

Contents

1	ベクトル空間と線型写像	2
2	多項式環	6
3	最小多項式	7
4	固有値・固有ベクトル・対角化	8
5	一般固有空間	9
6	ジョルダン標準形	11
8	環上の加群	14
9	自由加群と階数	16
10	単因子論	18
11	ユークリッド整域上の有限生成加群	20
12	Jordan 標準形再論	21

1 ベクトル空間と線型写像

Definition 1.1. ベクトル空間

K を体とする。非空な集合 V が以下の条件を満たすとき、 V はベクトル空間である

- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall \lambda \in K, \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ かつ $\lambda \mathbf{a} \in V$
- V は加法に関して可換群である
- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall \lambda \in K, \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$
- $\forall \mathbf{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K, (\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$
- $\forall \mathbf{a} \in V, \forall \lambda, \mu \in K, (\lambda \mu) \mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a})$
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Definition 1.2. 部分空間

V を K 上のベクトル空間とする。 V の非空な部分集合 W が以下の条件を満たすとき、 W は V の部分空間である

- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W, \mathbf{a} - \mathbf{b} \in W$
- $\forall \mathbf{a} \in W, \forall r \in K, r\mathbf{a} \in W$

Definition 1.3. 一次独立・一次従属

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が一次独立であるとは、 $\forall r_1, r_2, \dots, r_n \in K, r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が一次従属であるとは、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が一次独立でない

Definition 1.4. 基底

V を K 上のベクトル空間とする。 V の部分集合 B が以下の条件を満たすとき、 B は V の基底である

- $V = \{r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n : r_i \in K\}$
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は K 上一次独立である

Definition 1.5. 線型写像

V, W を K 上のベクトル空間とする。写像 $f: V \rightarrow W$ が以下の条件を満たすとき、 f は線型写像である

- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$
- $\forall \mathbf{a} \in V, \forall r \in K, f(r\mathbf{a}) = rf(\mathbf{a})$

さらに、 $V = W$ のとき、 f を V の線型変換ともよぶ

Definition 1.6. 表現行列

ベクトル空間 V に基底 $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ を一組与えると、線形同型写像

$$F_B: V \rightarrow K^n$$

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_n\mathbf{v}_n \mapsto \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

が定まる。線型写像 $f: V \rightarrow V$ に対して、次を可換にする行列 A を f の B に関する表現行列という

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & V \\
 F_B \downarrow & & \downarrow F_B \\
 K^n & \xrightarrow{f_A} & K^n
 \end{array}$$

V に 2 組の基底 B, B' を取ったとき, 次の図を可換にする行列 P を B から B' への基底の変換行列とよぶ

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{Id} & V \\
 F_{B'} \downarrow & & \downarrow F_B \\
 K^n & \xrightarrow{f_P} & K^n
 \end{array}$$

このとき, P は正則行列であり, B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' について, 次の図の可換性から $A' = P^{-1}AP$ が成立することがわかる

$$\begin{array}{ccccc}
 K^n & \xrightarrow{\quad f_{A'} \quad} & K^n & & \\
 \swarrow F_{B'} & & \searrow F_{B'} & & \\
 & V & \xrightarrow{f} & V & \\
 \downarrow id & & \downarrow id & & \\
 & V & \xrightarrow{f} & V & \\
 \swarrow F_B & & \searrow F_B & & \\
 K^n & \xrightarrow{\quad f_A \quad} & K^n & & \\
 \uparrow f_P & & \uparrow f_P & &
 \end{array}$$

V, W を K 上のベクトル空間とする. f, g を V から W への線型写像, $\lambda \in K$ に対し

$$\begin{aligned}
 (f + g)(v) &= f(v) + g(v) \\
 (\lambda f)(v) &= \lambda f(v)
 \end{aligned}$$

により, $f + g, \lambda f$ を定義する. これにより, V から W への K -線型写像全体 $\text{Hom}_K(V, W) := \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ は線型写像}\}$ はベクトル空間になる. さらに, $\text{End}_K(V) := \text{Hom}_K(V, V)$ とすると, $f, g \in \text{End}_K(V)$ に対し, $fg(v) = f \circ g(v) = f(g(v))$ により積を定義することができる. これにより, $\text{End}_K(V)$ は環となる. V に基底 B を 1 組与えると, 写像

$$\begin{aligned}
 \Phi_B : \text{End}_K(V) &\rightarrow M_n(K) \\
 f &\mapsto A_f(B \text{ に関する } f \text{ の表現行列})
 \end{aligned}$$

が定義される

Proposition 1.1. Φ_B はベクトル空間および環の同型である (K -代数同型という)

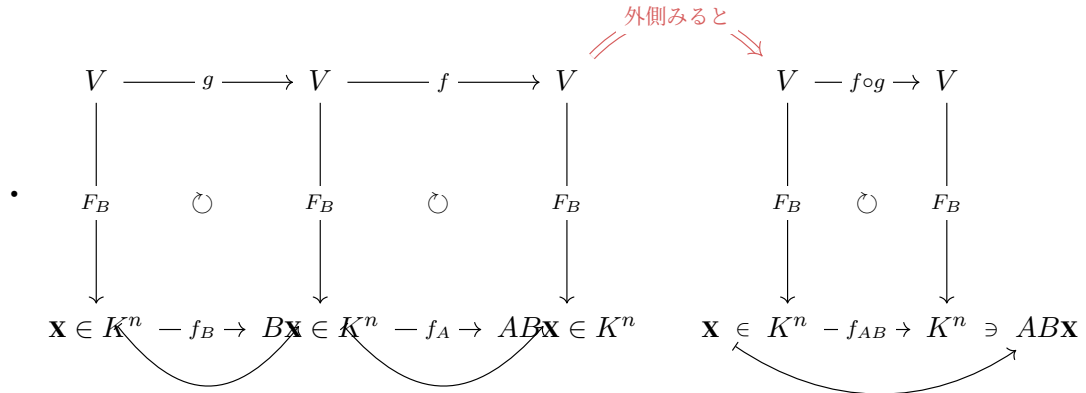
Proof. $f, g \in \text{End}_K(V)$, $A = \Phi_B(f)$, $B = \Phi_B(g)$ とする. 示すことは

1. $\Phi_B(f + g) = \Phi_B(f) + \Phi_B(g)$
2. $\Phi_B(\lambda f) = \lambda \Phi_B(f)$
3. $\Phi_B(fg) = \Phi_B(f) \Phi_B(g)$

4. $\Phi_B(id_V) = E_n$

5. Φ_B は全単射

ここで (1) (2) (4) は計算だけなので, (3) (5) を示す



よって, $\Phi_B(fg) = AB = \Phi_B(f) \Phi_B(g)$

- 単射性: $f, g \in \text{End}_K(V)$, $\Phi_B(f) = \Phi_B(g)$ とすると, $F_B f = \Phi_B(f) F_B = \Phi_B(g) F_B = F_B g$ であり, 左から F_B^{-1} を合成して $f = g$. 全射性: $M_n(K) \ni A = [a_{ij}]$ に対し, $f: V \rightarrow V$ を $v_j \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ と定義すれば, $\Phi_B(f) = A$ となる

□

Definition 1.7. 直和

V を K 上のベクトル空間とし, $W_1, W_2, \dots, W_r$ を V の部分空間とする. V の任意の元 v が $v = w_1 + w_2 + \dots + w_r$ ($w_i \in W_i$) と唯一通りに表せるとき, V は $W_1, W_2, \dots, W_r$ の直和であるといい, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ と表す

Proposition 1.2.

V を体 K 上のベクトル空間とし, $W_1, W_2, \dots, W_r$ を V の部分空間とする. $V = W_1 + W_2 + \dots + W_r$ のとき, 次は同値:

1. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$
2. $\forall k \in [2, r], (W_1 + \dots + W_{k-1}) \cap W_k = \{0\}$

Proof.

- (1) $\Rightarrow$ (2): $k \in [2, r], w \in (W_1 + \dots + W_{k-1}) \cap W_k$ を任意にとると, $w = w_1 + \dots + w_{k-1}$ から, $w \in W_1 + \dots + W_{k-1} + 0$ と表せる. 一方, $w \in W_k$ から, $w = 0 + \dots + 0 + w_k$. 仮定より, この表記は一意であるから, $w = w_k = 0$
- (2) $\Rightarrow$ (1): $v \in V$ を任意にとると, $v = w_1 + \dots + w_k$ $w_i \in W_i$ とかける. また, $v = w'_1 + \dots + w'_r$ $w'_i \in W_i$ とすると, $(w_1 - w'_1) + \dots + (w_{r-1} - w'_{r-1}) = w'_r - w_r \in W_r$. よって, $w'_r - w_r \in (W_1 + \dots + W_{r-1}) \cap W_r$ であるから, $w'_r - w_r = 0$. すると, $w_r = w'_r$ である. これを繰り返すと, $w_i = w'_i$ がすべての i について成り立つ. 一意性より, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$ である

□

Proposition 1.3.

V を体 K 上のベクトル空間とし, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r \in \text{End}_K(V)$ とする. $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ が以下の条件をみたすとする:

- $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r = id_V$
- $\forall i, \pi_1 \pi_i = \pi_i$
- $\forall i \neq j, \pi_i \pi_j = 0$

このとき, $V = \pi_1(V) \oplus \pi_2(V) \oplus \cdots \oplus \pi_r(V)$ と直和で表せる

Proof.

$v \in V$ を任意にとる. $v = Id(v) = (\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r)(v) = \pi_1(v) + \pi_2(v) + \cdots + \pi_r(v) \in \pi_1(V) + \pi_2(V) + \cdots + \pi_r(V)$. よって, $V = \pi_1(V) + \pi_2(V) + \cdots + \pi_r(V)$. 各 $2 \leq k \leq r$ に対して, $w \in (\pi_1(V) + \cdots + \pi_{k-1}(V)) \cap \pi_k(V)$ を任意にとると, $w = \pi_1(v_1) + \cdots + \pi_{k-1}(v_{k-1})$ $v_i \in V$ とかける. このとき, $\pi_k(w) = \pi_k \pi_1(v_1) + \cdots + \pi_k \pi_{k-1}(v_{k-1}) = \mathbf{0}$. 一方, $w = \pi_k(v_k) = \pi_k \pi_k(v_k) = \pi_k(w) = \mathbf{0}$. よって, $w = \mathbf{0}$ で, $(W_1 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k = \{\mathbf{0}\}$. よって, $V = \pi_1(V) \oplus \pi_2(V) \oplus \cdots \oplus \pi_r(V)$ である $\square$

2 多項式環

Definition 2.1. 多項式環

K を体とする. K 上の多項式環を $K[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in K, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ と定める

Proposition 2.1.

K を体とする

- $f(x), g(x) \in K[x], f(x) \neq 0$ に対し
 $\exists! q(x), r(x) \in K[x], g(x) = f(x)q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg f(x)$
- $K[x]$ はユークリッド整域であり, 単項イデアル整域である

Proposition 2.2.

$f_1(x), \dots, f_n(x) \in K[x]$ とする. $\text{GCD}(f_1(x), \dots, f_n(x)) = 1$ とすると, $g_1(x)f_1(x) + \cdots + g_n(x)f_n(x) = 1$ を満たす多項式 $g_1(x), \dots, g_n(x) \in K[x]$ が存在する

3 最小多項式

K を体とし, V を K 上のベクトル空間とする. $f \in \text{End}_K(V)$ に対し

$$\Phi_f(a_mx^m + \cdots + a_1x + a_0) = a_mf^m + \cdots + a_1f + a_0Id$$

により定義する (つまり, x に f を代入する写像). Φ_f は環としての準同型写像である

Proposition 3.1.

$\text{Ker}\Phi_f \neq \{0\}$

Proof.

$\dim_K V = m$ とすると, $\text{End}_K(V) \cong M_m(K)$. よって, $\dim \text{End}_K(V) = \dim M_m(K) = m^2$. よって, $Id, f, f^2, \dots, f^{m^2}$ は K 上の一次従属である. よって, $a_rf^r + \cdots + a_1f + a_0Id = 0$ を満たす $(a_r, \dots, a_0) \neq (0, \dots, 0)$ が存在する. このとき, $0 \neq a_rx^r + \cdots + a_1x + a_0 \in \text{Ker}\Phi_f$ $\square$

$K[x]$ は単項イデアル整域であるから, $\text{Ker}\Phi_f$ は $K[x]$ の 0 でないイデアルである. よって, $\text{Ker}\Phi_f = (p(x)) = \{p(x)a(x) : a(x) \in K[x]\}$ で, $\exists p(x) \in K[x]$ かつ $p(x) \neq 0$

Definition 3.1. 最小多項式

$\text{Ker}\Phi_f = (p(x))$ となるモニック多項式 $p(x)$ を f の最小多項式とよぶ

Example 3.1.

$V = \mathbb{C}^3$ とし, $f: V \rightarrow V$ を $v \mapsto Av$ とする. また, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする. このとき, f の

最小多項式は $(x-1)^2$ である

4 固有値・固有ベクトル・対角化

V をベクトル空間, $f: V \rightarrow V$ を V 上の線型変換とする. $\lambda \in K$ に対し, λ が f の固有値であるとは, $\exists \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V, s.t. f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ であり, $\mathbf{v}$ は固有多項式の根である

Proposition 4.1.

$\Phi_f(x)$ を f の K 上の最小多項式とする. $\lambda \in K$ に対し, 以下同値

1. λ は f の固有値である
2. λ は $\Phi_f(x)$ の根である

Proof.

(1) $\Rightarrow$ (2): $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ を満たす $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ を任意にとる. $\Phi_f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ とする. このとき

$$0 = \Phi_f(f)(\mathbf{v}) \quad (1)$$

$$= (f^m + \cdots + a_1f + a_0Id)(\mathbf{v}) \quad (2)$$

$$= \lambda^m \mathbf{v} + \cdots + a_1 \lambda \mathbf{v} + a_0 \mathbf{v} \quad (3)$$

$$= (\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \mathbf{v} \quad (4)$$

$$= \Phi_f(\lambda) \mathbf{v} \quad (5)$$

から, $\Phi_f(\lambda) = 0$ であり, (2) が成り立つ

(2) $\Rightarrow$ (1): $\Phi_f(\lambda) = 0$ とする. $\Phi_f(x) = (x - \lambda)q(x)$ をみたす $0 \neq q(x) \in K[x]$ とかける. $\deg \Phi_f(x) = 1 + \deg q(x)$ であるから, $0 \leq \deg q(x) < \deg \Phi_f(x)$ である. $\Phi_f(x)$ の次数最小性より, $\text{End}_K(V) \ni q(f) = \Phi_f(q(x)) \neq 0$ である. よって, $\exists \mathbf{v} \in V, s.t. \mathbf{w} := q(f)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ となる. このとき

$$(f - \lambda Id)(\mathbf{w}) = (f - \lambda Id)q(f)(\mathbf{v}) \quad (6)$$

$$= \Phi_f((x - \lambda)q(x))(\mathbf{v}) \quad (7)$$

$$= \Phi_f(f)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (8)$$

よって, $f(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w}$ である. $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ であるから, λ は f の固有値である. よって, (1) が成り立つ $\square$

$K \ni \lambda$ を f の固有値とする. $W(\lambda, f) := \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ とおく. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を f の相異なる固有値とすると, $W(\lambda_1, f) + W(\lambda_2, f) + \cdots + W(\lambda_r, f) = W(\lambda_1, f) \oplus W(\lambda_2, f) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r, f) \subseteq V$ である. 等しいとき, V は固有ベクトルからなる基底 $\mathcal{B}$ をもち, $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列は対角行列になる

5 一般固有空間

Proposition 5.1.

Ω を体とする。次の条件は同値

1. $\Omega[x]$ の定数でない任意の多項式 $f(x)$ が Ω において少なくとも一つの根をもつ
2. 任意の $f(x) \in \Omega[x], \deg f > 0$ は Ω において一次式の積に分解する。

Definition 5.1. 代数的閉体

この同値条件をみたす体 Ω を代数的閉体とよぶ

Example 5.1. 複素数体 $\mathbb{C}$ は代数的閉体である

K を代数的閉体とし, V を K 上のベクトル空間とする. $f: V \rightarrow V$ を線型変換とする. 固有値 $\lambda \in K$ に対し, $\widetilde{W}(\lambda, f) := \{v \in V : (f - \lambda Id)^m(v) = \mathbf{0} \quad m \in \mathbb{N}\}$ とおく. これは V の部分空間で, λ に対する一般固有空間という. 固有空間 $W(\lambda, f)$ は一般固有空間 $\widetilde{W}(\lambda, f)$ の部分空間である

Example 5.2.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, V = \mathbb{C}^3, f: V \rightarrow V$ を $v \mapsto Av$ とする. このとき, f の固有値は 2 である.

$W(2, f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, $(A - 2E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (A - 2E)^3 = 0$ より, $\widetilde{W}(2, f) = \mathbb{C}^3$ である

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を f の相異なる固有値の全体とする. $\varphi_f(x)$ を f の K 上の最小多項式とする. K は代数的閉体であるから, $\varphi_f(x)$ は一次式の積に分解され, $\Phi_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$ とかける

Theorem 5.1.

$f: V \rightarrow V$ を線形変換とし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を f の相異なる固有値の全体とする。

1. f の一般固有空間は f -不変
2. $V = \widetilde{W}(\lambda_1, f) \oplus \widetilde{W}(\lambda_2, f) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r, f)$

Proof.

- $(f - \lambda_i Id)^m$ と f は可換. よって, $(f - \lambda_i Id)^m(v) = \mathbf{0}$ のとき, $(f - \lambda_i Id)^m(f(v)) = f((f - \lambda_i Id)^m(v)) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ で, $f(\mathbf{0}) \in \widetilde{W}(\lambda_i, f)$
- $i = 1, \dots, r$ に対し

$$f_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (x - \lambda_j)^{m_j} = \frac{\Phi_f(x)}{(x - \lambda_i)^{m_i}} \in K[x] \quad (9)$$

とおく. $\gcd(f_1(x), \dots, f_r(x)) = 1$ であるから, $f_1(x)g_1(x) + \cdots + f_r(x)g_r(x) = 1$ をみたす $g_1(x), \dots, g_r(x) \in K[x]$ が存在する. $\text{End}_K(V) \ni \pi_i := f_i(f)g_i(f) =: \Phi_f(f_i(x)g_i(x))$

とする. このとき, $\pi_1 + \cdots + \pi_r = Id$ である. $\begin{cases} \pi_i \pi_j = 0 & i \neq j \\ \pi_i \pi_i = \pi_i \end{cases}$ を示す

$i \neq j$ のとき

$$\pi_i \pi_j = f_i(f) g_i(f) f_j(f) g_j(f) \quad (10)$$

$$= f_i(f) f_j(f) g_i(f) g_j(f) \quad (11)$$

$$= \Phi_f(f) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r (f - \lambda_k Id)^{m_k} g_i(f) g_j(f) = 0 \quad (12)$$

また, $\pi_i(\pi_1 + \cdots + \pi_r) = \pi_i Id = \pi_i$ より, $\pi_i \pi_i = \pi_i$. よって, $V = \pi_1(V) \oplus \cdots \oplus \pi_r(V)$ である

□

6 ジョルダン標準形

Proposition 6.1.

線形変換 $f: V \rightarrow V$ に対し、次の条件は同値

- f の表現行列が対角化可能
- f の最小多項式 $\varphi_f(x)$ が重根をもたない

Definition 6.1. ジョルダン・ブロック

$\lambda \in K$ に対し、 k 次正方行列 $J(\lambda: K)$ を

$$J(\lambda: K) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad (13)$$

より定義する．ただし、 $J(\lambda: 1) = [\lambda]$ とする．これを固有値 λ に対するジョルダン・ブロックとよぶ．いくつかのジョルダン・ブロックの直和で表される行列をジョルダン行列とよぶ

Proposition 6.2.

線形変換 $f: V \rightarrow V$ に対し、次の条件は同値

1. f はべき零変換
2. f の固有値はすべて 0 である
3. 任意の基底に関する f の表現行列はべき零行列である

Theorem 6.1.

$f: V \rightarrow V$ をべき零変換とする． V の適当な基底 B が存在し、 B に関する f の表現行列は、固有値 0 のジョルダン・ブロックの直和で表される

Theorem 6.2.

V をベクトル空間、 $f: V \rightarrow V$ を V 上の線型変換とする． V の適当な基底に対し、 f の表現行列がジョルダン行列 J で表される． J はジョルダン・ブロックの順序を除き一意に定まる

Theorem 6.3.

$A \in M_n(K)$ に対し、 $P \in GL_n(K)$ で、 $P^{-1}AP$ がジョルダン行列となるものが存在する． J はジョルダン・ブロックの順序を除き一意に定まる

Problem 7.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

に対し、 A のジョルダン標準形と変換行列 P を求めよ

Proof.

A の固有多項式は $\det(xE - A) = (x - 1)^4$ である．準備として

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

に対し, $(A - E)x = b$ が解を持つ条件を考えておく

$$[A - Eb] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & b_1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & b_3 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

となることから, $(A - E)x = b$ が解を持つための必要十分条件は, $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ かつ $b_4 - b_1 = 0$ である. このとき, $(A - E)x = b$ の一般解は

$$x = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{C} \quad (18)$$

である. これは必要十分条件をみたしているから

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

とすると, (p_1, p_3) は $W := \{x \in \mathbb{C}^4 : (A - E)x = 0\}$ の基底であり $(A - E)x = p_1, (A - E)x = p_3$ は解を持つ. $(A - E)x = p_1$ の解 p_2 , $(A - E)x = p_3$ の解 p_4 をそれぞれ一つずつ求めると, 例として

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

を得る. このとき, (p_1, p_2, p_3, p_4) は $\mathbb{C}^4$ の基底である. これらを並べて得られる行列 P とすれば

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

となり, A のジョルダン標準形が得られる □

Example 7.1.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよ

Proof.

$\det(xE - A) = (x - 2)^3$ である. $W(2, f_A) = \text{Ker}(f_A - 2) = \{x \in \mathbb{C}^3 : (A - 2E)x = \mathbf{0}\}$ である

$A - 2E \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから, $\dim W(2, f_A) = 3 - \text{rank}(A - 2E) = 2$ である. よ

って, ジョルダン・ブロックは二つである. よって, $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる

$$\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f_A - 2Id)^2 \quad \boxed{P_2} \quad (23)$$

$$= \text{Ker}(f_A - 2Id) \quad \boxed{P_1, P_3} \quad (24)$$

このとき

$$(A - 2E)P_1 = \mathbf{0}, \quad AP_1 = 2P_1 \quad (25)$$

$$(A - 2E)P_2 = P_1, \quad AP_2 = 2P_2 + P_1 \quad (26)$$

$$(A - 2E)P_3 = \mathbf{0}, \quad AP_3 = 2P_3 \quad (27)$$

よって, $A(P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3)J$ である. $(A - 2E)x = \mathbf{0}$ の解は簡約化より, $x_2 = s, x_3 =$

$2t$ として, $x_1 = s + t$ であるから, $\mathbf{b} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ □

8 環上の加群

Definition 8.1. 左 R -加群

R を環とする. 演算は加法である可換群 M が以下の条件をみたすとき, M を左 R -加群とよぶ

- 写像 $f: R \times M \rightarrow M \quad (r, m) \mapsto r \cdot m$ と定義されている
- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1_R \cdot x = x$

Example 8.1.

- $R = K$ が体であるなら, K -加群は K -ベクトル空間である
- M がアーベル群 (加法群) であるなら, $\mathbb{Z}$ -加群である
- 環 R 自身は R -加群である

Example 8.2.

K を体とし, $R = M_n(K)$ とする. $M = K^n$ とすると, $A \in M_n(K), v \in M$ に対し, $A \cdot v$ を行列の積と定めると, M は左 R -加群となる

Definition 8.2. R -加群の部分加群

M を R -加群とする. $\emptyset \neq N \subseteq M$ が以下の条件をみたすとき, N を M の部分加群とよぶ

- $x, y \in N \Rightarrow x - y \in N$ で, すなわち, N は M の部分群である
- $r \in R, x \in N \Rightarrow r \cdot x \in N$

Definition 8.3. R -剰余加群

M を R -加群とし, N を M の R -部分加群とすると, M の加法群としての剰余群 M/N は

$$r \cdot (m + N) := r \cdot m + N \quad (28)$$

により, R -加群となる. これを M の N -剰余加群とよぶ

Definition 8.4. R -準同型

M, N を R -加群とする. 写像 f は以下の条件をみたすとき, R -準同型であるという

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$

Remark 8.1.

$\text{Ker} f, \text{Im} f$ はそれぞれ M, N の R -部分加群である. また, 加法群としての同型 $M/\text{Ker} f \cong \text{Im} f$ は R -加群としての同型でもある

Definition 8.5. R -加群の外部直和

$M_1, M_2, \dots, M_n$ を R -加群とする. 直積集合 $M := M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M_i\}$ により, R -加群となる. これを $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ と書き, $M_1, M_2, \dots, M_n$ の (外部) 直和とよぶ

Definition 8.6. R -加群の内部直和

M を R -加群とする. $M_1, M_2, \dots, M_n$ を M の部分加群とする. M の任意の元 m が $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ と唯一通りに表せるとき, M は $M_1, M_2, \dots, M_n$ の (内部) 直和であるという

Remark 8.2.

M が $M_1, \dots, M_n$ の内部直和であるとき

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \rightarrow M \quad (29)$$

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (30)$$

は R -加群の同型写像である. 逆に, $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ (外部直和) であるとき, $M'_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in M : \forall j \neq i, x_j = 0\}$ とすれば, M'_i は M に同型な M の R -部分加群で, M は $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ の内部直和である

Proposition 8.1.

$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ に対し, 次の条件は同値

- $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$
- $M_1 + M_2 + \dots + M_i \cap M_{i+1} = \{0\} \quad 1 \leq i \leq n-1$

9 自由加群と階数

Definition 9.1. 部分加群・有限生成

R を環とし, M を R -加群とする. M の部分部分集合 S に対し, S の有限個の元の R -係数結合

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \quad r_i \in R, x_i \in S \quad (31)$$

の全体を $\langle S \rangle$ で表す. これは S を含む M の最小の R -部分加群であり, S により生成させた R -部分加群とよぶ. M が有限個の元からなる生成系を持つとき, M は R 上有限生成であるという

Definition 9.2. 一次独立・一次従属

$u_1, u_2, \dots, u_n \in M$ について

- $u_1, u_2, \dots, u_n$ が R 上一次独立 $\iff r_1u_1 + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$
- $u_1, u_2, \dots, u_n$ が R 上一次従属 $\iff u_1, u_2, \dots, u_n$ が一次独立でない

Remark 9.1.

M の部分集合 S について, S が無限集合であるとき, S の任意の有限部分集合 X が R 上一次独立となるとき, S は R 上一次独立である

Remark 9.2.

$u \in M$ について, u が一次独立 $\iff [ru = 0 \implies r = 0]$ である. $R = K$ が体のとき (すなわちベクトル空間), $u \neq 0$ なら u は K 上一次独立であったが, 一般にはそうでない

Definition 9.3. 自由加群

M を環 R 上の加群とする. $u_1, u_2, \dots, u_n \in M$ が R 上一次独立であり, $M = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ をみたすとき, $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ を M の R -基底とよぶ. M が R -基底を持つとき, M は自由加群であるという

Remark 9.3.

$R = K$ が体のとき, 有限生成な K -加群は自由 K -加群である. これは, 一般の環 R では成立しない. 例えば, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は有限生成であるが, 自由 $\mathbb{Z}$ -加群ではない

Theorem 9.1.

R を可換環とし, M を有限生成自由 R -加群とすると, M の任意の基底は有限個の元からなり, その個数は一定である

Definition 9.4. 階数

R を可換環とし, M を有限生成自由 R -加群とする. M の基底に含まれる元の個数を M の階数といい, $\text{rank} M$ で表す

Remark 9.4.

可換環 R に対し, 自由 R -加群 M の部分加群 N は, 自由加群であり, N の基底の個数は M の基底の個数以下になっているとする. R は階数 1 の R -自由加群であり, R の部分 R -加群とは R のイデアルのことである. したがって, 仮定より, R の任意のイデアル $I \neq 0$ は階数 1 の自由 R -加群となるから, $I = \langle a \rangle_R$ とかけて, $ra = 0 \implies r = 0$ となる. つまり, a は零因子ではない. したがって, R は単項イデアル整域である. この逆も成立する

Theorem 9.2.

R を単項イデアル整域とし, M を階数 m の自由 R -加群とする. N を M の部分加群とすると, N は自由加群で, $\text{rank} N \leq m$ が成立する

Proof.

$N = 0$ のときは明らかなので、以下は $N \neq 0$ とし、 m について帰納法で示す

$m = 1$ のとき、 $\{u\}$ を M の R -基底とする。 $I = \{r \in R : r \cdot u \in N\}$ とおく。 $I \neq 0$ は R のイデアルである。 R は単項イデアル整域であるから、 $0 \neq a \in R$ により、 $I = (a)$ とかける。 このとき、 $\{au\}$ は N の基底となり、特に N は $\text{rank} N = 1 = \text{rank} M$ の自由 R -加群である

$m \geq 2$ とし、 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ を M の R -基底とする

写像 $f : M \rightarrow R$ を $f(c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m) = c_m$ により定義すると、これは R -準同型である。 $\text{Ker} f = \langle u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \rangle$ であり、これは階数が $m - 1$ の自由 R -加群である。 $N \not\subset \text{Ker} f$ とする。 $f(N)$ は R の R -部分加群なので、 R のイデアルで、よって $f(N) = (a)$ とかける ($0 \neq a \in R$)。 また、 $N \cap \text{Ker} f$ は $\text{Ker} f$ の R -部分加群なので、帰納法の仮定より自由 R -加群である。 $N \cap \text{Ker} f$ の R -基底として $\{v, v_1, \dots, v_s\}$ をとる ($s \leq m - 1$)。 $v \in R$ を $f(v) = a$ となるようにとると、 $\{v, v_1, \dots, v_s\}$ は N の R -基底であることがわかる。 したがって、 N は $\text{rank} N = s + 1 \leq m - 1 + 1 = m = \text{rank} M$ の自由 R -加群である $\square$

10 単因子論

Definition 10.1. ユークリッド整域

整域 R に対し, 写像 $d: LR \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定義され, $a, b \in R (b \neq 0)$ に対し, $a = bq + r, r = 0$ または $d(r) < d(b)$ となる $q, r \in R$ が存在するとき, R をユークリッド整域という

Proposition 10.1.

ユークリッド整域は単項イデアル整域である

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$E_i(u) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & u & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$E_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

これらの行列を左からかけることは行の基本変形, 右からかけることは列の基本変形に対応する

- $R1$: 第 i 行と第 j 行を入れ替える
- $R2$: 第 i 行を u 倍する
- $R3$: 第 i 行に第 j 行の c 倍を加える
- $C1$: 第 i 列と第 j 列を入れ替える
- $C2$: 第 i 列を c 倍する
- $C3$: 第 i 列に第 j 列の c 倍を加える

Definition 10.2. 対等

$A, B \in M_{m,n}(R)$ とする. A に基本変形を有限回施して B に変形できるとき, A と B は対等であるという

Theorem 10.1.

$A \in M_{m,n}(R)$ は次の標準形と対等である

$$\begin{bmatrix} e_1 & & & & & \\ & e_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ただし, $e_i \in R$ で, $1 \leq \forall i \leq r-1, e_i \mid e_{i+1}$ をみたす. このとき, イデアル $(e_1), (e_2), \dots, (e_r)$ は A のみによって一意に定まる

Remark 10.1. 単因子

$(e_1), (e_2), \dots, (e_r)$ を A の単因子という

11 ユークリッド整域上の有限生成加群

Theorem 11.1.

R をユークリッド整域とする. M を有限生成自由 R -加群とし, N を M の R -部分加群とする. このとき, M の基底 $(u_1, u_2, \dots, u_r)$ と $e_1, e_2, \dots, e_r$ で, $e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_r$ をみたし, $(e_1 u_1, e_2 u_2, \dots, e_r u_r)$ が N の基底となるものが存在する

Theorem 11.2.

R をユークリッド整域とする. 有限生成 R -加群 M は次のような R -加群と同型である

$$R/(e_1) \oplus R/(e_2) \oplus \dots \oplus R/(e_s) \oplus R \oplus \dots \oplus R \quad (36)$$

ただし, $\oplus R$ は t 個で, e_i は 2 以上の自然数, $1 \leq i \leq r-1, e_i \mid e_{i+1}$ をみたす. $s, t, e_1, e_2, \dots, e_s$ は M のみによって一意に定まる

12 Jordan 標準形再論

K を代数的閉体とし, $V = K^n$ とする. $A \in M_n(K)$ をとる. $\Phi_A: K[x] \rightarrow M_n(K)$ を

$$\Phi_A(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m =: p(A) \quad (37)$$

により定義する. $p(x) \in K[x], v \in V$ に対し, $p(x)v := \Phi_A(p(x))v = p(A)v$ と定めることで, V は $K[x]$ -加群となる. V は K 上有限次元であるから, $K[x]$ -加群としても有限生成である. $K[x]$ はユークリッド整域であり, したがって V の $K[x]$ -加群の構造がわかる. $V = K^n$ の標準基底を $e_1, e_2, \dots, e_n$ とすると

$$F: K[x]^n \rightarrow V \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} \mapsto p_1(A)e_1 + p_2(A)e_2 + \cdots + p_n(A)e_n \quad (39)$$

は明らかに全射であり, $K[x]^n / \text{Ker} F \cong V$ である

Proposition 12.1.

$xE - A$ を左からかけることにより定まる写像を G とする

$$G: K[x]^n \rightarrow K[x]^n \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} \mapsto (xE - A) \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} \quad (41)$$

このとき, G は単射で, $\text{Im} G = \text{Ker} F$ である

Remark 12.1.

$xE - A$ は $\begin{bmatrix} e_1(x) & & & \\ & e_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n(x) \end{bmatrix}$ に対等である. ここで, $e_i(x)$ はモニック多項式で, $e_1(x) \mid e_2(x) \mid \cdots \mid e_n(x)$ をみたすものである. 対角成分に 0 が出てこないのは, 多項式として $\det(xE - A) \neq 0$ であることによる. このとき

$$V \cong K[x]^n / \text{Ker} F \quad (42)$$

$$= K[x]^n / \text{Im} G \quad (43)$$

$$\cong K[x] / (e_1(x)) \oplus \cdots \oplus K[x] / (e_n(x)) \quad (44)$$

となる. $\det(xE - A) = e_1(x)e_2(x)\cdots e_n(x)$ であり, 各 $e_i(x)$ は $e_i(x) = \prod_j (x - \lambda_{ij})$ とかける. $e_i(x) = e(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2}\cdots(x - \lambda_k)^{n_k}$ とかけているとき, 中国の剰余定理より

$$K[x] / (e(x)) \cong K[x] / ((x - \lambda_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus K[x] / ((x - \lambda_k)^{n_k})) \quad (45)$$

Proposition 12.2.

$K[x]$ のイデアル $I = ((x - \lambda)^d)$ による剰余 $K[x]$ -加群 $K[x]/I$ は, ベクトル空間として

$$p_1 = (x - \lambda)^{d-1} + I \quad (46)$$

$$p_2 = (x - \lambda)^{d-2} + I \quad (47)$$

$$\vdots \quad (48)$$

$$p_d = 1 + I \quad (49)$$

を基底としてもち、この基底に関する x の作用の表現行列は

$$J(\lambda : d) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (50)$$

となる。したがって、 $xE - A$ の単因子を求め

$$V \cong K[x]/\text{Ker}F \quad (51)$$

$$= K[x]^n / \text{Im}G \cong K[x]/(e_1(x)) \oplus \cdots \oplus K[x]/(e_n(x)) \quad (52)$$

について、さらに中国の剰余定理を用いて、 $V \cong \bigoplus K[x]/((x - \lambda_{ij})^{n_{ij}})$ となり、各直和因子について、 x の表現行列が Jordan 標準形となる。 x の作用は A の作用として定めていたので、これは A の Jordan 標準形が得られたことになる

Example 12.1.

$K = \mathbb{C}$ とし

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

とすると

$$xE - A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x-2)^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

となる。したがって、 $K[x]$ -加群として

$$K^4 \cong K[x]/((x-1)^2) \oplus K[x]/((x-1)^2) \quad (56)$$

となり、 A の Jordan 標準形は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

とわかる