Contents

1　前提知識

1.1　距離と距離空間

Definition 1.1. （距離・距離空間）
X を空でない集合とする．写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が以下の条件をみたすとき d を X 上の距離（または距離関数）であるという

$(D1)$ $\forall x, y \in X, d(x,y) \geq 0$ であり，$d(x,y) = 0 \iff x = y$

$(D2)$ $\forall x, y \in X, d(x,y) = d(y,x)$

$(D3)$ $\forall x, y, z \in X, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

このとき，(X, d) を距離空間という

Example 1.2. $\mathbb{R}^n$ での距離の例

1. Manhattan 距離 $d_1^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

   Proof. $\mathbb{R}^n$ では

   $(D1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq \sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \Longrightarrow d_1^{(n)}(x,y) \geq 0$

   $0 = d_1^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ から $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, x_i = y_i$．よって，$x = y$

   $(D2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d_1^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1^{(n)}(y,x)$

   $(D3)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{align}
d_1^{(n)}(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \tag{1}\\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i| \tag{2}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \tag{3}\\
&= d_1^{(n)}(x,y) + d_1^{(n)}(y,z) \tag{4}
\end{align}
$$

□

2. Euclid 距離 $d_2^{(n)}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

   Proof. $\mathbb{R}^n$ では

   $(D1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 0} \geq 0$

   $0 = d_2^{(n)}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ から，$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, x_i = y_i$ で $x = y$

$(D2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d_2^{(n)}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d_2^{(n)}(y, x)$

$(D3)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
d_2^{(n)2}(x, z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 &(5)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 &(6)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2 \right) &(7)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 &(8)\\
&= d_2^{(n)2}(x, y) + 2d_2^{(n)}(x, y)\, d_2^{(n)}(y, z) + d_2^{(n)2}(y, z) &(9)\\
&= \left(d_2^{(n)}(x, y) + d_2^{(n)}(y, z)\right)^2 &(10)
\end{aligned}$$

から $d_2^{(n)}(x, z) \leq d_2^{(n)}(x, y) + d_2^{(n)}(y, z)$

□

3. Chebyshev 距離$d_\infty^{(n)}(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$

Proof. $\mathbb{R}^n$ では

$(D1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d_\infty^{(n)}(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\} \geq \max_i \{0\} = 0$

$0 = d_\infty^{(n)}(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$ から，$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, |x_i - y_i| \geq 0$ より $x = y$

$(D2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d_\infty^{(n)}(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\} = \max_i \{|y_i - x_i|\} = d_\infty^{(n)}(y, x)$

$(D3)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
d_\infty^{(n)}(x, z) &= \max_i \{|x_i - z_i|\} &(11)\\
&= \max_i \{|x_i - y_i + y_i - z_i|\} &(12)\\
&\leq \max_i \{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\} &(13)\\
&\leq \max_i \{|x_i - y_i|\} + \max_i \{|y_i - z_i|\} &(14)\\
&= d_\infty^{(n)}(x, y) + d_\infty^{(n)}(y, z) &(15)
\end{aligned}$$

□

4. 離散距離$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

Proof. $\mathbb{R}^n$ では

$(D1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \geq 0$ は自明で，定義より $d(x, y) = 0$ になると $x = y$

$$(D2)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n,\begin{cases}d(x,y)=1 & x\neq y\\ d(x,y)=0 & x=y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}d(y,x)=1=d(x,y) & x\neq y\\ d(y,x)=0=d(x,y) & x=y\end{cases}$$

$(D3)\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$

	$x=y=z$	$x=y\neq z$	$x=z\neq y$	$x\neq y=z$	$x\neq y\neq z$
$d(x,z)$	0	0	1	1	1
$d(x,y)$	0	1	1	0	1
$d(y,z)$	0	1	1	0	1

から $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

□

1.2 距離空間の用語

Definition 1.3. ($\epsilon-$近傍)
(X,d) を距離空間とする．$a\in X,\epsilon>0$ に対し，$N(a,\epsilon)=\{x\in X|d(a,x)<\epsilon\}$ を点 a の$\epsilon-$近傍という

Definition 1.4. （内点・外点・境界点・内部・外部・境界）

1. $a\in X$ が A の内点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\epsilon>0,s.t.N(a,\epsilon)\subset A$
   A の内点全体の集合を A の内部といい，A^i で表す
2. $a\in X$ が A の外点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\epsilon>0,s.t.N(a,\epsilon)\cap A=\emptyset$
   A の外点全体の集合を A の外部といい，A^e で表す
3. $a\in X$ が A の境界点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\epsilon>0,N(a,\epsilon)\cap A\neq\emptyset$ かつ $N(a,\epsilon)\cap A^c\neq\emptyset$
   A の境界点全体の集合を A の境界といいといい，A^f で表す

$A^e=(A^c)^i,A^f=(A^c)^f$ を注意すると，$X=A^i\bigsqcup A^e\bigsqcup A^f$

Definition 1.5. （触点・閉包）
(X,d) を距離空間とする．$A\subset X$
$a\in X$ が A の触点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\epsilon>0,N(a,\epsilon)\cap A\neq\emptyset$
A の触点全体の集合を A の閉包といい，$\overline{A}$ で表す
$A^i\subset A\subset\overline{A}$ と $\overline{A}=A^i\bigsqcup A^f$ は明らかに成り立つ

Definition 1.6. （開集合・閉集合）
(X,d) を距離空間とする．$A\subset X$

1. A が距離空間 (X,d) の開集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A=A^i$
2. A が距離空間 (X,d) の閉集合 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A=\overline{A}$

Proposition 1.7. (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A について $(A^i)^i,\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

Proof. $x\in A^i$ とすれば，$N(x,\epsilon)\subset A$ となる $\epsilon>0$ が存在する．$y\in N(x,\epsilon)$ とし，$\delta=\epsilon-d(x,y)$ とおく．$\delta>0$ かつ $N(y,\delta)\subset N(x,\epsilon)\subset A$ がわかる．したがって，$y\in A^i$ となり，$N(x,\epsilon)\subset A^i$ が成り立つ．よって $A^i\subset(A^i)^i$ になり，$(A^i)^i\subset A^i$ はあるから $(A^i)^i=A^i$
次は $x\in\overline{(\overline{A})}$ とすると $\forall\epsilon>0,N(x,\epsilon)\cap\overline{A}\neq\emptyset$ になり，$y\in N(x,\epsilon)\cap\overline{A}$ について，$\delta=\epsilon-d(x,y)$ とおくと，$\delta>0$ かつ $y\in\overline{A}$ があるから $N(y,\delta)\cap A\neq\emptyset$ となる．一方，$N(y,\delta)\subset N(x,\epsilon)$ だから，$N(x,\epsilon)\cap A\neq\emptyset$ となる．したがって $x\in\overline{A}$ となり，$\overline{(\overline{A})}\subset\overline{A}$ が成り立つ．$\overline{A}\subset\overline{(\overline{A})}$ より，$\overline{A}=\overline{(\overline{A})}$ □

Proposition 1.8. (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A,B について以下が成り立つ

1. $(A\cap B)^i = A^i \cap B^i$
2. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Proof. 1. $x\in(A\cap B)^i$ とすると，$\exists\epsilon_0>0, s.t. N(x,\epsilon_0)\subset A\cap B$ から，$N(x,\epsilon_0)\subset A$ かつ $N(x,\epsilon_0)\subset B$ で, 定義より $x\in A^i$ かつ $x\in B^i$ から $x\in A^i\cap B^i$. よって $(A\cap B)^i\subset A^i\cap B^i$ で，$x\in A^i\cap B^i$ とすると，$\exists\epsilon_1,\epsilon_2>0, s.t. N(x,\epsilon_1)\subset A$ かつ $N(x,\epsilon_2)\subset B$ であるから，$\epsilon' := \max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ とすると，$N(x,\epsilon')\subset A\cap B$ があって，$(A\cap B)^i\supset A^i\cap B^i$ である

2. $x\in\overline{A\cup B}$ とすると,$\forall\epsilon_0>0, N(x,\epsilon_0)\cap(A\cup B)\neq\emptyset$. 言い換えれば $\forall\epsilon_0>0, N(x,\epsilon_0)\cap A\neq\emptyset$ または $N(x,\epsilon_0)\cap B\neq\emptyset$．これは $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$ であるから $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 逆に $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$ とすると，$\forall\epsilon_1,\epsilon_2>0, N(x,\epsilon_1)\cap A\neq\emptyset$ または $N(x,\epsilon_2)\cap B\neq\emptyset$ が成り立つので $\epsilon' := \max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ に対して，$N(x,\epsilon')\cap(A\cup B)\neq\emptyset$ があるから $\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$．よって $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

□

Proposition 1.9. 距離空間において，以下が成り立つ

1. 開集合の補集合は閉集合
2. 閉集合の補集合は開集合

Proof. 1. $A\subset X$ を開集合とする．$\forall x\in(A^c)^f, x\in A^c$ を証明すればいいから，x を A^c の境界点とする．定義より，$\forall\epsilon>0, N(x,\epsilon)\cap A\neq\emptyset$ かつ $N(x,\epsilon)\cap A^c\neq\emptyset$. $x\in A$ と仮定すると，$\exists\epsilon'>0, s.t. N(x,\epsilon')\subset A$ で $N(x,\epsilon')\cap A^c=\emptyset$ より，仮定と矛盾するから，$x\in A^c$. よって，$\forall a\in(A^c)^f, a\in A^c$ で，A^c は閉集合である

2. $B\subset$ を閉集合とする．$\forall x\in(B)^f$ に対して，$x\in B$ で $\forall\epsilon>0, N(x,\epsilon)\cap B\neq\emptyset$ かつ $N(x,\epsilon)\cap B^c\neq\emptyset$ から，$N(x,\epsilon')\subset B^c$ をみたす ϵ' は存在しない．x の任意性より，B の全ての境界点は B^c に属さないので，B^c は開集合である

□

Proposition 1.10. (X,d) を距離空間とする．$A\subset X$ について以下が成り立つ

1. A^i は A に含まれる最大の開集合
2. $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合

Proof. 1. $O\subset A$ を開集合とすると $O=O^i\subset A^i$ があって，O^i の任意性より A^i は A に含まれる最大の開集合である

2. $F\supset A$ を閉集合とすると $F=\overline{F}\supset\overline{A}$ があって，F の任意性より $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である

□

Proposition 1.11. （位相の公理・開集合系の公理）
距離空間 (X,d) の開集合系 $\mathcal{O}_d=\{O\subset X \mid O$ は X の開集合$\}$ は，以下の性質をみたす

$(O1)$ $\emptyset\in\mathcal{O}_d, X\in\mathcal{O}_d$

$(O2)$ $\forall O_1,O_2\in\mathcal{O}_d$ ならば $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}_d$

$(O3)$ $\forall\lambda\in\Lambda, O_\lambda\in\mathcal{O}_d$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathcal{O}_d$

Proof. 1. 定義より $\emptyset, X\in\mathcal{O}_d$

2. $O_1, \cdots, O_n \in \mathcal{O}_d$ とする．$\bigcap_{k=1}^{n} O_k = \emptyset$ ならば開集合（$\emptyset$ は開集合でも閉集合でもある）．$\bigcap_{k=1}^{n} O_k \neq \emptyset$ のとき，$x \in \bigcap_{k=1}^{n}$ とすると，$\exists \{\epsilon_k\}_{k=1}^{n}$ は性の数列で，$s.t. N(x, \epsilon_k) \subset O_k$．ここで $\epsilon_0 := \min\{\epsilon_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$ とおくと，$N(x, \epsilon_0) \subset \bigcap_{k=1}^{n} O_k$ となり，$\bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{O}_d$

3. $O_\lambda \in \mathcal{O}_d, x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とすると，少なくとも $\exists \lambda_0 \in \Lambda, s.t. x \in O_{\lambda_0}$，すると $\exists \epsilon > 0, s.t. N(x, \epsilon) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ なので $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は開集合である

□

Proposition 1.12. （閉集合系）
距離空間 (X, d) の閉集合系 $\mathcal{F}_d = \{F \subset X | F$ は X の閉集合$\}$ は，以下の性質をみたす

$(F1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}_d, X \in \mathcal{F}_d$

$(F2)$ $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_d$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_d$

$(F3)$ $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}_d$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}_d$

Proof. 1. 定義より $\emptyset, X \in \mathcal{F}_d$

2. Proposition1.10 と Proposition1.11 より $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_d$ とすると $O_1 := F_1^c, O_2 := F_2^c$ は開集合であり，$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$ である．$\mathcal{F}_d = \mathcal{O}_d^c, (O_1 \cap O_2)^c = O_1^c \cup O_2^c$ より，$F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_d$

3. Proposition1.10 と Proposition1.11 より,$\forall F_\lambda^c := O_\lambda \in \mathcal{O}_d = \mathcal{F}_d^c, \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{O}_d^c = \mathcal{F}_d$

□

1.3 距離空間の近傍系と連続写像

Definition 1.13. （近傍）
(X, d) を距離空間とし，U を X の部分集合とする

U が X の点 a の近傍である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ a が U の内点である

Proposition 1.14. (X, d) を距離空間とし，U を X の部分集合とする

U が X の開集合である $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in U, U$ は点 a の近傍である

Proof. U を X の開集合であると仮定すると，$\forall a \in U, \exists \epsilon > 0, s.t. N(a, \epsilon) \subset U$．言い換えれば $\forall a \in U, a$ は U の内点であるから，U は a の近傍である．逆に，$\forall a \in U, U$ は a の近傍であるとすると，$\forall a \in U, a$ は U の内点である，言い換えれば U は X の開集合である □

Definition 1.15. （近傍系）
(X, d) を距離空間とする
X の点 a の近傍全体の集合を点 a の近傍系といい，$\mathcal{N}(a)$ または $\mathcal{N}_X(a)$ で表す

Definition 1.16. （連続）
$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．$f : X \to Y$ を写像とする

1. f が X の点 a で連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. x \in X, d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$

2. f が連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が X の各点で連続である

Proposition 1.17. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ を $a \in X$ について以下同値

1. f が点 a で連続
2. $\forall \epsilon > 0, f(N_X(a, \delta)) \subset N_Y(f(a), \epsilon)$ をみたす $\delta > 0$ が存在する
3. $\forall \epsilon > 0, N_X(a, \delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$ をみたす $\delta > 0$ が存在する
4. $\forall \epsilon > 0, f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon)) \in \mathcal{N}_X(a)$
5. $\forall U \in \mathcal{N}_Y(f(a)), f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_X(a)$

Proof. $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (5) \Longrightarrow (1)$

1. f が a で連続である $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. x \in N_X(a, \delta) \Longrightarrow f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon) \iff f(N_X(a, \delta)) \subset N_Y(f(a), \epsilon)$
2. $\forall \epsilon > 0, f(N_X(a, \delta)) \subset N_Y(f(a), \epsilon)$ とすると，$\forall x \in N(a, \delta), f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon)$．言い換えれば $x \in f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$
3. $d_Y(f(a), f(a)) = 0 < \epsilon$ より $a \in f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$ であり，(3) の仮定より $\exists \delta > 0, s.t. N_X(a, \delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$ なので，a は $f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$ の内点で，$\mathcal{N}_X(a)$ に属す
4. $U \in \mathcal{N}_Y(f(a))$ を任意に取ると，$\exists \epsilon > 0, s.t. N_Y(f(a), \epsilon) \subset U$ があって，仮定より $f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon)) \in \mathcal{N}_X(a)$ で，$f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(U)$ から，$f^{-1}(U)$ も a の近傍である．よって $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_X(a)$
5. $\forall \epsilon > 0, N_Y(f(a), \epsilon) \in \mathcal{N}_Y(f(a))$ で，仮定より $f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon)) \in \mathcal{N}_X(a)$ があるから，$\exists \delta > 0, s.t. N_X(a, \delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(a), \epsilon))$ が成り立つから，$\forall x \in N_X(a, \delta), f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon)$，これは $\forall x \in X, d_X(a, x) \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ である

□

Proposition 1.18. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ について以下同値

1. f が連続
2. (Y, d_Y) の開集合 O に対して，f による逆像 $f^{-1}(O)$ は常に (X, d_X) の開集合
3. (Y, d_Y) の閉集合 F に対して，f による逆像 $f^{-1}(F)$ は常に (X, d_X) の閉集合

Proof. $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$

1. 定義
2. $O := F^c$ とすると，(2) の仮定より，O の f による逆像 $f^{-1}(O)$ は常に (X, d_X) の開集合であるから，$f^{-1}(F) = \left(f^{-1}(O)\right)^c$ は閉集合．よって，(3) は成り立つ
3. 任意の開集合 $O \subset Y$ に対して，補集合 F は仮定より閉集合であるより，$f^{-1}(F)$ も閉集合であって，$f^{-1}(O) = \left(f^{-1}(F)\right)^c$ は開集合であるから，連続写像の定義より，f は連続である

□

2 位相空間の基礎

2.1 位相空間の定義と例

Definition 2.1. （位相・位相空間）
X を空でない集合とする．$\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$ は以下の条件をみたすとき，X の位相もしくは開集合系という

$(O1)$ $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$

$(O2)$ $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ なら $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

$(O3)$ $\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}$ なら $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

このとき, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という. また, $A \in \mathcal{O}$ のとき, A を $(X, \mathcal{O})$ の開集合といい, $A^c \in \mathcal{O}$ であるとき A を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合という

Example 2.2. 1. X が一つの元からなる集合

Proof. $X = \{x\}$ に対して，$\mathcal{O}_X$ は $\{\emptyset, \{x\}\}$ しか存在しない □

2. X が二つの元からなる集合

Proof.
$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 = \{\emptyset, X\} \\ \mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\} \\ \mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{2\}, X\} \\ \mathcal{O}_4 = \mathcal{P}(X) \end{cases}$$
□

3. X が三つの元からなる集合

Proof.
$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{O}}_1 = \mathcal{O}_1 \cup X \\ \widetilde{\mathcal{O}}_2 = \mathcal{O}_2 \cup \emptyset \\ \widetilde{\mathcal{O}}_3 = \mathcal{O}_3 \cup \{2\} \\ \widetilde{\mathcal{O}}_4 = \mathcal{O}_4 \cup \{1, 2\} \end{cases} \text{，ただし，} \begin{cases} X = \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1\}\} \\ \mathcal{O}_2 = \{\{2\}, X\} \\ \mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\} \\ \mathcal{O}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\} \end{cases}$$
□

Definition 2.3. 密着位相・密着空間
集合 X に対し，$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ とすると，$\mathcal{O}$ は X の位相となる．このとき，$\mathcal{O}$ を X の密着位相といい，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を密着空間という

Definition 2.4. （離散位相・離散空間） 集合 X に対し，$\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ とすると，$\mathcal{O}$ は X の位相となる．このとき $\mathcal{O}$ を X の離散位相といい，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を離散空間

Definition 2.5. （距離位相・距離化可能）
距離空間 (X, d) の開集合系 $\mathcal{O}_d = \{A \in \mathcal{P}(X) | \forall a \in A, \exists \epsilon > 0, s.t. N(a, \epsilon) \subset A\}$ は X の位相である．この $\mathcal{O}_d$ を距離 d から定まる距離位相という．特に，n 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d_2)$ において，距離 d_2 から定まる位相をユークリッド位相または通常の位相という
任意の距離空間は距離位相より位相空間とみなせるが位相空間は必ずしも距離空間とみなせない．位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，距離 d から定まる距離位相 $\mathcal{O}_d$ が元の位相 $\mathcal{O}$ と一致するような X 上の距離関数 d が存在するとき，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は距離化可能

Proposition 2.6. 密着位相 $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は一般的に距離化可能ではないが，離散位相 $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ は常に距離化可能である

Proof. X が二つ以上の元からなる集合とする．任意の距離位相について，$\forall x \in X, \{x\}^c$ は開集合で，密着位相が距離化可能になれるのは一点集合の場合しかないから，X の仮定と矛盾する
X 上の異なる二点の距離を全て 1 とおけば，X は距離空間になり，各点の $\frac{1}{2}-$ 近傍にはその点しか含まれないので，全ての一点集合は開集合になる．よって，この距離位相は離散位相であり，離散位相は距離化可能である □

2.2 位相空間の用語

Definition 2.7. （位相空間の閉集合）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$A^c \in \mathcal{O}$ であるとき，A を X の閉集合という

Proposition 2.8. （位相空間の閉集合系） 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合全体の集合 $\mathcal{F}$ は次をみたす．なお，$\mathcal{F}$ を閉集合系という

$(F1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$

$(F2)$ $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

$(F3)$ $\forall \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{F}, \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

Proof.
1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ は明らかで，$\overline{X} = X$ から X も $\mathcal{F}$ に属す
2. $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}, O_1 := F_1^c, O_2 := F_2^c$ とおくと，O_1, O_2 は開集合であって，$O_1 \cap O_2$ も開集合であるから $F_1 \cup F_2 = (O_1 \cap O_2)^c$ より閉集合である
3. $O_\lambda := F_\lambda^c$ とおけば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合であるから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right)$ は閉集合である

□

Definition 2.9. （内点・外点・境界点・内部・外部・境界）

1. $a \in X$ が A の内点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists O \in \mathcal{O}, s.t. x \in O$ かつ $O \subset A$
   A の内点全体の集合を A の内部といい，A^i で表す
2. $a \in X$ が A の外点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists O \in \mathcal{O}, s.t. x \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$
   A の外点全体の集合を A の外部といい，A^e で表す
3. $a \in X$ が A の境界点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O \Longrightarrow O \not\subset A$ かつ $O \cap A \neq \emptyset$
   A の境界点全体の集合を A の境界といいといい，A^f で表す

$A^e = (A^c)^i, A^f = (A^c)^f$ を注意すると，$X = A^i \bigsqcup A^e \bigsqcup A^f$

Definition 2.10. （触点・閉包）
(X, d) を距離空間とする．$A \subset X$
$a \in X$ が A の触点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall O \in \mathcal{O}, x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset$
A の触点全体の集合を A の閉包といい，$\overline{A}$ で表す
$A^i \subset A \subset \overline{A}$ と $\overline{A} = A^i \bigsqcup A^f$ は明らかに成り立つ

Proposition 2.11. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$A \subset X$ とすると，以下は成立する

1. A^i は $O \subset A$ をみたす X の開集合 O たち全体の和集合
2. A^i は A に含まれる X の開集合の中で最大のもの
3. $\overline{A}$ は $F \supset A$ をみたす X の閉集合 F たち全体の共通部分

4. $\overline{A}$ は A を含む X の閉集合の中で最小のもの

Proof. $x \in \{x \in X | \forall O \in \mathcal{O}, [x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset]\}$ とする．$F \in \mathcal{F}$ に対し、$F^c \in \mathcal{O}$ となるから、$\exists O \in \mathcal{O}, s.t. F^c = O \in \mathcal{O}, x \in O \Longrightarrow O \cap A \neq \emptyset$ より $x \in F^c \Longrightarrow F^c \cap A \neq \emptyset$ があるので、これの対偶をとると $F^c \cap A = \emptyset \Longrightarrow x \notin F^c$ である．$A \subset F$ のとき、$F^c \cap A = \emptyset$ なので、$x \notin F^c \iff x \in F$．よって $\forall F \in \mathcal{F}, A \subset F, x \notin F^c \Longrightarrow x \in F$ より $x \in \bigcap \{F \in \mathcal{F} | A \subset F\}$
$x \in \bigcap \{F \in \mathcal{F} | A \subset F\}$ とする、$O \in \mathcal{O}$ に対し、$O^c \in \mathcal{F}$ なので $A \subset O^c \Longrightarrow x \in O^c$ である．したがって、$A \cap O = \emptyset \Longrightarrow A \subset O^c \Longrightarrow x \in O^c$． これの対偶から $x \in O \Longrightarrow A \cap O \neq \emptyset$
以上，$A^i, \overline{A}$ の性質は位相空間にでも成立する □

Proposition 2.12. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$A \subset X$ とする

1. A は開集合 $\iff A = A^i$
2. A は閉集合 $\iff A = \overline{A}$

Proof.
1. A を開集合とすると, $A^i = \bigcup \{O \in \mathcal{O} : O \subset A\}$ であり, A も開であるから $A \subset A^i$ がある．また $A^i \subseteq A$ は常に成立するから，$A = A^i$
また，$A = A^i$ とすると $A \subset \bigcup \{O \in \mathcal{O} : O \subset A\}$ で，A は開集合である
2. A を閉集合とすると，$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}$ であり，A が閉であるから，$A \supset \overline{A}$ で，$A \subset \overline{A}$ は常に成り立つから $A = \overline{A}$
一方，$A = \overline{A}$ とすると，$A \supset \{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}$ であり，最小性より A も閉集合

□

Proposition 2.13. （相対位相・位相空間の部分空間）$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\emptyset \neq A \subset X$ とする．$\mathcal{O}_A = \{O \cap A | O \in \mathcal{O}\}$ とすると，$\mathcal{O}_A$ は A の位相である．この位相を A 上の $\mathcal{O}$ に関する相対位相といい，位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間という

Proof.
1. $\emptyset, A \in \mathcal{O}$ から $\emptyset, A \in \in \mathcal{O}_A$
2. $\forall O_1, O_2, \in \mathcal{O}_A, O_1, O_2 \subset A$ で $O_1 \cap O_2 \subset A$ から $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_A$
3. $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}_A, \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \subset A$ から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_A$

□

2.3 位相空間の近傍系と連続写像

Definition 2.14. （位相空間の近傍）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$A \subset X$ とする
$x \in X$ とすると A が x の近傍 $\overset{def}{\iff}$ x が A の内点である（つまり $x \in A^i$）
$(X, \mathcal{O})$ において，x の近傍全体の集合を x の近傍系といい，$\mathcal{N}_X(x)$ と表す

Proposition 2.15. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$A \subset X$ とする
A が X の開集合 $\iff \forall x \in A, A$ は x の近傍である

Proof. A が開集合とすると，$A \in \mathcal{O}$ で，$\exists U \subset A, s.t. \forall x \in A, U$ が x の近傍になれればいいから，$A \subset A$ より，$\forall x \in A, A \subset A$ から A が $x \in A$ の近傍になる逆に $\forall x \in A, A$ が近傍になるなら，$\forall x \in A, x \in A^i$ で $A = \bigcup A^i$ だから A も開集合である □

Definition 2.16. （位相空間の連続）
$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を写像とする

1. f が $x \in X$ で連続 $\iff \forall A \in \mathcal{N}_Y(f(x)), f^{-1}(A) \in \mathcal{N}_X(x)$
2. f が連続 $\iff \forall O \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$

Proposition 2.17. $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$\mathcal{F}_X,\mathcal{F}_Y$ をそれぞれの閉集合族とする．このとき，$f:X\to Y$ について以下同値

1. f が連続
2. f が任意の点 $x\in X$ で連続
3. $\forall F\in\mathcal{F}_Y, f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$

Proof. $(1)\iff(2),(3)\iff(1)$

1. 定義
2. $F\in\mathcal{O}_Y$ とすると $O:=F^c$ は開であり，$f^{-1}(O)$ も開であるから $f^{-1}(F)=\left(f^{-1}(O)\right)^c$ は閉であるから $\mathcal{F}_X$ に属す

$\square$

Proposition 2.18. $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y),(Z,\mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする
$f:X\to Y,g:Y\to Z$ が連続のとき，$g\circ f:X\to Z$ も連続

Proof. $O\in\mathcal{O}_z$ とする．g が連続であるから $g^{-1}(O)$ は開で，f も連続であるから $f^{-1}\left(g^{-1}(O)\right)$ も開であるから $(g\circ f)^{-1}(O)$ は開集合で書けるので，$g\circ f$ は連続写像である $\square$

Definition 2.19. （同相写像・同相）
$(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする

1. $f:X\to Y$ が $(X,\mathcal{O}_X)$ から $(Y,\mathcal{O}_Y)$ への同相写像（位相同型写像）である $\overset{def}{\iff}$ f が全単射で，f も逆写像 f^{-1} も共に連続である
2. $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が同相（位相同型）である $\overset{def}{\iff}$ $(X,\mathcal{O}_X)$ から $(Y,\mathcal{O}_Y)$ へ何らかの同相写像 $f:X\to Y$ が存在する

$(X,\mathcal{O})$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が同相であることを $(X,\mathcal{O}_X)\cong(Y,\mathcal{O}_Y)$ や $X\cong Y$ で表す

Proposition 2.20. 同相関係 $\cong$ は位相空間の間の同値関係である

Proof.
1. $id:X\to X$ より，$X\cong X$
2. $X\cong Y$ とすると，$\exists f:X\to Y$ は同相写像であるから f は全単射であるので $\exists f^{-1}:Y\to X$ も同相写像より $Y\cong X$
3. $X\cong Y,Y\cong Z$ とすると，$\exists f:X\to Y,\exists g:Y\to Z$ は同相写像であり，f,g は全単射であるから $\exists g^{-1}:Z\to Y,f^{-1}:Y\to X$ も同相写像であるので，$h^{-1}:=(g\circ f)^{-1}$ と書ける同相写像が存在し，$X\cong Z$ になる

$\square$

3　コンパクト性とハウスドルフ性

3.1　開基と基本近傍系

Definition 3.1. （位相の大きさ）
$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を集合 X の位相とする．$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ であるとき，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より小さい（弱い・粗い）であるといい，$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より大きい（強い・細かい）位相であるという

Definition 3.2. （生成される位相）
$X \neq \emptyset$ とし，$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ とする．$\mathcal{S}$ を含む最も小さい位相を $\mathcal{S}$ によって生成される位相といい，$\mathcal{O}(\mathcal{S})$ で表す

Definition 3.3. （準開基）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ が $\mathcal{S}$ によって生成される位相であるとき，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{O}$ の準開基であるという

Definition 3.4. （開基）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の部分集合とする．$\mathcal{O}$ の任意の開集合 O に対して $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ をみたす $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}$ が存在するとき，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基であるという

開基 $\mathcal{B}$ に対し $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ となるので，開基は $\mathcal{O}$ の準開基でもある

Proposition 3.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ とすると，以下同値

1. $\mathcal{B}$ が位相 $\mathcal{O}$ の開基である
2. $\forall x \in O \in \mathcal{O}, x \in B$ かつ $B \subset O$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ が存在する

Proof. $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基であるから，$\forall O \in \mathcal{O}, O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}} B$．よって，$\forall x \in O, x \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}}$ から条件をみたす $B \in \mathcal{B}$ は存在する
逆に，$\forall x \in O \in \mathcal{O}, x \in B_x \subset O$ をみたす $B \in \mathcal{B}$ が存在すると仮定すると，$B_x \subset O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}}$ をみたす $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ が存在し（x の任意性より），このとき $O \in \mathcal{O}$ より $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ で，開基となる □

Definition 3.6. （基本近傍系）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$x \in X$ の近傍系 $\mathcal{N}(x)$ の部分集合 $\mathcal{B}(x)$ について，x の任意の近傍 $N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $B \subset N$ となるような $B \in \mathcal{B}(x)$ が存在するとき，$\mathcal{B}(x)$ を点 x の基本近傍系という

Proposition 3.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の開基とすると，$x \in X$ を含む $\mathcal{B}$ の元の全体の集合 $\mathcal{B}(x)$ とすれば，$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系である

Proof. $\forall x \in X, B_\lambda \in \mathcal{B}$ は x を含むから，B_λ は x に対する近傍であり，$\mathcal{B}$ は開基であるから，$\forall N \in \mathcal{N}(x), N = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ となり，$B_\lambda \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset N$ から，$\mathcal{B}(x) = \bigcup B_\lambda$ より，$\mathcal{B}(x)$ は x の基本近傍系になる □

Proposition 3.8. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{O}_Y$ の準開基とする．写像 $f : X \to Y$ が連続であること $\iff$ $\forall U \in \mathcal{S}, f^{-1}(U)$ が X の開集合である

Proof. $\forall U \in \mathcal{S} \subset \mathcal{O}_Y, f$ は連続であるから $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ であるので，$f^{-1}(U)$ は X の開集合である
逆に $\forall U \in \mathcal{S} \subset \mathcal{O}_Y, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ から，連続写像の定義より，f は連続写像
$\mathcal{S}$ は準開基であるから，$\mathcal{O}_Y$ の性質は全て成り立つ □

3.2　可算公理と可分性

Definition 3.9. （第一・第二　可算公理）
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする

1. X の各点が高々可算個の近傍からなる基本近傍系を持つとき，$(X, \mathcal{O})$ は第一可算公理をみたすという
2. $\mathcal{O}$ が高々可算個の開集合からなる開基を持つとき，$(X, \mathcal{O})$ は第二可算公理をみたすという

Proposition 3.10. 距離空間は第一可算公理をみたす

Proof. $\mathcal{N}(x) := \left\{ N\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$ を考えると，$n \in \mathcal{N}$ から $\mathcal{N}(x)$ は高々無限可算個あって，$\forall U_n = N\left(x, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{N}(x), \exists N\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \subset U_n$ から，$\mathcal{N}(x)$ は基本近傍系である．以上，$(X, \mathcal{O}_d)$ は第一可算公理をみたす □

Proposition 3.11. 第二可算公理をみたす位相空間は第一可算公理をみたす

Proof. Proposition 3.7 より，開基 $\mathcal{B}$ に対して，基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ は部分集合であるより，元の数も高々可算個ある．よって第二可算公理をみたす位相空間は第一可算公理にもみたす □

Proposition 3.7 より，逆は成り立たない

Definition 3.12. （稠密）
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A に対して，$\overline{A} = X$ をみたすとき，A は $(X, \mathcal{O})$ の稠密な部分集合であるという．言い換えれば，$\forall x \in X, x$ は A の内点もしくは境界点である

Definition 3.13. （可分）
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が高々可算かつ稠密な部分集合を持つとき，$(X, \mathcal{O})$ は可分な部分位相空間という

Proposition 3.14. 第二可算公理をみたす位相空間は可分であり，可分な距離空間は第二可算公理をみたす

Proof. 第二可算公理より，高々可算個の元を持つ開基 $\mathcal{B}$ は $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書け，各 B_n に対して，x_n を取り，集合 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ であるから，この集合の閉包はその自身より，$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ は閉集合．よって第二可算公理をみたす X は可分な位相空間である
逆に，距離空間が可分と仮定すると，高々可算個かつ稠密な部分集合を持つ X に対し，$\forall O \in \mathcal{O}_d, \forall x_\lambda \in O, \exists \epsilon_{x_\lambda} > 0, s.t. O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N(x_\lambda, \epsilon_\lambda)$ から，Λ も可算集合．よって，$(X, \mathcal{O}_d)$ は第二可算公理もみたす □

3.3　積位相と積空間

Definition 3.15. （積位相と積空間）
$(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする.直積 $X_1 \times X_2$ の部分集合族 $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 | U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ により生成される位相を $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の積位相といい,$\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ で表し,位相空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2)$ を，$(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ の積空間といい，$(X_1, \mathcal{O}_1) \times (X_2, \mathcal{O}_2)$ で表す．$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ の開基であり，可算個の位相空間についても同様に積空間を定義できる

Proposition 3.16. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする．$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_2, p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ は射影，つまり $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対して，$p_1(x_1, x_2) = x_1, p_2(x_1, x_2) = x_2$ とする

1. $i = 1, 2, p_i$ は積空間 $(X_1, \mathcal{O}_1) \times (X_2, \mathcal{O}_2)$ から $(X_i, \mathcal{O}_i)$ への連続写像である

2. 積位相 $\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ は，射影 $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ が連続となるような $X_1 \times X_2$ 上の最小の位相である

Proof. 1. $\forall U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2, U_1 \times U_2 \in \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ であるから，$U_1 \times U_2$ も開集合で，言い換えれば $p_1^{-1}(U_1), p_2^{-1}(U_2)$ は開集合である．連続写像の定義より，p_1, p_2 は連続写像である

2. $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ とする.$\forall O_1 \times O_2 \in \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2, O_1 \times O_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ より,$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ の開基である.$p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \subset X_1 \times X_2$ で $p_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2 \subset X_1 \times X_2$ から $\mathcal{B}$ を開基とする積位相 $\mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2$ は $X_1 \times X_2$ 上最小の位相

□

Definition 3.17. （開写像）
$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．「$\forall U \in \mathcal{O}_X, f(U) \in \mathcal{O}_Y$」をみたすとき，$f$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への開写像であるという

Proposition 3.18. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}_X$ の開基であり，$\forall U \in \mathcal{B}, f(U) \in \mathcal{O}_Y$ となるとき，f は $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への開写像である

Proof. $\mathcal{B}$ はか $\mathcal{O}_X$ の開基であるから $\forall U \in \mathcal{B}, U \in \mathcal{O}_X$，また $\mathcal{B}$ は開基であるより $\forall O \in \mathcal{O}_X, O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ をみたす $\mathcal{B}_0 = \bigcup \left\{ B : O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \right\} \subset \mathcal{B}$ が存在する．言い換えれば，$\forall O \in \mathcal{O}_X, f(O) = f(\bigcup B)$ から，仮定より $\mathcal{O}_Y$ に属す．よって，f は開写像 □

Proposition 3.19. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$(X_1, \mathcal{O}_1) \times (X_2, \mathcal{O}_2)$ を積空間とする．このとき，$i = 1, 2$ に対して，射影 $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ は開写像である

Proof. $\forall O_1 \in \mathcal{O}_1, O_2 \in \mathcal{O}_2, p_1(O_1 \times O_2) = O_1 \in \mathcal{O}_1, p_2(O_1 \times O_2) = O_2 \in \mathcal{O}_2$ から $\forall O_1 \times O_2 \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2, p_1, p_2$ による像はそれぞれ $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の開集合であるから，p_1, p_2 は開写像である □

3.4 商写像と商空間

Definition 3.20. （像位相）
$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間,$Y \neq \emptyset$ とする.$f : X \to Y$ を写像とすると,$\mathcal{O}(f) = \left\{ A \in \mathcal{P}(Y) \middle| f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X \right\}$ は Y の位相であり，この位相 $\mathcal{O}(f)$ を，写像 f の像位相という

Proposition 3.21. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}(f)$ のとき，f は $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の連続写像である

Proof. $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}(f) = \left\{ A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X \right\}$ から，言い換えれば $\forall O \in \mathcal{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$．連続写像の定義より，$f$ は連続である □

Proposition 3.22. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を全射とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の連続写像であり，かつ開写像であるならば $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}(f)$ である

Proof. f は連続写像かつ開写像であるから $\forall U \in \mathcal{O}_X, f(U) \in \mathcal{O}_Y$．$f$ が全射であるから $\forall V \in \mathcal{O}_Y, \exists U \in \mathcal{O}_X, s.t. f^{-1}(V) \subset U \in \mathcal{O}_X$．よって，像位相の定義より $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}_Y$ □

Proposition 3.23. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), (X_3, \mathcal{O}_3)$ を位相空間とし，$f : X_1 \to X_2, g : X_2 \to X_3$ を写像とする．$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(f)$ であり，合成写像 $g \circ f$ が $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_3, \mathcal{O}_3)$ への連続写像なら，g は $(X_2, \mathcal{O}_2)$ から $(X_3, \mathcal{O}_3)$ への連続写像である

Proof. $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(f) = \left\{ V \in \mathcal{P}(X_2) : f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_1 \right\}$ で $g \circ f$ は連続であるから $\forall W \in \mathcal{O}_3$, $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) \in \mathcal{O}_1$ より，$g^{-1}(W) \in \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}_2$ から，連続写像の定義より，g は連続である □

Definition 3.24. (同値類・商集合・商写像)
X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき，$x \in X$ に対して，X の部分集合 $C(x) = \{y \in X | x \sim y\}$ を x の同値類という．同値類全体の集合を X の同値関係 $\sim$ による商集合といい，$X/\sim$ と書く．つまり $X/\sim = \{C(x) | x \in X\}$．$\forall x \in X$ に商集合 $X/\sim$ の元 $C(x)$ を対応させる，X から $X/\sim$ への自然な射影 $p : X \to X/\sim$ を集合 X の同値関係 $\sim$ による商写像という

Definition 3.25. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\sim$ を X の同値関係とする．また $p : X \to X/\sim$ を同値関係 $\sim$ による商写像とし，$\mathcal{O}(p)$ を p による $\mathcal{O}$ の像位相とする
このとき，$\mathcal{O}(p)$ を $X/\sim$ 上の商位相といい，$(X/\sim, \mathcal{O}(p))$ を同値関係 $\sim$ による $(X, \mathcal{O})$ の商空間という

Proposition 3.26. $X, Y \neq \emptyset, f : X \to Y$ を写像とする．X における同値関係を

$$x \sim y \text{ in } X \iff f(x) = f(y) \text{ in } Y$$

と定め，$p : X \to X/\sim$ を同値関係 $\sim$ による商写像とする

1. $f = \tilde{f} \circ p$ をみたす写像 $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ が一意的に存在する
2. $f : X \to Y$ が全射ならば $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ は全単射である
3. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を全射とする．f が $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像であり，かつ開写像であるならば，$\tilde{f}$ は商空間 $(X/\sim, \mathcal{O}(p))$ から位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への同相写像である

Proof. 1. $f : X/\sim \to Y, p(x) \mapsto f(x)$ であり，$p(x) = p(y)$ とすると，$C(x) = C(y)$ であるから $x \sim y$, $\sim$ の定義より $f(x) = f(y)$ から, Well-defined である. また $f = \tilde{g} \circ p$ をみたす $\tilde{g} : X/\sim \to Y$ も存在すると仮定すると, $\tilde{g}(p(x)) = f(x) = \tilde{f}(p(x))$ で，well-defined より $\tilde{g} = \tilde{f}$．よって $\tilde{f}$ は一意的に存在する

2. f は全射とすると，$\forall y' \in Y, \exists y \in X, s.t. f(y) = y'$．また $f = \tilde{f} \circ p$ から，$\tilde{f}(p(y)) = y'$，よって，$\forall y' \in Y, \exists y_0 \in X/\sim, s.t. \tilde{f}(y_0) = y'$ だから，$\tilde{f}$ は全射である．
また，$\tilde{f}(p(x)) = \tilde{f}(p(y))$ とすると，$f(x) = f(y) \Longrightarrow x \sim y$ から，$x \sim y$ で，$p(x) = p(y)$．
よって，$\tilde{f}$ は単射である
以上より，$\tilde{f}$ は全単射である

3. Proposition 3.22 より，$\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}_Y$．1 と 2 の証明より，全単射 $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ は一意的に存在し，$p = \tilde{f}^{-1} \circ f$ で，p と f が共に連続であるから，Proposition 3.23 より，$\tilde{f}^{-1}$ も連続である．以上，$\tilde{f}$ は同相写像である

□

3.5 ハウスドルフの分離公理

Definition 3.27. (ハウスドルフの分離公理・ハウスドルフ空間) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．以下の条件 $(T2)$ をハウスドルフの分離公理という

$$X \text{ での任意の異なる 2 点 } x, y \text{ に対して，} \exists U, V \in \mathcal{O}, s.t. x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

ハウスドルフの分離公理をみたす位相空間をハウスドルフ空間という

Proposition 3.28. 任意の距離空間 (X, d) に対し，距離位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ はハウスドルフ空間である

Proof. $\forall x, y \in X, d(x, y) = \epsilon_0$ をみたす x, y に対して，$N\left(x, \frac{1}{3}\epsilon_0\right) \cap N\left(y, \frac{1}{3}\epsilon_0\right) = \emptyset$ から，(X, d) はハウスドルフ空間である □

Proposition 3.29. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるとき，$\forall x\in X$，一点集合 $\{x\}$ は X の閉集合である

Proof. $y\in X\backslash\{x\}$ を任意に取り，X はハウスドルフ空間であるから，$\exists x\in U_x\in\mathcal{O}, y\in U_y\in\mathcal{O}, s.t. U_x\cap U_y=\emptyset$ であるから y の任意性より，$X\backslash\{x\}=\bigcup_{x\neq y}U_y$ である．よって，$X\backslash\{x\}$ は開集合で，$\{x\}$ は閉集合である □

Proposition 3.30. ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフ空間である

Proof. X をハウスドルフ空間とし，$X'\subset X$ とする．X がハウスドルフであるから，$\forall x,y\in X, \exists U,V\in\mathcal{O}, s.t. x\in U, y\in V, U\cap V\neq\emptyset$．ここで $X'\subset X, \mathcal{O}'\subset\mathcal{O}$ であるから，$\forall x',y'\in X', U_{x'},U_{y'}\in\mathcal{O}', U_{x'}\cap U_{y'}=\emptyset$ をみたす $U_{x'},U_{y'}$ が存在する．よって $(X',\mathcal{O}')$ もハウスドルフ空間である □

Proposition 3.31. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるための条件 $(T2)$ は次の条件 $(T2)'$ を同値である

$$\forall x\in X, x\text{ の全ての閉近傍（近傍かつ閉）の共通部分は点 }x\text{ のみからなる}$$

Proof.

1. T2 が成立すると仮定すると，交わらない $U_x,U_y\in\mathcal{O}$ が存在するから，これらの近傍より小さい近傍は全て閉であり，それらの近傍も交わらないから，共通部分は中心となる x,y しかない，言い換えれば T2' である
2. T2' が存在すると仮定すると，全ての $x\in X$ の閉近傍の内部も交わらないから，$T2$ である

□

3.6 コンパクト性

Definition 3.32. （(有限）被覆・部分被覆・開被覆）
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間，A を X の部分集合とする．
X の部分集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ であるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X における A の被覆という．特に Λ が有限集合であるとき，有限被覆という．また，$\Lambda'\subset\Lambda$ で，被覆の部分集合 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ も A の被覆であるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆という．$\forall\lambda\in\Lambda, U_\lambda$ が X の開集合であるとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X における A の開被覆という

Definition 3.33. （コンパクト性・コンパクト空間）
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間，$A\subset X$ とする

$$A\text{ がコンパクトである }\overset{def}{\iff} A\text{ の任意の開被覆が有限な部分被覆を持つ}$$

$A\subset X$ がコンパクトであるとき，A は X のコンパクト集合であるという．また，X 自身がコンパクトであるとき，X はコンパクト空間という

Example 3.34.

1. $\mathbb{R}$ はコンパクトでない

   Proof. $\mathbb{R}$ がコンパクトと仮定すると，任意の開被覆は有限な部分被覆を持つ．$\forall n\in\mathbb{N}, \bigcup_{k=1}^{\infty}(-n,n)$ は開被覆であるが，任意の有限部分集合は $\bigcup_{k=1}^{N}(-n,n)\subsetneq\mathbb{R}$ から，被覆ではない．よって，コンパクトではない □

2. 有限個の点からなる任意の位相空間はコンパクトである

   Proof. $X=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}, \#X<\infty$ とすると，$\mathcal{P}(X)$ は有限な部分被覆であり，A の最小の被覆でもある □

3. 密着空間はコンパクトである

   Proof. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ から，X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{O}$ から，$\exists\lambda_0 \in \Lambda, s, t, X = \bigcup_{k=1}^{\lambda_0} U_k$．このとき，この部分被覆は有限であるから，コンパクトである □

4. 離散空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトならば，X は有限集合である

   Proof. $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ であるから，$\{\{x\} : x \in X\}$ は X の被覆である．$\{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$ をみたす $\{x_k\} \in \{\{x\} : x \in X\}$ が存在するから，$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ □

Proposition 3.35. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，A を X の部分集合とする

A が X のコンパクト集合である $\iff$ $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクト空間である

Proof. A が X のコンパクト集合であるから，任意の開被覆に対して有限な部分被覆が存在する．$\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ もコンパクトである．よって $(A, \mathcal{O}_A)$ は $(X, \mathcal{O})$ の部分空間であり，コンパクトである
逆に，$(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクト空間とすると，$\mathcal{O}_A = \{O \cap A : O \in \mathcal{O}\}$ はコンパクトであり，$\mathcal{O}$ または A がコンパクトである．$\mathcal{O}$ がコンパクトのとき，X はコンパクト集合であるから，その部分集合 A のコンパクトである，A がコンパクトのときは説明する必要がない □

Proposition 3.36. コンパクト空間の閉集合はコンパクトである

Proof. $F \subset X$ が閉とし，F の任意の開被覆を $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とする．X がコンパクトであるから，開被覆 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cup (X \backslash F)$ に対して，有限な部分被覆が存在する．言い換えれば $X = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} \cup (X \backslash F)$ である．両辺共に F との共通部分とをとると $F = (U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}) \cap F = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$．よって，この閉集合も有限な部分被覆を持つから，コンパクトである □

Proposition 3.37. $(X, \mathcal{O}_X)$ を $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，A が X のコンパクト集合なら $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合である
言い換えらば，コンパクト性は連続写像で伝わる性質である

Proof. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $f(A) \subset Y$ の開被覆とすると $f(A) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$．$f$ は連続であるから $\forall f^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}_X$ かつ $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ となる．よって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ は $A \subset X$ の開被覆である．ここで A はコンパクトであるから，$\exists N \in \mathbb{N}, s.t. A \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(U_k)$ から，連続写像の性質より $f(A) \subset \bigcup_{k=1}^{N} f\left(f^{-1}(U_k)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_k$．よって，$f(A)$ も有限な部分被覆を持つ． □

3.7 コンパクトなハウスドルフ空間

Proposition 3.38. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とし，A を X のコンパクト集合とする．このとき，A に属さない点 $x \in X$ と A に対して，$x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ をみたす $U, V \in \mathcal{O}$ が存在する

Proof. A はコンパクト集合であるから $\exists U_k \subset \mathcal{O}, s.t. A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$．よって，$V := \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ とする．また，$x \in X \backslash A$ から，$x \in U_\lambda \subset X \backslash V$ を考えると $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cap V = \{x\} \cap V = \emptyset$ から $U = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とすればいい □

Proposition 3.39. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とする．A が X のコンパクト集合ならば A は X の閉集合である

Proof. A を開集合とすると $X \backslash A$ は閉集合であり，Proposition 3.38 より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $X \backslash A$ の開被覆であるから，$A = X \backslash \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は閉集合である □

Proposition 3.40. $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクト空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする

1. f が連続写像なら f は閉写像である
2. f が全単射で連続写像ならば f は同相写像である

Proof.
1. X がコンパクト集合であるから，部分閉集合 A もコンパクトで，f は連続写像であるから $f(A)$ もコンパクト集合．また Proposition 3.39 より，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ はハウスドルフ空間であるから $f(A)$ は閉集合である．よって f は閉写像である
2. f^{-1} も連続であることを示せばいいから，(1) より f は閉写像であり，$f^{-1} : f(X) \to X$ も連続であるので，f は同相写像である

□

4 連結性

Definition 4.1. （連結）
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$

Proposition 4.2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，以下同値

1. $(X, \mathcal{O})$ が連結ではない
2. X の開集合 U, V で $U \cup V = X, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ をみたすものが存在
3. X の閉集合 U, V で $U \cup V = X, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ をみたすものが存在

Proof. $(X, \mathcal{O})$ は連結でない $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} \neq \{\emptyset, X\}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists U \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$
$\Longleftrightarrow$ U は開かつ閉である部分集合である $\Longleftrightarrow$ $V = X \backslash U$ も開かつ閉である集合
V の定義より $U \cap V = \emptyset, U \cup V = X$ であり，$\{\emptyset, X\} \neq \{\emptyset, U, X\}$ から，$U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$
以上より，2, 3 は 1 と同値である □

Definition 4.3. （連結集合）
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，X の空でない部分集合 A が，部分空間として連結な位相空間であるとき，A は連結であるといい，A は $(X, \mathcal{O})$ の連結集合であるという
言い換えれば，以下の条件をみたす開集合 $U, V \in \mathcal{O}(X)$ が存在しない

1. $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$
2. $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$
3. $A \cap U \neq \emptyset$
4. $A \cap V \neq \emptyset$

Proposition 4.4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と，X の空でない部分集合 A について，以下は同値

1. $(A, \mathcal{O}_A)$ が連結でない
2. X の開集合 U, V で $A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ をみたすものが存在する
3. X の閉集合 U, V で $A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$ をみたすものが存在する

Proof. 相対位相の定義より自明 □

Proposition 4.5. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．A が $(X, \mathcal{O}_X)$ の連結集合 $\Longrightarrow$ $f(A)$ が $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の連結集合

Proof. 対偶から考える．$f(A)$ が $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の連結集合でないとすると，$\exists f(U), f(V) \in \mathcal{O}_Y, s.t.$

1. $(f(A) \cap f(U)) \cap (f(A) \cap f(V)) = \emptyset$
2. $(f(A) \cap f(U)) \cup (f(A) \cap f(V)) = f(A)$
3. $f(A) \cap f(U) \neq \emptyset$
4. $f(A) \cap f(V) \neq \emptyset$

f は連続写像であるから，U, V に対して

1. $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

2. $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$

3. $A \cap U \neq \emptyset$

4. $A \cap V \neq \emptyset$

をみたすものが存在するから，A は $(X, \mathcal{O}_X)$ の連結集合ではない □

Proposition 4.6. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，X の空でない部分集合 A, B について，A が連結集合で $A \subset B \subset \overline{A}$ が成り立つならば，B も連結集合である

Proof. B が連続集合でないと仮定すると，$U, V \in \mathcal{O}$ に対して，以下の条件をみたすものが存在する

1. $(B \cap U) \cap (B \cap V) = \emptyset$

2. $(B \cap U) \cup (B \cap V) = B$

3. $B \cap U \neq \emptyset$

4. $B \cap V \neq \emptyset$

$A \subset B$ であるから

1. $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

2. $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$

3. $A \cap U \neq \emptyset$

4. $A \cap V \neq \emptyset$

A は連続集合ではない，条件と矛盾する □

Proposition 4.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $(X, \mathcal{O})$ の連結な部分集合族とする
$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結集合

Proof. $A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結集合でないとすると

1. $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

2. $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$

3. $A \cap U \neq \emptyset$

4. $A \cap V \neq \emptyset$

をみたす $U, V \in \mathcal{O}$ が存在する．(1) より，$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$
これは条件の $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ と矛盾するから，U は連結集合 □

Definition 4.8. （連結成分） 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の 2 点 x, y に対し，x, y 両方を含むような X の連結部分集合 A が存在するとき，$x \sim y$ とすれば，$\sim$ は X 上の同値関係である．X 上の同値関係 $\sim$ による同値類を位相空間 X の連結成分という

Proposition 4.9. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点 x を含む連結成分を C_x と表す

1. C_x は x を含む X の最大の連結集合である

2. C_x は閉集合である

Proof. 1. C_x は X の連結集合であることは定義より得られるから，以下は最大性だけ示す．B_x も x を含む X の連結集合とすると，$B_x \subseteq C_x$ を証明すればいい．$\forall y \in B_x, x, y$ が共に B_x に属しているので，$y \sim x$ であり，$C_x := \{z \in X : z \sim x\}$ の定義より，$y \in C_x$ である．よって，$B_x \subseteq C_x$

2.

Lemma 4.10. $A \subset X$ が連結集合であれば，$\overline{A}$ も連結集合である

Proof. $\overline{A}$ が連結でないと仮定すると，$\exists U, V \subset X, s.t. \overline{A} = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ で．$A \subseteq \overline{A}$ より，$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ である．$A \cap U = \emptyset$ とすると，$A \subseteq V$ で，V が開集合であるので，$\overline{A} \subseteq \overline{V} \subseteq V$ であることが矛盾する．よって，$A \cap U \neq \emptyset$．同様に，$A \cap V \neq \emptyset$ もあるから，A が連結集合であることと矛盾する．よって，$\overline{A}$ は連結集合である □

補題より，$\overline{C_x}$ も連結集合であるが，(1) より，C_x が最大の連結集合であることから，$\overline{C_x} \subseteq C_x$．閉包の性質より，$C_x \subseteq \overline{C_x}$ があるから，以上，$C_x = \overline{C_x}$ で，閉集合である

□

Definition 4.11. （完全不連結） どの連結成分もただ 1 点からなる位相空間を完全不連結であるという

Proposition 4.12. 連結な位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i), (i = 1, 2, \cdots, n)$ の積空間 $(X_1, \mathcal{O}_1) \times (X_2, \mathcal{O}_2) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{O}_n)$ は連結である

Proof. 帰納法から考える
$n = 2$ では，連結な位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ の積空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \divideontimes \mathcal{O}_2)$ では，$A_{x_1} := \{x_1\} \times X_2 \subset X_1 \times X_2$ で，X_2 は連結であるから，A_{x_1} も連結である．同様に，$A_{x_2} := X_1 \times \{x_2\} \subset X_1 \times X_2$ も連結である．$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ が任意に取ったから，$X_1 \times X_2$ も連結である
$n = k$ のときも連結であると仮定すると，$n = k + 1$ では
$A_{{x_1}^{(k)}} := \left\{{x_1}^{(k)}\right\} \times X_{k+1}$ とし，X_{k+1} は連結であるから，$A_{{x_1}^{(k)}}$ も連結である．また，$A_{x_2} := \prod_{n=1}^{k} X_n \times \{x_2\}$ とすると，帰納法の仮定より，$\prod_{n=1}^{k} X_n$ は連結であるから，A_{x_2} も連結である．
$x_1 \in \prod_{n=1}^{k} X_n, x_2 \in X_{k+1}$ が任意に取ったから，$\prod_{n=1}^{k+1} X_n$ も連結である □

Problem 4.13. 1. 通常の位相に関して，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は連結であることを示せ

2. 通常の位相に関して，$\mathbb{R}$ の任意の開区間 (a, b)，閉区間 $[a, b]$
また $(a, b], [a, b), (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (\infty, b]$ などの区間はすべて連結であることを示せ

Proof. ここで，$\mathcal{O}_d = \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in A, \exists \epsilon > 0, s.t. N(a, \epsilon) \subset A\}$

1. $\mathbb{R}$ が連結でないと仮定すると，$\exists U, V \in \mathcal{O}(\mathbb{R}), s.t.$

   (a) $\mathbb{R} \cap U \cap V = \emptyset$

   (b) $(\mathbb{R} \cap U) \cup (\mathbb{R} \cap V) = \mathbb{R}$

   (c) $\mathbb{R} \cap U \neq \emptyset$

   (d) $\mathbb{R} \cap V \neq \emptyset$

   で，(a)(b) より，$U \cap V = \emptyset, U \cup V = \mathbb{R}$ であるが，$U := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ と仮定すると，$a = \sup U$ で，$U \cup V = \mathbb{R}$ より，$a \in U$ または $a \in V$ となる．U, V は開集合なので，$U \not\ni \sup U = a = \inf V \notin V$ である．よって，$a \in \mathbb{R}$ であるが，$a \notin U$ かつ $a \notin V$ である．$U \cup V = \mathbb{R}$ と矛盾する．以上，$\mathbb{R}$ は連結である

2. $(a,\infty),[a,\infty),(-\infty,b),(\infty,b]$ は $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ の系なので
   $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ だけ示せばいい
   X を $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ のどれか一つの区間とし，X が連結でないとすると，空でない互いに交わらない開かつ閉部分集合 A,B が存在して，$X=A\cup B, a\in A, b\in B, a<b$ とする．$\alpha:=\sup\{y\in\mathbb{R}:[a,y)\subset A\}$ とおくと，$\alpha\leq b$ で $\alpha\in X$．よって，$\alpha\in\overline{A}=A$．これは A が開集合であることと矛盾するので，X は連結である

□

4.1 弧状連結性

Definition 4.14. （弧・始点・終点）
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．通常の位相が入った閉区間 $[0,1]$ から $(X,\mathcal{O})$ への連続写像 $f:[0,1]\to X$ を，位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における弧といい，$f(0)$ を始点，$f(1)$ を終点という
このとき，2 点 $f(0)$ と $f(1)$ は $(X,\mathcal{O})$ における弧 f によって結ぶことができるという

Definition 4.15. （弧状連結）
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ は，任意の 2 点を弧によって結ぶことができるとき，弧状連結であるという
弧によって結ぶことができるという関係は，X 上の同値関係である．この同値関係による同値類を，位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の弧状連結成分という

Definition 4.16. （弧状連結な集合）
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 A が，部分空間 $(A,\mathcal{O}_A)$ として弧状連結であるとき，A は $(X,\mathcal{O})$ において弧状連結な集合であるという
つまり，A が弧状連結であるとは，A の任意の 2 点 $a,b\in A$ に対し，連続写像 $f:[0,1]\to X$ で $f(0)=a, f(1)=b, f([0,1])\subset A$ をみたすものが存在すること

Example 4.17. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は弧状連結である

Proof. $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\gamma(t)&=(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y} &(16)\\ &=((1-t)x_1+ty_1,(1-t)x_2+ty_2,\cdots,(1-t)x_n+ty_n) &(17)\end{aligned}$$

と設定すればいい □

Proposition 4.18. 弧状連結な位相空間は連結である

Proof. $(X,\mathcal{O})$ が弧状連結であるが，連結でないと仮定すると，$\exists\emptyset\neq U,V\subset X, s.t. U\cap V=\emptyset, X=U\cup V$ となる．$U,V\neq\emptyset$ であるから，$x\in U, y\in V$ をとり，弧状連結より $\exists\gamma:[0,1]\to X$ で，$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y,\gamma([0,1])\subset X$ である．すると γ の連続性より，$\gamma^{-1}(U)$ と $\gamma^{-1}(V)$ は $[0,1]$ は $[0,1]$ の開集合で，$X=U\cup V$ より $[0,1]=\gamma^{-1}(U)\cup\gamma^{-1}(V)$ であり，$U\cap V=\emptyset$ より $\gamma^{-1}(U)\cap\gamma^{-1}(V)=\emptyset$ である．さらに，$0\in\gamma^{-1}(U), 1\in\gamma^{-1}(V)$ であるから，$[0,1]$ は連結でないが，$[0,1]\subset\mathbb{R}$ は連結であるので，矛盾．よって，弧状連結な位相空間は連結である □

Proposition 4.19. $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f:X\to Y$ を連続写像とする．このとき

$$X\text{ が弧状連結}\Longrightarrow f(X)\text{ が弧状連結}$$

Proof. f の定義より，$\forall x,y\in X,\exists a,b\in f(X), s.t. f(x)=a, f(y)=b$ であり，X が弧状連結であるから，$\exists\gamma:[0,1]\to X, s.t. \gamma(0)=x,\gamma(1)=y$ で，f,γ がともに連続であるから，$f\circ\gamma$ も連続である．また，$(f\circ\gamma)(0)=a,(f\circ\gamma)(1)=b$ であり，$(f\circ\gamma)([0,1])\subset f(X)$ であるから，$f\circ\gamma$ は $f(X)$ における弧である．よって，$f(X)$ は弧状連結である □

5 分離公理

Definition 5.1. （第一分離公理・Fréchet 公理・T_1 空間）
次の条件を第一分離公理または Fréchet 公理といい，これをみたす位相空間 $(X,\mathcal{O})$ を T_1 空間という

$$x \neq y \text{ となる } \forall x,y \in X \text{ に対し，} x \in O, y \notin O \text{ となる } O \in \mathcal{O} \text{ が存在する}$$

Proposition 5.2. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が T_1 空間である $\iff$ $\forall x \in X, \{x\}$ は閉集合である

Proof. $\Longrightarrow$
$(X,\mathcal{O})$ が T_1 空間とすると，任意の $x \in X$ に対して，$\forall y \in X \setminus \{x\}, y \neq x$ であり，T_1 空間の定義より，$y \in O_y$ かつ $x \notin O_y$ となる開集合 O_y が存在する．すると，y の任意性より，$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} O_y$ であるから，$X \setminus \{x\}$ が開集合である．よって，$\{x\}$ は閉集合である
$\Longleftarrow$
$\forall x \in X, \{x\}$ が閉集合と仮定すると，$y \neq x$ となる y を取り，$\{y\}$ も閉集合である．すると，$X \setminus \{y\}$ が開集合であるから，$x \in X \setminus \{y\}$ であり，$y \notin X \setminus \{y\}$ である．よって，$X \setminus \{y\}$ は第一分離公理をみたす開集合であり，$(X,\mathcal{O})$ が T_1 空間である □

Example 5.3. 有限集合上で，第一分離公理をみたす位相は離散位相に限る

Proof. X を有限集合とし，$(X,\mathcal{O})$ を T_1 空間とすると，$\forall x \in X, \{x\}$ が閉集合である．X が有限集合であるから，$\forall x \in X, X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} \{y\}$ の両辺はともに有限である．また，左側は有限個の閉集合の和であるから，$X \setminus \{x\}$ の補集合 $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$ は開集合である．よって，$\forall x \in X, \{x\}$ は開かつ閉な集合である．すると，$\forall A \subset X, A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ で書けるから，A も開集合であり，$\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ となる． □

Definition 5.4. （第二分離公理・Hausdorff 公理・T_2 空間）
次の条件を第二分離公理または Hausdorff 公理といい，これをみたす位相空間 $(X,\mathcal{O})$ をハウスドルフ空間という

$$x \neq y \text{ となる } \forall x,y \in X, x \in O_x, y \in O_y, O_x \cap O_y = \emptyset \text{ となる } O_x, O_y \in \mathcal{O}$$

Example 5.5. X を，二つ以上の元を持つ集合とする．離散空間 $(X,\mathcal{P}(X))$ はハウスドルフ空間であり，密着空間 $(X,\{\emptyset,X\})$ はハウスドルフ空間でない

Proof.
- $x \neq y$ を取り，離散位相では $\{x\},\{y\}$ はともに開集合で，$x \in \{x\}, y \in \{y\}, \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ であるから，定義より，Hausdorff 空間である
- $(X,\{\emptyset,X\})$ での開集合は $\emptyset$ と X だけであるから，$x \neq y$ をとると，x を含む開集合は X だけであり，y を含む開集合も X だけであるから，$O_x \cap O_y = \emptyset$ となる開集合 O_x, O_y は存在しない．よって，Hausdorff 空間でない

□

Example 5.6. 距離空間はハウスドルフ空間である

Proof. (X,d) に対して，$x \neq y$ であるのは $d(x,y) > 0$ であり，$r := \frac{1}{2}d(x,y)$ とおくと，$B(x,r) := \{z \in X : d(x,z) < r\}, B(y,r) := \{z \in X : d(y,z) < r\}$ は距離位相で開集合であり，$x \in B(x,r), y \in B(y,r)$ である．また，$z \in B(x,r) \cap B(y,r)$ と仮定すると，$d(x,z) < r$ かつ $d(y,z) < r$ であり，三角不等式より，$d(x,y) < d(x,z) + d(y,z) < 2r = d(x,y)$ から矛盾．よって，$B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ である．よって，Haufsdorff 空間である □

Proposition 5.7. ハウスドルフ空間の 1 点からなる部分集合は閉集合である

Proof. $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間とし，$x \in X$ を任意に固定する．Hausdorff 空間の定義より，$\forall y \in X \backslash \{x\}, O_y \ni y, O_x \ni x, O_x \cap O_y = \emptyset$ となる O_x, O_y は存在する．すると，$X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in X \backslash \{x\}} O_y$ であるから，$X \backslash \{x\}$ は開集合であり，$\{x\}$ は閉集合である □

Definition 5.8. （第三分離公理・ヴィエトリスの分離公理・正則空間）
次の条件を第三分離公理またはヴィエトリスの分離公理といい，第一分離公理と第三分離公理をみたす位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を正規空間という

$$\text{任意の閉集合 } A \subset X \text{ と，任意の点 } x \in X \backslash A \text{ に対して}$$
$$x \in O_x, A \subset O_A, O_x \cap O_A = \emptyset \text{ となる } O_x, O_A \in \mathcal{O} \text{ が存在する}$$

Remark 5.9. 開集合 O_x, O_A が点 x と閉集合 A を分離する

Definition 5.10. （第四分離公理・ティーツェ分離公理・正規空間）
次の条件を第四分離公理またはティーツェ分離公理といい，第一分離公理と第四分離公理をみたす位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を正規空間という

$$A \cap B = \emptyset \text{ となる任意の閉集合 } A, B \subset X \text{ に対して}$$
$$A \subset O_A, B \subset O_B, O_A \cap O_B = \emptyset \text{ となる } O_A, O_B \in \mathcal{O} \text{ が存在する}$$

Remark 5.11. 開集合 O_A, O_B が閉集合 A, B を分離する

Proposition 5.12. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について，以下成立

$$\text{正規空間} \Longrightarrow \text{正則空間} \Longrightarrow \text{ハウスドルフ空間} \Longrightarrow T_1 \text{ 空間}$$

Proof. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して

- 正規空間 $\Longrightarrow$ 正則空間
  $(X, \mathcal{O})$ を正規空間とする．$A \subset X$ と $x \in X \backslash A$ を任意に取り．T_1 がみたしているので，$\{x\}$ は閉集合である．$A \cap \{x\} = \emptyset$ であるから，T_4 より，$\exists O_A, O_x \in \mathcal{O}, s.t. A \subset O_A, \{x\} \subset O_x$ かつ $O_A \cap O_x = \emptyset$．よって，$(X, \mathcal{O})$ は正則空間である

- 正則空間 $\Longrightarrow$ ハウスドルフ空間
  $T_4 \Longrightarrow T_3$ と同様に，$y \neq x$ となる y の一点集合 $\{x\}, \{y\}$ を任意に取り，T_3 より，$\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}, s.t. x \in O_x, y \in O_y$ で $O_x \cap O_y = \emptyset$ であるから，$(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間である

- ハウスドルフ空間 $\Longrightarrow T_1$ 空間
  $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とすると，$x \neq y$ となる $\forall x, y \in X$ は $x \in O_x, y \in O_y, O_x \cap O_y = \emptyset$ となる $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ が存在するから，$O_x \cap O_y - \emptyset$ より，$y \notin O_x$ である．よって，$(X, \mathcal{O})$ は T_1 空間である

□

Remark 5.13.
1. 第一分離公理の仮定がなければ，第四分離公理から第三分離公理や，第三分離公理から第二分離公理は従わないことに注意
2. 位相空間の 1 点からなる部分集合が閉集合とは限らないため，第三分離公理や第四分離公理の条件から第二分離公理や第一分離公理の条件は一般に従わない

Proposition 5.14. 距離空間は正規空間である

Proof. $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ とし，閉集合 $A, B \subset X$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ とする．$\forall x \in X$

$$U := \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\} \tag{18}$$
$$V := \{x \in X : d(x, B) < d(x, A)\} \tag{19}$$

であり，直感的には，U は A に近い点全体の集合で，V は B に近い点全体の集合である．$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$ であるから，$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$ であり，$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$ であるより，$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ となる．よって，$d(\cdot,A)$ は連続写像である．$\phi(x) := d(x,A) - \frac{1}{2}d(x,B), \phi'(x) := d(x,B) - \frac{1}{2}d(x,A)$ を考えると，$d(\cdot,A)$ と $d(\cdot,B)$ はともに連続であるから，ϕ,ϕ' も連続写像である．すると，$U := \{x \in X : \phi(x) < 0\} = \phi^{-1}((-\infty,0)), V := \{x \in X : \phi'(x) < 0\} = \phi'^{-1}((-\infty,0))$ より，U,V は開集合であり，定義から $A \subset U, B \subset V$ である．また，$x \in U \cap V$ と仮定すると，$\begin{cases} d(x,A) < \frac{1}{2}d(x,B) \\ d(x,B) < \frac{1}{2}d(x,A) \end{cases}$ をみたし，$d(x,A) < \frac{1}{2}d(x,B) < \frac{1}{4}d(x,A)$ となるから，矛盾．よって，$U \cap V = \emptyset$ である．以上より，距離空間は正規空間である □

Proposition 5.15. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について，以下の条件は同値である

1. $(X,\mathcal{O})$ は第四分離公理をみたす
2. 閉集合 F と開集合 O について，$F \subset O$ ならば，$F \subset U$ かつ $\overline{U} \subset O$ となる開集合 $U \in \mathcal{O}$ が存在する

Proof.

- $(X,\mathcal{O})$ を第四分離公理をみたすとする．閉集合 $F, X\backslash O$ に対して，$F \subset O$ より，$F \cap (X\backslash O) = \emptyset$ であり，第四分離公理の定義より，$\exists O_F, O_{X\backslash O} \in \mathcal{O}, s.t. F \subset O_F, X\backslash O \subset O_{X\backslash O}$ かつ $O_F \cap O_{X\backslash O} = \emptyset$ である．また，$O_F \cap O_{X\backslash O} = \emptyset$ より，$O_F \subset X\backslash O_{X\backslash O}$ であり，$X\backslash O_{X\backslash O}$ が閉集合であるから，$\overline{O_F} \subset X\backslash O_{X\backslash O}$ である．よって，(2) は成立する
- 閉集合 F と開集合 O に対して，$F \subset O$ ならば，$\exists U \in \mathcal{O}, s.t. F \subset U$ かつ $\overline{F} \subset O$ とする．$A \cap B = \emptyset$ をみたす閉集合 A,B を任意にとると，$X\backslash B$ は開集合であり，$A \subset (X\backslash B)$ より，$\exists U \in \mathcal{O}, s.t. A \subset U$ かつ $\overline{U} \subset X\backslash B$ である．さらに $\overline{U} \cap B = \emptyset$ である．同様に，$V \in \mathcal{O}$ もとれ，$\overline{V} \cap A = \emptyset$．よって，$T_4$ が成立する

□

Problem 5.16.

1. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について，以下の条件は同値である
   (a) $(X,\mathcal{O})$ は第三分離公理をみたす
   (b) $\forall x \in X, x$ の閉近傍全体の集合は x の基本近傍系になる
2. コンパクトなハウスドルフ空間は正規空間である
3. 第二可算公理をみたす正則空間は正規空間である

Proof. 位相空間を $(X,\mathcal{O})$ とする

1. - $\Longrightarrow$
     $(X,\mathcal{O})$ は第三分離公理をみたすとする．$W \ni x$ を x の開近傍とする．$F := X\backslash W$ とすると，W が開集合であることより，F は閉集合である．また，$x \notin F$．第三分離公理の定義より，$\exists U,V \in \mathcal{O}, s.t. U \cap V = \emptyset$ かつ $x \in U, F \subset V$ であり，$U \cap V = \emptyset$ より，$U \subset X\backslash V$ である．すると，$\overline{U} \subset \overline{X\backslash V}$ であり，V は開集合であるから，$\overline{X\backslash V} = X\backslash V$ となる．よって，$F \subset V$ より，$X\backslash V \subset X\backslash F = W$ から，$x \in U \subset \overline{U} \subset W$．よって，$N := \overline{U}$ とすれば，N は x の閉近傍であり，W の任意性より，閉近傍 N が存在するので，閉近傍全体の集合は x の基本近傍系になる
   - $\Longleftarrow$
     $x \notin F$ をみたす閉集合 F と点 $x \in X$ を任意にとる．$W := X\backslash F$ とし，F は閉集合であるから，$x \in W$ であり，仮定より，閉集合 $N \ni x$ が存在し，$x \in N \subset W$ をみたす．すると，定義より，$\exists U, s.t. x \in U \subset N$．また，$V := X\backslash N$ とすると，N は閉集合であるから，V が開集合である．$N \subset W = X\backslash F$ より，$F \subset X\backslash N = V$ であり，$U \subset N$ より，$U \cap V = \emptyset$．よって，第三分離公理が成立する

2. $(X,\mathcal{O})$ をコンパクトなハウスドルフ空間とする．$x \in X$ と閉集合 $B \subset X$ を任意に取り，$\forall y \in B, X$ が Hausdorff 空間であるから，$\exists U_y, V_y \in \mathcal{O}, s.t. x \in U_y, y \in V_y$ であり，y の任意性より，$\{V_y : y \in B\}$ は B の開被覆である．B はコンパクトであるから，開被覆 $\{V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots, V_{y_n}\}$ は有限である．$V := \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ とし，$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ とすれば，$U \cap V = \emptyset$ から，T_3 が成立し，x と閉集合 B は分離される．$\forall x \in A, T_3$ より，$\exists U_x \ni x$ と $V_x \supset B, s.t. U_x \cap V_x = \emptyset$．すると，$\{U_x : x \in A\}$ は A の開被覆であり，X はコンパクトであるから，開被覆 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_m}\}$ は有限である．$U' := \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}, V' := \bigcap_{j=1}^{m} V_{x_j}$ とすれば，$U' \cap V' = \emptyset$ である．よって，T_4 が成立する．なお，Hausdorff 空間は T_1 空間であるから，$(X,\mathcal{O})$ は正規空間である

3. $(X,\mathcal{O})$ を第二可算公理をみたす正則空間とする．X は第二可算公理をみたすから，開基 $\mathcal{B} := \{B_1, B_2, B_3, \cdots\}$ は高々可算個である．すると，$(X,\mathcal{O})$ の任意の開集合は $\mathcal{O}$ の元の可算和で表せる．閉集合 A, B に対して，$\forall x \in A, A \cap B = \emptyset$ から，$x \notin B$ で，B が閉集合と X が正則空間であることより，$\exists W_x \ni x, s.t. \overline{W_x} \cap B = \emptyset$ (T_3 の定義より)．また，$\mathcal{B}$ の定義より，$\exists B_k \in \mathcal{B}, s.t. x \in B_k \subset W_x$．$B_k \subset W_x$ より，$\overline{B_k} \subset \overline{W_x}$ となり，$\overline{B_k} \cap B = \emptyset$ となる．ここで，$I := \left\{n \in \mathbb{N} : B_n \cap A = \emptyset, \overline{B_n} \cap B = \emptyset\right\}$ とし，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ とする．同様に，$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ とすると，$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{U_n} \cap B = \overline{V_n} \cap A = \emptyset$. なお，$U'_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}, V'_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ とおき，$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n, V := \bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n$ とおくと，U, V は開集合の和であるから開集合であり，$\forall x \in A, \{U_n\}$ は A の被覆であるから，$x \in U_k$ かつ $x \notin \overline{V_i}, \forall i$ である，よって，$x \in U$ で，$A \subset U$ である．同様に $B \subset V$ である．$x \in U \cap V$ と仮定すると，$\exists m, n \in \mathbb{N}, s.t. x \in U'_n$ かつ $x \in V'_m$．$n \leq m$ とすると，$V'_m = V_m \setminus \left(\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_n} \cup \cdots \cup \overline{U_m}\right)$ となるから，$x \notin \overline{U_n}$ であるが $x \in U'_n \subset U_n \subset \overline{U_n}$ となる，矛盾．よって，$U \cap V = \emptyset$．以上，正規空間となる

□

6　ウリゾーン距離化定理

Theorem 6.1. （ウリゾーンの補題）
$(X, \mathcal{O})$ を第四分離公理をみたす位相空間とし，A, B を空でない X の閉集合で共通部分をもたないものとする．このとき，$(X, \mathcal{O})$ 上の実連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で

$$f(X) \subset [0,1] \qquad f(A) = 0 \qquad f(B) = 1$$

をみたすものが存在する

Proof. $(X, \mathcal{O})$ が第四分離公理をみたすので，閉集合 F と開集合 O に対して，$F \subset O$ ならば，$F \subset U$ かつ $= \overline{U} \subset O$ となる $U \in \mathcal{O}$ が存在する.$\forall x \in X, f(x) := \inf\left\{ r \in [0,1] : x \in U_r, r = \dfrac{k}{2^n} \right\}$ とすると, $x \in A$ であるとき, $\forall r, x \in U_r$ で $f(x) = 1$, $x \in B$ の場合だと, $x \in U_{r>1}$ から, 定義より $f(x) = 1$. D を $[0,1]$ の間に二進有理数からなる集合とすると, $\forall f(x) < a, \exists r < a, s.t. x \in U$ から，$f^{-1}((-\infty, a)) = \bigcup\limits_{\substack{r<a \\ r \in D}} U_r$ であるから，開集合であり，$f(x) > a$ のときも同様に考えると，$f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup\limits_{\substack{r>a \\ r \in D}} \left(X \backslash \overline{U_r}\right)$ から, $f^{-1}((a, +\infty))$ も開集合である. よって, f は連続である　□

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ となるような X 上の距離関数 d が存在するとき，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は距離化可能であるという．ただし，$\mathcal{O}_d$ は d によって定まる距離位相とする

Theorem 6.2. 第二可算公理をみたす正規空間 $(X, \mathcal{O})$ は距離化可能である

Proof. $(X, \mathcal{O})$ は第二可算であるから，$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots\}$ は高々可算個であり，$\overline{B_m} \subset B_n$ をみたす (B_m, B_n) を考えると，X は正規空間であるから，Urysohn の補題より，$\forall (B_m, B_n)$，連続関数 $f_{m,n} : X \to [0,1]$ が存在し，$x \in \overline{B_m}, f_{m,n}(x) = 0$ で，$x \in X \backslash B_n, f_{m,n}(x) = 1$．ここで，$\mathcal{B}$ は可算であるから，対 (B_m, B_n) も可算である．それらの対を $g_1, g_2, \cdots$ と書き換え，$F : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ と定義し，$\forall x \in X, F(x) := \left(g_1(x), \dfrac{1}{2} g_2(x), \dfrac{1}{3} g_3(x), \cdots, \dfrac{1}{k} g_k(x), \cdots \right)$ と定義すると，$d(x, y) := \sum \dfrac{1}{2} |x_i - y_i|$ より，$[0,1]^{\mathbb{N}}$ は距離空間であるから，f が埋め込みであることを示せば，X は距離空間になれる（距離化可能）．Urysohn の補題より，F は連続であり，正則空間より Hausdorff 空間であるから，F は明らかに単射である．また，$\{g_k\}$ はすべて構成できる開基の対の族だから，F は X での開集合を $F(X)$ の開集合に写す．よって，F は開集合である．よって，F は埋め込みであり，$(X, \mathcal{O})$ は距離化可能である　□

7 有限交叉性とチコノフの定理

Definition 7.1. （有限交叉性）
集合 X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ から取り出した部分集合 $A_{\lambda_1},\cdots,A_{\lambda_n}\quad(n\in\mathbb{N})$ について，常に $A_{\lambda_1}\cap\cdots\cap A_{\lambda_n}\neq\emptyset$ であるとき，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性をもつという

Proposition 7.2. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について，以下の条件は同値である

1. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ はコンパクトである
2. 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の閉集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもてば，常に $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\emptyset$ である

Proof. 位相空間を $(X,\mathcal{O})$ とする

- $\Longrightarrow$
  $(X,\mathcal{O})$ はコンパクトとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性とする．$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\emptyset$ と仮定すると，$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\backslash A_\lambda)$ となり，$\{X\backslash A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が開被覆となる．コンパクト性より，有限部分被覆が存在し，$X=(X\backslash A_{\lambda_1})\cup\cdots\cup(X\backslash A_{\lambda_n})$ である．すると，両辺に補集合をとると，$\emptyset=A_{\lambda_1}\cap\cdots\cap A_{\lambda_n}$ となり，有限交叉性に矛盾する．よって，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\emptyset$

- $\Longleftarrow$
  X の任意の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を任意に取り，有限部分被覆が存在しないと仮定すると，任意有限個の $i_1,\cdots,i_n$ に対して，$U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}\neq X$．両辺に補集合をとると，$(X\backslash U_{i_1})\cap\cdots\cap(X\backslash U_{i_n})\neq\emptyset$ で，閉集合族 $\{X\backslash U_i\}_{i\in I}$ は有限交叉性をもつ．仮定より，$\bigcap_{i\in I}(X\backslash U_i)\neq\emptyset$ となるが，LHS $=X\backslash\bigcup_{i\in I}U_i=X\backslash X=\emptyset$ から，矛盾．よって，有限部分被覆が存在し，$(X,\mathcal{O})$ はコンパクトである

□

Theorem 7.3. （チコノフの定理）
コンパクトな位相空間の直積空間はコンパクトである

Proof. $\mathcal{F}$ を有限交叉性をもつ閉集合族とする．Zorn の補題より，$\exists\mathcal{M}\supset\mathcal{F},s.t.$ 閉集合族 $\mathcal{M}$ も有限交叉性をもつ．また，$S\subset X$ に対して，S と $\mathcal{M}$ の任意の元との共通部分が空であるとき，$S\in\mathcal{M}$ である（そうでないと $\mathcal{M}$ の極大性と反する）．$\forall\alpha\in A,\pi_\alpha:X\to X_\alpha$ を考え，$\mathcal{M}_\alpha:=\{\pi_\alpha(M):M\in\mathcal{M}\}$ とする．$\mathcal{M}$ は有限交叉性を持つから，α も X_α での有限交叉性をもつ．X_α はコンパクトであるから，$\forall\alpha\in A,\exists x_\alpha\in X_\alpha,s.t.x_\alpha\in\bigcap_{M\in\mathcal{M}}\overline{\pi_\alpha(M)}$．$x:=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ とし，S を x の開基とすると，$S=\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ で，$x_\alpha\in U_\alpha\subset X_\alpha$ である．また，$\forall M\in\mathcal{M},x_\alpha\in\overline{\pi_\alpha(M)}$ であるから，$U_\alpha\cap\pi_\alpha(M)\neq\emptyset$．すると，$\exists y\in M,s.t.y$ の α 目の成分が U_α に属する．よって，$M\cap\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\neq\emptyset$．$M\in\mathcal{M}$ の任意性より，$S=\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ は $\mathcal{M}$ のすべての元と共通部分をもつ．よって，$S\in\mathcal{M}$ であり，x の任意の開近傍 $V=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n$ であるから，$V\in\mathcal{M}$．すると，$F\in\mathcal{F}$ を任意に取り，$\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$ で，$F\in\mathcal{M}$ となり，$V\in\mathcal{M}$ から，有限交叉性より，$V\cap F\neq\emptyset$ で，$x\in F$ となる．よって，F の任意性より，$x\in\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$ である．以上より，直積空間 X はコンパクトである □

8　局所コンパクト性とコンパクト化

Definition 8.1. （局所コンパクト）
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．$(X,\mathcal{O})$ の任意の点 x に対して，x のコンパクトな近傍が存在するとき，$(X,\mathcal{O})$ は局所コンパクトであるという

Example 8.2.

1. コンパクト空間は局所コンパクトである
2. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は局所コンパクトである
3. 離散空間は局所コンパクトである

Proof.

1. コンパクト空間 $(X,\mathcal{O})$ の任意の点 $x \in X$ に対して，X 自体が x の近傍であり，コンパクトであるから，局所コンパクトである
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, B(x,1)$ は x の開近傍であり，$\overline{B(x,1)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| \leq 1\}$ は有界かつ閉集合であるから，距離空間ではコンパクトである．よって，$B(x,1)$ は x のコンパクトな近傍である．よって，$\mathbb{R}^n$ は局所コンパクトである
3. 離散位相では $\{x\}$ は開集合で，$\{x\}$ は x 自身の近傍であるから，$\{x\}$ は有限集合なのでコンパクトより，局所コンパクトである

□

Proposition 8.3. 局所コンパクトなハウスドルフ空間は正則空間である

Proof. $(X,\mathcal{O})$ を局所コンパクトなハウスドルフ空間とし，閉集合 A と $x \notin A$ を任意にとる．局所コンパクト性より，$\forall x \in X, x$ のコンパクトな近傍 K が存在する．すると，$x \in W \subset K$ で，K はコンパクトである．A は閉集合であり，K はコンパクトであるから，$A \cap K$ は K の閉部分集合なので，コンパクトである．また，$x \notin A$ なので，$x \notin A \cap K$ である．$(X,\mathcal{O})$ は Hausdorff 空間であるから，$C := A \cap K$ とし，$U \ni x, V \supset (A \cap K)$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となるものを取れる．さらに，$x \in W \subset K$ であるから，$U' := U \cap W$ とすると，U' は開集合であり，$x \in U'$ である．また，$\overline{U'} \subset \overline{W}$ であるから，$\overline{W}$ がコンパクトであるから，$\overline{U'}$ もコンパクトである．$K := \overline{U'} \backslash U'$ とおくと，K は閉集合かつコンパクトであり，$x \notin K$ である．すると，$G_1 \cap G_2 = \emptyset$ をみたす開集合 $G_1 \ni x, G_2 \supset K$ が存在する．よって，$V := U' \cap G_1$ が存在し，V は開集合であり，$x \in U'$ かつ $x \in G_1$ より $x \in V$ である．ここで，$V \subset U'$ から $\overline{V} \subset \overline{U'}$ であり，$V \subset G_1$ より $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ から，$V \cap G_2 = \emptyset$ である．すると，G_2 が開集合であるより，$\overline{V} \cap G_2 = \emptyset$ である．すると，$K \subset G_2$ より，$\overline{V} \subset U'$ である．よって，$x \in V \subset \overline{V} \subset U$ である．よって，$(X,\mathcal{O})$ は正則空間である □

Theorem 8.4. （アレクサンドロフの定理）
位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対して，X に，X に含まれない 1 点 x_∞（無限遠点）をつけ加えた集合を $X^* = X \cup \{x_\infty\}$ とする．ここで

$$\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \cup \left\{X^* \backslash K : K \text{は } (X,\mathcal{O}) \text{ のコンパクトな閉集合}\right\}$$

とすると，次が成り立つ

1. $\mathcal{O}^*$ は X^* の位相を定める
2. $(X,\mathcal{O})$ は $(X^*,\mathcal{O}^*)$ の部分空間である．（$\mathcal{O}^*$ の X における相対位相は，元の位相 $\mathcal{O}$ に一致する）
3. $(X^*,\mathcal{O}^*)$ はコンパクトである
4. $(X,\mathcal{O})$ がコンパクトでなければ，$(X,\mathcal{O})$ は $(X^*,\mathcal{O}^*)$ で稠密である
5. $(X^*,\mathcal{O}^*)$ がハウスドルフ空間であることと，$(X,\mathcal{O})$ が局所コンパクトなハウスドルフ空間であることは同値である

Proof. 位相空間を $(X, \mathcal{O})$ とする

1.
- $\emptyset \in X$ であり，$\emptyset \in \mathcal{O}$ であるから，$\emptyset \in \mathcal{O}^*$ である
- $X^* = X^* \backslash \emptyset$ とかけるから，$\emptyset$ はコンパクトな閉集合であるから，$K := \emptyset$ とすれば，$X^* \in \mathcal{O}^*$ である
- $U_1, U_2 \in \mathcal{O}^*$ とすると
  (a) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ の場合は，明らかに $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$ である
  (b) $U_1 = X^* \backslash K_1, U_2 = X^* \backslash K_2$ の場合，K_1, K_2 は $(X, \mathcal{O})$ のコンパクトな閉集合であるから，$K_1 \cup K_2$ もコンパクトな閉集合であり，$U_1 \cap U_2 = (X^* \backslash K_1) \cap (X^* \backslash K_2) = X^* \backslash (K_1 \cup K_2)$ であるから，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}^*$ である
  (c) $U_1 \in \mathcal{O}, U_2 = X^* \backslash K$ の場合，$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (X^* \backslash K) = U_1 \cap (X \backslash K)$ から，$U_1 \subset X$ かつ K は閉集合であるから，$X \backslash K$ も開集合で，$U_1 \cap U_2$ も X の開集合である．よって，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$
- $\{U_\alpha\}$ を開集合族とする
  (a) $\forall \alpha, x_\infty \notin U_\alpha$ なら，$\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}^*$ であるから成立
  (b) $\exists \alpha_0, s.t. x_\infty \in U_{\alpha_0}$ とすると，$U := \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \ni x_\infty$ で，$U = X^* \backslash C$ と書き換え，$C = X^* \backslash U = \bigcap\limits_\alpha (X^* \backslash U_\alpha)$ である．すると，$U_0 := X^* \backslash K_0$ とおくと，$C \subset K_0$ で，コンパクトな閉集合である．よって，$\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ も $\mathcal{O}^*$ の元である

  以上より，$\mathcal{O}^*$ は X^* の位相を定める
- $\{U \cap X : U \in \mathcal{O}^*\} = \mathcal{O}$ を証明すればいい
  - $\forall U \in \mathcal{O}^*$，もし $U \in \mathcal{O}$ なら，$U \cap X = U \in \mathcal{O}$ であり，$U = X^* \backslash K$ なら，$U \cap X = X \backslash K$ となり，K は閉集合であるから，$X \backslash K$ は開集合であり，$\mathcal{O}$ に属する．よって，$\{U \cap X : U \in \mathcal{O}^*\} \subset \mathcal{O}$
  - $\forall V \in \mathcal{O}$，定義より，$V \in \mathcal{O}^*$ から，$\mathcal{O} \subset \{U \cap X : U \in \mathcal{O}^*\}$
- $\{U_\alpha\}$ を X^* の任意の開被覆とする.すると,$\exists U_\infty, s.t. U_\infty \ni x_\infty$.定義より,$U_\infty = X^* \backslash K$ であり，K は X のコンパクトな閉集合である．$K \subset X^*$ かつ $K \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ から，$\{U_\alpha\}$ も K の開被覆である．K がコンパクトであるから，K を被覆する部分被覆を $U_1, U_2, \cdots, U_n$ とすれば，$\{U_\infty, U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ は x_∞ と K を被覆する有限な開被覆である．よって，$(X^*, \mathcal{O}^*)$ もコンパクトである
- $x_\infty \in U$ をみたす開集合 U を任意にとる．定義より，$U = X^* \backslash K$ であり，K は X のコンパクトな閉集合である．$U \cap X = (X^* \backslash K) \cap X = X \backslash K$ となるから，$U \cap X = \emptyset$ とすると，$X \backslash K = \emptyset$ であり，$X \subset K$ となるが，$K \subset X$ から，$X = K$ になる．すると X はコンパクトであるが，仮定に反する．よって，$U \cap X \neq \emptyset$．言い換えれば，x_∞ の任意の近傍は $x \in X$ を含むから，$X \subset \overline{X}$ より，$x_\infty \in \overline{X}$ になる．よって，$X = \overline{X}$ から，稠密である
-
  - $\Longrightarrow$
    $(X^*, \mathcal{O}^*)$ を Hausdorff 空間とすると，$X \subset X^*$ より Hausdorff で，$x \in X$ を任意に取り，$x \neq x_\infty$ は明らかで，X^* は Hausdorff 空間であるより，$\exists U, V \in \mathcal{O}^*, s.t. x \in U$ かつ $x_\infty \in V$ となる．$x_\infty \in V$ から，$V = X^* \backslash K$ であり，$U \cap V = \emptyset$ より，$U \subset K$ になる．U は開集合かつ $U \subset K$ から，$(X, \mathcal{O})$ は局所コンパクトである
  - $\Longleftarrow$
    $(X, \mathcal{O})$ を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする
    (a) $a, b \in X$ の場合，XHausdorff 空間であるから，$a \in U_a \subset X \subset X^*, b \in U_b \subset X \subset X^*$ となるから，X^* でも分離できる（言い換えれば，X^* でも Hausdorff である）

(b) $a \in X, b = x_\infty$ の場合，X は局所コンパクト Hausdorff 空間であるから，$a \in X$ に対して，$\exists U \subset X, s.t. a \in U$ かつ $\overline{U}$ はコンパクトである．$K = \overline{U}$ とすると，X が Hausdorff であるから，K は閉集合である．すると，$V := X^* \backslash K$ とし，K がコンパクトな閉集合であるから，$V \in \mathcal{O}^*$ となり，$x_\infty \in V$ である．$U \cap V = U \cap \left(X^* \backslash \overline{U}\right) = U \cap \left(X \backslash \overline{U}\right) = \emptyset$ から，a と x_∞ も分離できる．よって，$(X^*, \mathcal{O}^*)$ は Hausdorff 空間である

□

Remark 8.5. 構成した位相空間 $(X^*, \mathcal{O}^*)$ を，$(X, \mathcal{O})$ の一点コンパクト化という

9　距離空間の完備化

9.1　距離空間の完備性

Definition 9.1. （収束・極限 (点)）
距離空間 (X,d) の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ について，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $x \in X$ に収束する $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N, d(x_n, x) < \epsilon$．このとき，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と表し，x を点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限点もしくは極限という

Proposition 9.2. 距離空間 (X,d) の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，収束先はただ一つである

Proof. 収束先は x 以外に y にも収束すると仮定すると,$\forall \epsilon > 0, x_n \to x$ より,$\exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_1, d(x_n, x) < \frac{1}{2}\epsilon$ であり，y も収束先であるから，$\exists N_2 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N_2, d(x_n, y) < \frac{1}{2}\epsilon$ である．$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると,$\forall n \geq N$ に対して,三角不等式より,$d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ である．$\epsilon > 0$ は任意であるから，$d(x,y) = 0$ であり，$x = y$ である．よって，収束先はただ一つである □

Definition 9.3. （コーシー列・基本列）
距離空間 (X,d) 内の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列もしくは基本列である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n > N, d(x_m, x_n) < \epsilon$

Proposition 9.4. 距離空間 (X,d) の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が収束するなら，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である

Proof. $x_n \to x$ とすると，$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \geq N, d(x_n, x) < \frac{1}{2}\epsilon$ である．すると，$\forall m, n \in \mathbb{N}, d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ から，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である □

Remark 9.5. 一般に，距離空間 (X,d) 内のコーシー列収束するとは限らない．例えば，有理数 $\mathbb{Q}$ に対して通常の距離を考える．x_n を π の小数第 n 桁以下を切り捨てたものとする点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は，以下のようになる

$$x_1 = 3, x_2 = 3.1, x_3 = 3.14, x_4 = 3.141, x_5 = 3.1415, \cdots$$

これはコーシー列であるが，極限てんは π であり，$\pi \notin \mathbb{Q}$ である

Definition 9.6. （完備距離空間・完備性）
距離空間 (X,d) が完備である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ X 内の任意のコーシー列が X 内に収束先をもつ．このとき，(X,d) は完備距離空間であるという

Example 9.7. 通常の距離について，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は完備でなく，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備である

9.2　距離空間の完備化

Definition 9.8. （等長写像）
$(X,d), (X',d')$ を距離空間，$f : X \to X'$ を写像とする．$\forall x, y \in X$ に対して，$d(x,y) = d'(f(x), f(y))$ をみたすとき，f は (X,d) から (X',d') への等長写像であるという

Definition 9.9. （完備化）
距離空間 (X,d) に対して，距離空間 (X^*,d^*) と写像 $i : X \to X^*$ が存在し

1. (X^*,d^*) が完備である
2. 写像 i は (X,d) から (X^*,d^*) への等長写像である

3. 像 $i(X)$ が (X^*, d^*) において稠密である

をみたすとき，完備距離空間 (X^*, d^*) と等長写像 i の組 $((X^*, d^*), i)$ を距離空間 (X,d) の完備化という

Proposition 9.10. 任意の距離空間 (X,d) に対して，その完備化 $((X^*, d^*), i)$ が存在する

Proof. $C(X) =: \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n) \text{ は } (X,d) \text{ の Cauchy 列}\right\}$ とすると
$\forall (x_n), (y_n) \in C(X), (d(x_n, y_n))$ を考える

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \tag{20}$$

であるから，$(d(x_n, y_n))$ も Cauchy 列である．すると，$\rho((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ とし，
$(x_n) \sim (y_n) \overset{def}{\iff} \rho((x_n),(y_n)) = 0$ とすると，$X^* := C(X)/\sim$ とかけ，$[(x_n)]$ を (x_n) の同値類とする．$\forall [(x_n)], [(y_n)] \in X^*$

$$d^*([x_n], (y_n)) := \rho((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{21}$$

とおき，$(x_n) \sim (x'_n), (y_n) \sim (y'_n)$ とすると，三角不等式より $d(x'_n, y'_n) \le d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$ であり，$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$ である．両辺に極限をとると，$d(x'_n, x_n) \to 0, d(y'_n, y_n) \to 0$ より，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$ である．よって，well-defined である．また，d^* は明らかに非負かつ対称であり，$d^* = 0$ は $\sim$ の定義より同一同値類である．あと，$(x_n), (y_n), (z_n)$ に対して

$$d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \tag{22}$$

があり，両辺に極限をとると

$$d^*([(x_n)], [(z_n)]) \le d^*([(x_n)], [(y_n)]) + d^*([(y_n)], [(z_n)]) \tag{23}$$

が成り立つ．以上より，d^* は距離であり，(X^*, d^*) は距離空間である．写像 $i : X \to X^*$ を $i(x) := [(x, x, x, x, \cdots)]$ と定めると，$\forall x, y \in X, d^*(i(x), i(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) = d(x,y)$ から，i は等長写像であり，単射である．$\alpha := [(x_n)] \in X^*$ を任意に取り，$i(x_n) \in i(X)$ で

$$d^*(i(x_n, \alpha)) = d^*([(x_n, x_n, \cdots)], [(x_k)]) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) \tag{24}$$

で，(x_k) は Cauchy 列より，n を固定すると，$d(x_n, x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ であるから，$d^*(i(x_n), \alpha) \to 0$ で，$i(x_n) \to \alpha$ である．$\forall \alpha_m \in X^*$ をみたす Cauchy 列 $(\alpha_m) \in X^*$ を任意にとる．(α_m) は Cauchy 列であるから，$d^*\left(\alpha_{m_k}, \alpha_{m_{k+1}}\right) < 2^{-k}$ をみたす $m_1 < m_2 < \cdots$ となる m_k が取れ，$\beta_k := \alpha_{m_k}$ とおくと，(β_k) も Cauchy 列になる．各 k に対して，$\exists y_k \in X, s.t. d^*(\beta_k, i(y_k)) < 2^{-k}$．すると，$\forall k$

$$\begin{aligned} d(y_k, y_{k+1}) &= d^*(i(y_k), i(y_{k+1})) && (25)\\ &\le d^*(i(y_k), \beta_k) + d^*(\beta_k, \beta_{k+1}) + d^*(\beta_{k+1}, i(y_{k+1})) && (26)\\ &< 2^{-k} + 2^{-k} + 2^{-(k+1)} = 3 \cdot 2^{-k} && (27) \end{aligned}$$

すると，$\forall p > q$

$$\begin{aligned} d(y_q, y_p) &\le \sum_{k=q}^{p-1} d(y_k, y_{k+1}) && (28)\\ &< \sum_{k=q}^{\infty} 3 \cdot 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-(q-1)} \overset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0 && (29) \end{aligned}$$

から，(y_k) は X の Cauchy 列である．$\alpha := [(y_k)] \in X^*$ とし，$d^*(i(y_k), \alpha) = \lim_{n\to\infty} d(y_k, y_n)$ より $i(y_k) \to \alpha$ になる．三角不等式より

$$d^*(\beta_k, \alpha) \le d^*(\beta_k, i(y_k)) + d^*(i(y_k), \alpha) \tag{30}$$

$$< 2^{-k} + d^*(i(y_k), \alpha) \to 0 \tag{31}$$

よって，$\beta_k \to \alpha$．(α_m) は Cauchy 列であり，$\beta_k = \alpha_{m_k} \to \alpha$ より，$\forall \epsilon > 0, d^*(\beta_k, \alpha) < \frac{1}{2}\epsilon$ をみたす k をとり，$m \ge M \Longrightarrow d^*(\alpha_m, \beta_k) < \frac{1}{2}\epsilon$ をみたす M をとれば

$$d^*(\alpha_m, \alpha) \le d^*(\alpha_m, \beta_k) + d^*(\beta_k, \alpha) < \epsilon \tag{32}$$

であるから，$\alpha_m \to \alpha$ となる，以上より，(X^*, d^*) は完備である □

Proposition 9.11. (X, d) を距離空間とする．$((X^*, d^*), i^*)$ と $((X^{**}, d^{**}), i^{**})$ がともに (X, d) の完備化であるとき，距離空間 (X^*, d^*) から (X^{**}, d^{**}) への全射等長写像 f で

$$i^{**} = f \circ i^* : X \to X^{**} \tag{33}$$

となるものが存在する

Proof. 任意に $a \in X$ を固定し，$D_X(x)(z) = d(x,z) - d(a,z)$ と定義する
まず，$|D_X(x)(y) - D_X(x)(z)| = |d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)$ より，$D_X(x)$ は X 上の連続関数である．さらに三角不等式より

$$|D_X(x)(z) - D_X(y)(z)| = |d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \tag{34}$$

が任意の $z \in X$ で成立する．よって $D_X(x) - D_X(y) \in B(X)$ であり

$$\|D_X(x) - D_X(y)\|_\infty = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y) \tag{35}$$

となる（実際に $z = y$ とおけば上界が達成される）．ここで $i^*(x) = D_X(x)$ と定めると，$i^* : X \to B(X)$ は等長写像である．

$B(X)$ は完備であるから，その部分集合の閉包 $X^* = \overline{i^*(X)}$ も完備である．また，構成より $i^*(X)$ は X^* において稠密である．従って (X^*, i^*) は (X, d) の完備化の $B(X)$ 内での実現とみなせる．

次に, $y, z \in X^{**}$ および $x \in X$ に対し, $\widetilde{D}_X(y)(x) = d^{**}(y, i^{**}(x))$ と定義する. $i^{**} : X \to X^{**}$ が等長写像であることから，$\widetilde{D}_X(i^{**}(x)) = D_X(x)$ が成り立つ．ここで $\widetilde{i}(y) = \widetilde{D}_X(y) - D_X(a)$ と定めると，$\widetilde{i}(y) \in B(X)$ であり，特に $x \in X$ に対して

$$\widetilde{i}(i^{**}(x)) = \widetilde{D}_X(i^{**}(x)) - \widetilde{D}_X(i^{**}(a)) = D_X(x) = i^*(x) \tag{36}$$

が成り立つ．すなわち $\widetilde{i} \circ i^{**} = i^*$ である．

$y, z \in X^{**}$ に対し，$\|\widetilde{i}(y) - \widetilde{i}(z)\|_\infty \le d^{**}(y,z)$ より $\widetilde{i} : X^{**} \to B(X)$ は連続である．$\widetilde{d}(y,z) = \|\widetilde{i}(y) - \widetilde{i}(z)\|_\infty$ とおくと，$\widetilde{d}$ は $X^{**} \times X^{**}$ 上の連続関数である．任意の $x, x' \in X$ に対して，

$$\widetilde{d}(i^{**}(x), i^{**}(x')) = \|\widetilde{i}(i^{**}(x)) - \widetilde{i}(i^{**}(x'))\|_\infty \tag{37}$$

$$= \|i^*(x) - i^*(x')\|_\infty = d(x,x') = d^{**}(i^{**}(x), i^{**}(x')) \tag{38}$$

が成り立つ．$i^{**}(X)$ は X^{**} で稠密なので，$i^{**}(X) \times i^{**}(X)$ は $X^{**} \times X^{**}$ で稠密である．連続関数の稠密部分集合での一致より，全域で $\widetilde{d} = d^{**}$，すなわち $\widetilde{i}$ は等長写像である．

$i^{**}(X)$ は X^{**} で稠密であり，$\widetilde{i}$ は等長（よって連続）であるから

$$i^*(X) = \widetilde{i}(i^{**}(X)) \subset \widetilde{i}(X^{**}) \subset \overline{\widetilde{i}(i^{**}(X))} = \overline{i^*(X)} = X^* \tag{39}$$

である．X^{**} は完備で $\widetilde{i}$ は等長写像なので，像 $\widetilde{i}(X^{**})$ も完備であり，$B(X)$ の閉集合となる．稠密性より $\widetilde{i}(X^{**}) = X^*$ が従う．

以上より，$\widetilde{i} : X^{**} \to X^*$ は全射な等長写像（等長同型）である．その逆写像を $f = \widetilde{i}^{-1} : X^* \to X^{**}$ とおけば，f も等長写像であり，$\widetilde{i} \circ i^{**} = i^*$ より $i^{**} = f \circ i^*$ を満たす． □

9.3　距離空間のコンパクト性

Definition 9.12. （全有界）
距離空間 (X, d) が全有界である $\overset{def}{\iff}$ $\forall \epsilon > 0, X = N(x_1, \epsilon) \cup N(x_2, \epsilon) \cup \cdots \cup N(x_n, \epsilon)$ をみたすような X の有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が存在する

Definition 9.13. （点列コンパクト）
距離空間 (X, d) が点列コンパクトである $\overset{def}{\iff}$ X の任意の点列が収束する部分列をもつ

Proposition 9.14. 全有界な距離空間 (X, d) は，以下をみたす

1. (X, d) は第二可算公理をみたす
2. X の任意の点列がコーシー列を部分列として含む

Proof.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$，(X, d) が全有界であるから，$\exists x_{n,1}, \cdots, x_{n,k(n)}, s.t. X = \bigcup_{j=1}^{k(n)} N\left(x_{n,j}, \dfrac{1}{n}\right)$．
ここで，$D := \{x_{n,j} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k(n)\}$ とおくと，各 n で有限で，全体は可算個の有限集合の和集合であるから，D は可算である．また，$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \epsilon > dfrac1n$ をみたす n をとれば，被覆よりある j で $x \in N\left(x_{n,j}, \dfrac{1}{n}\right)$ であるから，$d(x, x_{n,j}) < \epsilon$ である．よって，任意の近傍に対して，D の点が存在する．ここで中心を D にとり，半径 $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ をとって作った開球族 $\mathcal{B} := \{N(a, q) : a \in D, q \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ は可算集合の積だから可算である．すると，開集合 $U \subset X$ かつ $x \in U$ を任意に取り，U は開集合であるから，$\exists \epsilon > 0, s.t. N(x, \epsilon) \subset U$ である．稠密性より，$D \cap N\left(x, \dfrac{1}{2}\epsilon\right) \neq \emptyset$ で，$a \in D$ を $d(x, a) < \dfrac{1}{2}\epsilon$ としてとると，$\mathcal{Q}$ の稠密性より，$0 < q < \dfrac{1}{2}\epsilon$ を選ぶと，$N(a, q) \subset N(x, \epsilon) \subset U$ である．従って，$\mathcal{B}$ は開基で，(X, d) は第二可算である
2. 点列 $(X_n) \subset X$ を任意にとる．(X, d) は全有界であるから，$\epsilon = 1$ とすると，X は有限個の半径 1 の開球で被覆できる．従って，(x_n)ha ある開球に無限回入るから，$N(c_1, 1)$ 内に入る無限部分列を取り，$\left(x_n^{(1)}\right)$ とする．次に，$\epsilon = \dfrac{1}{2}$ で同じ操作を $\left(x_n^{(1)}\right)$ に対して行い，半径 $\dfrac{1}{2}$ のある開球に入る無限部分列 $\left(x_n^{(2)}\right)$ をとる．これらの操作を繰り返し，各 k について半径 2^{-k} の球 $N(c_k, 2^{-k})$ と無限部分列 $\left(x_n^{(k)}\right)$ をとると，$\left(x_n^{(1)}\right) \supset \left(x_n^{(2)}\right) \supset \cdots$ となるようにとれる．$y_k := x_{n_k}^{(k)}$ をとると，$m > n$ に対し，y_m, y_n はともに $\left(x_n^{(n)}\right)$ の中に属し，$N(c_n, 2^{-n})$ にも入るから，$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, c_n) + d(c_n, y_m) < 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-(n-1)}$．よって，$\forall \epsilon > 0, 2^{-(n-1)} < \epsilon$ となるような n をとれば，$d(y_n, y_m) < \epsilon$ で，Cauchy 列である

□

Proposition 9.15. (X, d) を距離空間とするとき，以下は同値である

1. (X, d) はコンパクトである
2. (X, d) は点列コンパクトである
3. (X, d) は完備かつ全有界

Proof.

Lemma 9.16. 距離空間 X の点列 (x_n) と $a \in X$ に対して，以下同値

- (x_n) の部分列 (x_{m_n}) で，a に収束するものが存在する

- $A=\{(x_n,n):n\in\mathbb{N}\}\subset X\times\widetilde{\mathbb{N}}$ とし，$\overline{A}$ を積位相に関する閉包とすると，$(a,\infty)\in\overline{A}$ である

Proof of Lemma. (1) $\Longrightarrow$ (2)
$(a,\infty)\in X\times\widetilde{\mathbb{N}}$ の任意の開近傍 U を取り，$a\in V\subset X,\infty\in W\subset\widetilde{\mathbb{N}}$ をみたす開集合 V,W が存在する．$\widetilde{\mathbb{N}}$ の定義より，W はある N より大きい全ての自然数を含むから，$x_{m_k}\to a$ より，$\exists k\in\mathbb{N},s.t.\,(x_{m_k},m_k)\in V\times W\subset U$ である．$(x_{m_k},m_k)\in A$ から，A は (a,∞) の任意の開近傍と交わる．よって，$(a,\infty)\in\overline{A}$
(2) $\Longrightarrow$ (1)
$N(a,1)$ とし，$(a,\infty)\in\overline{A}$ より，$\exists m_1>1,s.t.d\,(x_{m_1},a)<1$ である．また，$N\left(a,\dfrac{1}{2}\right)$ を考えると，閉包より $\exists m_2>m_1,s.t.d\,(x_{m_2},a)<\dfrac{1}{2}$ である．この操作を繰り返すと，部分列 (x_{m_k}) が得られ，$d\,(x_{m_k},a)<\dfrac{1}{k}$ である．よって，$x_{m_k}\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}a$ □

(1)⇒(2)
(x_n) を X の点列とし，$\widetilde{\mathbb{N}}:=\mathbb{N}\bigsqcup\{\infty\}$ とおき，$A=\{(x_n,n):n\in\mathbb{N}\}\subset X\times\widetilde{\mathbb{N}}$ の閉包を $\overline{A}$ とする．(X,d) がコンパクトであると仮定すると，$pr_2:X\times\widetilde{\mathbb{N}}\to\widetilde{\mathbb{N}}$ は閉写像である．よって，$pr_2\left(\overline{A}\right)\subset\widetilde{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}=pr_2\,(A)$ の部分集合として含む閉集合だから，$pr_2\left(\overline{A}\right)=\widetilde{\mathbb{N}}$ であり，$(a,\infty)\in pr_2\left(\overline{A}\right)$ をみたす $a\in X$ が存在するから，a に収束する部分列 (x_{m_n}) が存在する（Lem より）
(2)⇒(3)
完備性：コーシー列 $(x_n)\subset X$ を任意に取り，X が点列コンパクトであるから，収束する部分列 $(x_{m_n})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$ が存在する．よって，$(x_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$ から，X は完備である
全有界性：背理法で考えよう
X が全有界でないと仮定すると，$\exists r>0,s.t.\forall x_n\in X,\bigcup_{n=1}^{N}U_r\,(x_n)\subsetneqq X$．ここで x_{N+1} を $x\notin\bigcup_{n=1}^{N}U_r\,(x_n)$ をみたすものとすると，$\forall n<N,d\,(x_n,x_{N+1})\geq r$ から，(x_n) は収束する部分列を持たない，点列コンパクトと矛盾する．よって，X は全有界である
(3)⇒(1)
X は全有界であるから，$\exists A_n\subset X,s.t.\forall x\in X,\exists a\in A_n,s.t.d\,(x,a)<2^{-n}$
$A:=\prod_n A_n$ を取り，チコノフの定理より，A はコンパクトである
$C\subset A$ を $C:=\left\{(a_n)\in A:\forall n\in\mathbb{N},d\,(a_n,a_{n+1})\leq\dfrac{3}{2^{n+1}}\right\}$ と定義すると
$C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left\{(a_n)\in A:d\,(a_n,a_{n+1})\leq\dfrac{3}{2^{n+1}}\right\}$ となり，$pr_n\times pr_{n+1}:A\to A_n\times A_{n+1}$ は連続であることより閉部分空間であるから，C もコンパクトである
$(a_n)\in C$ とすると，$n\leq m$ に対し $d\,(a_n,a_m)\leq d\,(a_n,a_{n+1})+\cdots+d\,(a_{m-1},a_m)\leq\dfrac{3}{2^{n+1}}+\cdots+\dfrac{3}{2^m}=\dfrac{3}{2^n}$ となる．よって，(a_n) はコーシー列である．X は完備であるから，$\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in X$ が存在するから，写像 $l:C\to X$ を極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ にうつす写像と定義する
$\forall x\in X,\forall a=(a_n)\in C$，選択公理より，$d\,(a_n,x)<2^{-n}$ をみたすものが存在する．$\forall n\in\mathbb{N},d\,(a_n,a_{n+1})\leq d\,(a_n,x)+d\,(a_{n+1},x)<2^{-n}+2^{-n-1}=\dfrac{3}{2^{n+1}}$ から，$a\in C$．点列 (a_n) は x に収束するなので，$l\,(a)=x$ である．よって，$\forall x\in X,\exists a,s.t.l\,(a)=x$ で，l は全単射である
$a=(a_n)\in C,d\,(a_n,l\,(a))\leq 3\cdot 2^{-n}$ である．$r>0$ に対して，m を $6\cdot 2^{-n}<r$ をみたす最小の自然数 n とすると，$a=(a_n),b=(b_n)\in C$ が $a_m=b_m$ をみたすなら，$d\,(l\,(a),l\,(b))\leq d\,(a_m,l\,(a))+d\,(b_m,l\,(b))\leq 6\cdot 2^{-m}<r$ であるから，$pr_m^{-1}\,(pr_m\,(a))\subset l^{-1}\,(U_r\,(l\,(a)))$ であり，l は連続で，C はコンパクトであるので，$l\,(C)$ もコンパクトである．l は全射であるから $X\subset l\,(C)$ もコンパクトである □