.2

$X = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

(1)

$(0,1) = (0,1) \cap X, (0,1) = [0,1] \cap X$ とかけるので、(0.1) は開かつ閉集合

(2)

$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}, \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cap X$ より閉集合であるが開集合ではない.
$(\because)$
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X$ が X の開集合でない $\iff \forall U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X \neq U \cap X$
$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X \notin \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ なので、$U \supsetneq \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X$ となる U を考える.
$\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X$ であるから、$\exists \epsilon > 0, s.t. \left(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon\right) \subset U$
ここで $y := \frac{1}{2} - \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ とおくと $y \in U \cap X$ かつ $y < \frac{1}{2}$ なので、$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]_X \neq U \cap X$

6.3

(1)

$$\begin{cases} A = (-\infty, 3) \cap X \\ B = (-2, 0) \cap X \\ C = (0.9, 2) \cap X \\ D = (2.9, \infty) \cap X \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} A = (-\infty, 3] \cap X \\ B = [-2, 0] \cap X \\ C = [1, 2] \cap X \\ D = [3, \infty) \cap X \end{cases}$$

(3)

$[-3, 3] \cap X = (-2, 0) \cup [1, 2) \cup \{3\}$

(4)

$\overline{N_X(0,3)} = (-3,3) \cap X = B \cup C$

6.4

$B = ((0,\infty)_x \times \mathbb{R}_y) \cap X$ より開

7

7.1

$(O1)$ の成立は自明であって $(O2)$ は $0 < a_1 \leq a_2$ とすると $[-a_1, a_1] \subset [-a_2, a_2]$ があるから $[-a_1, a_1] \cap [-a_2, a_2] = [-a_1, a_2]$ より $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. ここで $B_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}$ とすると、$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (-1, 1) \notin \mathcal{B}$ から $(O3)$ をみたさない

$\mathcal{B} = \{[-a, a] \subset \mathbb{R} | a \geq 0\}$ から $a \to \infty$ とすると $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ から、$\mathbb{R} = \bigcup \mathcal{B}$. 任意に $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ を取り、$B_1, B_2 \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ のときは自明であるから、$B_1, B_2 \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ とする. 対称性より $B_1 \subset B_2$ を仮定すると $x \in B_1 \cap B_2 \iff x \in B_1$ に対し、$B = B_1$ に対して $B \subset B_1 \cap B_2$ で $x \in B$. 以上より、$\mathcal{B}$ は開基の公理をみたす

7.2

$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\bigcap \mathcal{U} | \mathcal{U} \subset \mathcal{S}\} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{4\}, X\}$
$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} = \mathcal{O}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \{\bigcup \mathcal{U} | \mathcal{U} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S}}\} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, X\}$

7.3

(1)

$O \in \mathcal{O}_d$ をとると $x \in O$ のとき $\exists \epsilon > 0, s.t. N(x, \epsilon) \subset O$ となり、$\epsilon_1 < \epsilon_2$ とし $\forall B_1 = \{N(x, \epsilon_1)\}, B_2 = \{N(x, \epsilon_2)\} \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$ とすると $B_1 \cap B_2 = B_1$ から $x \in B_1 \in \mathcal{B}$. よって $\mathcal{B}$ は開基である

(2)

1. $X = \bigcup_{r>0} N(a, r)$
2. $B_1 := N(a, r_1), B_2 := N(a, r_2), r_1 \leq r_2$ とし $B_1 \cap B_2 = B_1$ となり、$x \in B_1 \cap B_2 = B1$ に対して $x \in B_1 \in \mathcal{B}$

から、$\mathcal{B}_a$ は開基の公理をみたすが d が離散距離の場合で、$N\left(a, \frac{1}{2}\right) = \{a\} \in \mathcal{O}_d$ であるが $\{a\} \neq X = \bigcup_{r>0} N(a, r)$ となるから $\mathcal{B}_a$ は $\mathcal{O}_d$ の開基とならない

(3)

$\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ であるが $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right) \subsetneq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} N(x, 1)$ から、開基ではない
$O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ とすると $\forall x \in O, \exists \epsilon > 0, s.t. (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O$ となる. $\epsilon \geq 1$ のとき $x \in N(x, 1) \subset N(x, \epsilon)$ があるから、$x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}_0}$ かつ $\bigcap_{B \in \mathcal{B}_0} \subset \mathcal{O}_d$. 以上より $\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{O}_d$ の準開基である

$\epsilon < 1$ では $U_1 := N\left(x - \frac{\epsilon}{2} + 1, 1\right), U_2 := N\left(x + \frac{\epsilon}{2} - 1, 1\right) \in \mathcal{B}_0$ とおくと $\forall x \in O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, x \in U_1 \cap U_2 = \left(x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2}\right) \subset N(x, \epsilon) \subset O$ から、$\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{O}_d$ の準開基である

7.4

開基であると仮定すると $\forall O := N\left(\left(x, y\right), \epsilon\right) \in \mathcal{O}_d, \exists \mathcal{S}_0 \in \mathcal{S}, s.t. N\left(\left(x, y\right), \epsilon\right) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S$ であるが、$N\left(\left(0, 0\right), 1\right)$ に対して、任意の $S \in \mathcal{S}$ は第一または第三象限しか被覆しないから $\mathcal{S}$ は開基ではない

$\forall O = N\left(\left(x_0, y_0\right), \sqrt{2}r\right) \in \mathcal{O}_d, \forall\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2, U_1 := \left\{\left(x, y\right) : x > x_0 - r, y > y_0 - r\right\} \in \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$
$U_2 := \left\{\left(x, y\right) : x < x_0 + r, y < y_0 + r\right\} \in \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$ とすると $\left(x_0, y_0\right) \in U_1 \cap U_2$ で $U_1 \cap U_2 \subsetneq O = N\left(\left(x_0, y_0\right), \sqrt{2}r\right)$ があるから $\mathcal{S}$ は準開基である

8

8.1

$U \in \mathcal{N}(x)$ とすると $\exists \epsilon > 0, s.t. N(x,\epsilon) \subset U$ であるから $n := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ とおくと $\frac{1}{n} < \epsilon$ なので
$\mathcal{B}(x) \ni N\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset N(x,\epsilon) \subset U$

8.2

(1)

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基であるとすると、$\forall U \in \mathcal{O}, \exists \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, U = \bigcup B_0$．よって、$x \in U$ なら $\exists V \in \mathcal{B}_0, s.t. x \in V$ なので $x \in V \subset \bigcup \mathcal{B}_0 = U$

$\Longleftarrow$ $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O$ とすると、$\exists V_x \in \mathcal{B}, x \in V_x \subset O$ であるから $\bigcup\limits_{x \in O} \subset O$ かつ $O \subset \bigcup\limits_{x \in O} V_x$ なのでで $O = \bigcup\limits_{x \in O} V_x$

(2)

$\mathcal{B} = \{B_n \in \mathcal{O} | n \in \mathbb{N}\}$ は開基で、$\exists \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, s.t. X = \bigcup \mathcal{B}_0$ が取れるから $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B}_0 | x \in B\}$ とおくと $\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系で，高々可算個の元を持つ．また，$A := \{x_n \in B_n | n \in \mathbb{N}\}$ とおく，$x \in \overline{A} \iff \forall U (\ni x) \subset \mathcal{O}, U \cap A \neq \emptyset$，$x \in X$ に対して，$x \in U$ をみたす $U \in \mathcal{O}$ を考える．(1) から $\exists B_n \in \mathcal{B}, s.t. x \in B_n \subset U$ となる．このとき，$x \in A = \{x_n \in B_n | n \in \mathbb{N}\}, U \cap A \neq \emptyset$ から $\overline{A} = X$

8.3

(1)$\forall N \in \mathcal{N}_Y(f(x)), f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_X(x)$
(2)$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in $X \Longrightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ in Y

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$\forall N \in \mathcal{N}_Y(f(x))$, (1) より，$f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_X(x)$ であるが，$x_n \longrightarrow x$ のとき，$\exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq n_0, f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_X(x_n)$．i.e. $x_n \in \left(f^{-1}(N)\right)^i$ で $f(x_n) \in N$

(2) $\Longrightarrow$ (1)

対偶を示す
(1) でないと仮定すると，$\exists N \in \mathcal{N}_Y(f(x)), s.t. f^{-1}(N) \notin \mathcal{N}_X(x)$．$(X, \mathcal{O}_X)$ は第一可算公理をみたすので $\forall x \in X, \mathcal{B}(x) := \{B_n(x) \in \mathcal{O} | n \in \mathbb{N}, B_i(x) \subset B_j(x), i > j\}$ と定めると (1) でないから $\exists N \in \mathcal{N}_Y(f(x)), s.t. x \notin \left(f^{-1}(N)\right)^i$．したがって，$\forall n \in \mathbb{N}, B_n(x) \not\subset f^{-1}(N)$．つまり，$\exists x_n \in \mathcal{B}_n(x), s.t. x_n \notin f^{-1}(N)$，よって，$x_n \longrightarrow x$ だが $f(x_n) \notin N$

8.4

$N = 2, X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ とする．$(-1,1), (0,2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ なので，$(-1,1)^2, (0,2)^2 \in \mathcal{B}$ であるが $(-1,1)^2 \cup (0,2)^2 \notin \mathcal{B}$ から $(O3)$ はみたさない

$(x_1, x_2, \cdots, x_N) \in X$ とする，$x_j \in U_j \in \mathcal{O}_j$ であるから $X = \bigcup \mathcal{B}$ であり，$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ とすると $B_1 = \prod_{j=1}^{N} U_j^1, B_2 = \prod_{j=1}^{N} U_j^2$ と表せるので $\mathcal{B} := \prod_{j=1}^{N} U_j^1 \cap U_j^2$ とおくと，$B = B_1 \cap B_2$

8.5

$O_1 \in \mathcal{O}_1$ に対して，$p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times \prod_{j=2}^{N} X_j$ であるから $p_1^{-1}(O_1) \in \mathcal{O}$

8.6

$U, V \in \mathcal{O}$ に対し

(1)

$x \in U \cap V$ のとき、$\Delta^{-1}(U \times V) = X \in \mathcal{O}$

(2)

$x \notin U \cap V$ のとき、$\Delta^{-1}(U \times V) = \emptyset \in \mathcal{O}$

8.7

$O_1 \in \mathcal{O}_{Y_1}, O_2 \in \mathcal{O}_{Y_2}$ に対し、仮定から $f_1^{-1}(O_1) \in \mathcal{O}_X, f_2^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$ なので、$f^{-1}(O_1 \times O_2) = f_1^{-1}(O_1) \cap f_2^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$

8.8

Annulus（円環）

$$\begin{gathered}\phi : \mathbb{S}^1 \times (0,1) \to A \\ (\cos\theta, \sin\theta, r) \mapsto ((1+r)\cos\theta, (1+r)\sin\theta)\end{gathered}$$

とすると、ϕ：全単射、連続、ϕ^{-1}：連続
$\left(\phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \sqrt{u^2+v^2} - 1\right)\right)$

8.9

Torus（トーラス）

$$\begin{gathered}\phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \Pi \\ (\cos\theta, \sin\theta, \cos\eta, \sin\eta) \mapsto ((2+\cos\eta)\cos\theta, (2+\cos\eta)\sin\theta, \sin\eta)\end{gathered}$$

ϕ：全単射、ϕ, ϕ^{-1}：連続 $\left(\phi^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2} - 2, z\right)\right)$

9

9.1

(1)

$x-(x-[x])=[x]\in\mathbb{Z}$
$\therefore x\sim x-[x]$

(2)

$f(x)$ は x の式と定めると、必ず x を与えたとき $f(x)$ が一つ定まる．今回は $\widetilde{f}(C):=f(x)$、右辺に C がない $\rightarrow$ 一つに定まるかわからない．$x,y\in C$ としたときに $f(x)=f(y)$ となれば代表元の取り方に依らない
$x,y\in C$ とする、$x\sim y$ なので、$x-y\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}f(x)&=(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))\\&=(\cos(2\pi y+2\pi(x-y)),\sin(2\pi y+2\pi(x-y)))\\&=(\cos(2\pi y),\sin(2\pi y))\\&=f(y)\end{aligned}$$

(3)

$\widetilde{f}$：連続は明らか
$g(x,y):=\begin{cases}C\left(\dfrac{1}{2\pi}\arccos x\right) & y\geq 0\\ C\left(-\dfrac{1}{2\pi}\arccos x\right) & y<0\end{cases}$ とおくと、$g\circ f\widetilde{f}=\widetilde{f}\circ g=id$ で、$\widetilde{f}$ は全単射であり、$g=\widetilde{f}^{-1}$ は連続

9.2

(1)

$\widetilde{f}:X/\sim\rightarrow\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$
$f(x,y):=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x,\cos 2\pi y,\sin 2\pi y)$
$\widetilde{f}$ を $9-1$ と同様に $\widetilde{f}(C):=f(x,y)$ と定める

(2)

$f(x,y)$ は (1) と同様で $\widetilde{f}(C)=f(x,y)$ とおけばいい

(3)

$5-9$ と同様

9.3

$Y:=\mathbb{S}\times[0,1]$ を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする
$(x,y,z)\overset{Y}{\sim}(x',y',z')\overset{def}{\iff}\left[-x=x'\wedge -y=y'\wedge z=z'=\dfrac{1}{2}\right]\vee((x,y,z)=(x',y',z'))$ とすると、$X/\sim$ と $Y/\overset{Y}{\sim}$ は同相

$\phi(x,y) = \left(\cos 2\pi x, \sin 2\pi y, \frac{1}{2} + \frac{1-2y}{2}\sin \pi y\right)$ とおいて、$\widetilde{\phi}(C) := \phi(x,y)$ とおくと、$\widetilde{\phi}$：全単射、$\widetilde{\phi}, \widetilde{\phi}^{-1}$：連続

10

10.1

(1)

$x, y \in X, x \neq y$ とすると $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{O}$ かつ $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \therefore X$: ハウスドルフ

(2)

$x, y \in X, x \neq y$ とする．$x \in U \in \mathcal{O}$ となるとき $U = X$、$y \in V \in \mathcal{O}$ となるとき $V = X$、$U \cap V = X \neq \emptyset$．よって X：ハウスドルフではない

10.2

$x, y \in X, x \neq y$ とすると $\epsilon := \frac{1}{2} d(x, y) > 0$ とおく、$N(x, \epsilon), N(y, \epsilon) \in \mathcal{O}$ で、$N(x, \epsilon) \cap N(y, \epsilon) = \emptyset$ であるから、X はハウスドルフである

10.3

$\emptyset \neq U, V \in \mathcal{O}$ とすると、$U- = (-\infty, a), V = (-\infty, b)$ とかける．このとき $U \cap V = (-\infty, \min\{a, b\}) \neq \emptyset$

10.4

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ を自然な全射とすると $p(0) \in U, p\left(\sqrt{2}\right) \in V$ であり、p の連続性から、$0 \in p^{-1}(U) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, \sqrt{2} \in p^{-1}(V) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$．よって、$\exists \epsilon > 0, s.t. \left(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon\right) \subset p^{-1}(V)$
ここで、$\mathbb{Q}$ の稠密性より、$\exists r \in \mathbb{Q}, s.t. r \in \left(\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon\right)$、したがって、$r \in \mathbb{Q} \cap p^{-1}(V)$．一方、$r - 0 = r \in \mathbb{Q}$ より、$r \sim 0$、よって、$p(r) = p(0) \in U$ で $p(r) \in U \cap V$
$\Longrightarrow \mathbb{R}/\sim$：ハウスドルフではない

10.5

$K := \{x_n \in x | n = \{1, 2, \cdots, N\}\}$ とおく．$K \subset \bigcup \mathcal{V}$ となる $\mathcal{V}$（開被覆）を考えると、各 n で $\exists V_n \in \mathcal{V}, s.t. x_n \in \mathcal{V}$ であるので、$\{V_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{V}$ で $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_n$ となる

10.6

$K := \left\{\left(a, b - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ とすると、$(a, b) \subset \bigcup K$ である (K：開被覆) が $\bigcup_{n=1}^{N} \left(a, b - \frac{1}{n}\right) \subsetneq (a, b)$ であるので、有限部分被覆を持たない

10.7

$[a, b]$ の開被覆で有限部分被覆を持たない K があるとする．このとき $I_0 := [a, b]$ を半分にした $\left[a, \frac{1}{2}(a + b)\right]$ と $\left[\frac{1}{2}(a + b), b\right]$ の内少なくとも一方は K の有限部分被覆を持たない．それを I_1 とおく．同様に I_1 を半分にして、K の有限部分被覆を持たない閉区間 $I_1 = [a_2, b_2]$ とおく、これを繰り返していくと、区間縮小法より $\exists c \in [a, b], s.t. \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = c$ となる．ここで、$c \in [a, b] \subset U$ なので、$\exists U \in K, s.t. c \in U$、ここで U は開なので、$\exists \epsilon > 0, [c - \epsilon, c + \epsilon] \subset U$．一方

で $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ より、$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. |a_N - c| < \dfrac{\epsilon}{2}, |b_N - c| < \dfrac{\epsilon}{2}$ となり、$I_N = [a_N, b_N] \subset (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset U$ で、I_N が K の一つの元 U で被覆されているとなり、矛盾

10.8

$K := \{N(a,1) | a \in A\}$ とおくと、K は A の開被覆であり、A はコンパクトより、$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \{a_n\}_{n=1}^N \subset X, s.t. A \subset \bigcup_{n=1}^N N(a_n, 1)$ となる. このとき、$diamN(a_n,1) \leq 2$ なので、$diam(A) \leq \sum_{m=1}^N diamN(a_n,1) \leq 2N$. よって、有界である

$x \in A^c$ とする. ここで $a \in A$ とすると $x \neq a$ なので $d(x,a) > 0$. そこで $\epsilon_{x,a} := \dfrac{d(x,a)}{2}$ とおくと、$a \notin N(x, \epsilon_{x,a})$. すなわち、$a \in N(x,\epsilon_{x,a})^c$. よって $K' := \{N(x,\epsilon_{x,a})^c | a \in A\}$ とおくと、K' は A の開被覆. よって、$\exists N \in \mathbb{N}, \exists \{a_n\}_{n=1}^N \subset X, s.t. A \subset \bigcup_{n=1}^N N(x,\epsilon_{x,a})^c$. したがって、$A^c \supset \left(\bigcup_{n=1}^N N(x,\epsilon_{x,a_n})^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^N N(x,\epsilon_{x,a_n}) = N(x,\epsilon)$. ただし、$\epsilon := \min_{1\leq n\leq N} \epsilon_{x,a_n}$

10.9

$K : X_1 \times X_2$ の開被覆とする
$x_1 \in X_1$ に対し, $K_2(x_1) = \{V \in \mathcal{O}_2 | \exists O \in K, \exists U \in \mathcal{O}_1, s.t. x_1 \in U, U \times V \subset O\}$ とすると $K_2(x_1)$ は X_2 の開被覆. ($x_2 \in X_2$ に対し, $\exists O \in K, s.t. (x_1,x_2) \in O$ で, これの開基を考えると $(x_1,x_2) \in U \times V \subset O$) X_2 はコンパクトなので $\exists \{V_j\}_{j=1}^N \subset K_2(x_1), X_2 \subset \bigcup_{j=1}^N V_j$. この V_j 一つごとに U'_j, O_j も定まるので $U' := \bigcap_{j=1}^N U_j \in \mathcal{O}_1$ とおくと, $U' \times X_2 \subset \bigcup_{j=1}^N O_j$ かつ $x_1 \in U'$. そこで $K_1 := \left\{V' \in \mathcal{O}_1 \middle| \exists \{O_j\}_{j=1}^N \subset K, s.t. U' \times X_2 \subset \bigcup_{j=1}^N O_j\right\}$ とおくと, K_1 は X_1 の開被覆. よって $\{W_n\}_{n=1}^{N'} \subset K_1, X_1 \subset \bigcup_{n=1}^{N'} W_n$. したがって $\{P_k^n\}_{k=1}^{N_n} \subset K, W_n \times X_2 \subset \bigcup_{k=1}^{N_n} P_k^n$ とできる. このとき $X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{n=1}^{N'} \bigcup_{k=1}^{N_n} P_k^n$

10.10

$\mathbb{R}^n$ は距離空間なので, [10-8] からコンパクト $\Longrightarrow$ 有界閉は OK から, 以下は $\Longleftarrow$ を示す.
A:有界閉集合とする. $\exists R > 0, s.t. A \subset [-R,R]^n$. [10-7] より $[-R,R]$ はコンパクトで, [10-9] より $[-R,R]^n$ もコンパクト空間であるから, したがってそれの閉部分集合 A もコンパクト

10.11

(1)

$(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ が有限集合のときは明らかなので, 以下は無限集合とする. 背理法より, $\forall p \in A, p$ が $(x_n)_n$ の集積点にならないと仮定する. このとき $\forall p \in A, \exists U_p \in \mathcal{O}, s.t. p \in U_p, \#\{n \in \mathbb{N} | x_n \in U_p\} < \infty$. ここで, $K := \{U_p\}_{p\in A}$ とおくと, K は A の開被覆で, (a) より

$\exists \left\{U_{p_j}\right\}_{j=1}^{N} \subset K, s.t. A \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{p_j}$ とできる.$(x_n)_n$ は無限集合であるが $\# \left\{k \in \mathbb{N} \middle| x_k \in \bigcup_{j=1}^{N} U_{p_j}\right\} < \infty$ となり，矛盾する

(2)

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し，$P_k = \left\{n \in \mathbb{N} \middle| x_n \in N\left(p, \frac{1}{k}\right)\right\}$ とおくと $\# P_k = \infty$ より P_1 から一つの元を取り，$n_1 \in P_1$ とする．以降，帰納的に $n_{k+1} \in P_{k+1}$ は $n_{k+1} > n_k$ とすると $(x_{nk})_{k=1}^{\infty}$ は (x_n) の部分列で $\lim_{k \to \infty} x_{nk} = p$

(3)

背理法で示す.
A の開被覆で有限部分被覆を持たない，$K := \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda, \# \Lambda = \infty\}$ があるとする．$\forall n \in \mathbb{N}, K$ の n 個の元で A を覆えないので $(U_k)_{k=1}^{n} \subset K$ に対し，$\exists x_n \in A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} U_k$．この (x_n) に対し，$\exists p \in A, \exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}, s.t. \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = p$．$p \in A \subset \bigcup K$ であるから $\exists U_0 \in K, s.t. p \in U_0$ となる．また $\exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_1 \Longrightarrow U_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ であるから $n \geq N_1$ のとき，$x_n \notin U_0$．一方で，U_0 は開であるから，$\exists \epsilon > 0, s.t. N(p, \epsilon) \subset U_0, \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = p$ なので $\exists N_2 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_2 \Longrightarrow x_{n_k} \in N(p, \epsilon) \subset U_0$．すると，$n \geq \max\{N_1, N_2\}$ のとき，$x_n \in U_0$ か $x_n \in U_0$

10.12

A：有界閉集合は明らか
$g_n(x) := x^n$ とおくと，$g_n \in A$ であるが，どんな部分列 $\{g_{n_k}\}$ をとっても $g_{n_k}(x) = x^{n_k} = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \notin A$．$A$ 内に収束部分列を持たない

10.13

$f(X)$ の開被覆を $K := \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}_Y$ とおくと，$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ であるから $X = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$．$f$ は連続なので，$f^{-1}(O_\lambda)$ は開集合となり，$\left\{f^{-1}(O_\lambda)\right\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆．X はコンパクトより，$\exists N \in \mathbb{N}, \left\{f^{-1}(O_{\lambda_n})\right\}_{n=1}^{N}, s.t.$

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=1}^{N} f^{-1}(U_{\lambda_n}) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n}\right) \end{aligned}$$

よって $f(X) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n}\right)\right) \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_{\lambda_n}$

10.14

$A : close \Longrightarrow A : compact \Longrightarrow f\left(A\right) : compact \Longrightarrow f\left(A\right)$: 連続
$X : compact; [10-13]; Y : Hausdroff$
$A \subset X$：閉とすると A：コンパクト，f を A に制限した $f|_A$ も連続なので [10-13] より $f|_A\left(A\right) = f\left(A\right)$ もコンパクト．$f\left(A\right)^c$：開を示す．$x \in f\left(A\right)^c$ とすると，$\forall y \in f\left(A\right), x \neq y$ なので Y はハウスドルフから，$\exists U_y, \exists V_y \in \mathcal{O}_Y, s.t. x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$．ここで $f\left(A\right) \subset \bigcup_{y \in f(A)} V_y$ であるから，$\left\{V_y\right\}_{y \in f(A)}$ は開被覆で $f\left(A\right)$ はコンパクトから $\exists \left\{V_n\right\}_{n=1}^N \subset \left\{V_y\right\}_{y \in f(A)}, s.t. f\left(A\right) \subset \bigcup_{n=1}^N V_n$. そこで, $U := \bigcap_{n=1}^N U_{y_n} \left(\in \mathcal{O}_Y\right)$ とおくと，$x \in U \in \mathcal{O}_Y$ であり，$\forall n$ で $U \subset U_{y_n}, U_{y_n} \cap V_{y_n} = \emptyset$ なので $U \cap V_{y_n} = \emptyset$. したがって $\emptyset = \bigcup_{n=1}^N \left(U \cap V_{y_n}\right) = U \cap \left(\bigcup_{n=1}^N V_{y_n}\right) \supset U \cap f\left(A\right)$．$\therefore U \cap f\left(A\right) = \emptyset, x \in U \subset f\left(A\right)^c$