

Contents

1 無限積の収束と発散	2
2 関数項の無限積	7
3 Gamma 関数	10
4 注意事項	14
5 回転数	17
6 ホモトピー同値・ホモロジー同値	19
7 Cauchy の積分定理と積分公式	21
8 留数定理	23
9 偏角の原理と Rouché の定理	25
10 開写像定理と逆関数定理	29
11 写像の等角性	33
12 Riemann 球面	36
13 一次分数変換	40

1 無限積の収束と発散

数列 $\{a_n\}_n$ に対して, 部分積 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \prod_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} a_k$ を考える. このときどこかに 0 があれば積は 0 となるから, 極限は常に存在してしまい, 値も 0 になってしまう. 以下, $\{a_n\}_n$ を複素数列とする

Definition 1.1. 0 を含まない場合の無限積

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ のとき, 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 部分積 $\prod_{n=1}^N a_n$ が 0 以外の値に収束する. このとき, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n (\neq 0)$

Definition 1.2. 0 を含む場合の無限積

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

• $\exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n = 0$ ($a_{n_0} = 0$ となる n は高々有限個)

• $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^N a_n = 0$ となる

このとき, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \prod_{n=1}^{n_0-1} a_n \cdot \prod_{n=n_0}^{\infty} a_n$ と定める

Example 1.1. 数列 $a_1 = 0, a_n = 1 (n \geq 2)$ の無限積は 0 に収束する

Proof.

$N > 2$ の場合, $\prod_{n=2}^N a_n = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ なので

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot \prod_{n=2}^{\infty} a_n = 0 \cdot 1 = 0 \quad (1)$$

□

Example 1.2. 次の数列の無限積は発散する

• $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}_n$

Proof. 無限個の 0 を含む

□

• $a_1 = 0, a_2 = 0, a_n = 2 (n \geq 3)$

Proof. $\prod_{n=3}^N a_n = 2^{N-2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$

□

• $\{2^{-n}\}_n$

Proof. $\prod_{n=1}^N 2^{-n} = 2^{-\sum_{n=1}^N n} = 2^{-\frac{N(N+1)}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

□

Theorem 1.1. 無限積の収束条件

以下同値

- 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する
- $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left| \prod_{k=n+1}^{n+m} a_k - 1 \right| < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n > n_0 \Rightarrow \left| \prod_{k=n}^m a_k - 1 \right| < \epsilon$

Proof.

- (1) $\Rightarrow$ (2)
 $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束すると仮定すると、定義より $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall k \geq N, a_k \neq 0$ かつ $P_l := \prod_{k=1}^l a_k \xrightarrow{l \rightarrow \infty} P_{\infty} := \prod_{k=N}^{\infty} a_k \neq 0$ より、 $\exists L_0 > N, s.t. \forall l \geq L_0, |P_l - P_{\infty}| < \frac{|P_{\infty}|}{2}$ となり、
 $l \geq L_0 \Rightarrow |P_l| \geq \frac{|P_{\infty}|}{2}$. これでは、 $\forall \epsilon > 0$ を取って固定すると、 $\{P_l\}_l$ は Cauchy 列なので、
 $\exists L_1 \in \mathbb{N}, s.t. \forall l \in \mathbb{N}, \forall l' \in \mathbb{N}, l, l' \geq L_1 \Rightarrow |P_l - P_{l'}| < \frac{|P_{\infty}|}{2} \epsilon$. $n \geq \max\{L_0, L_1\}, m \in \mathbb{N}$ のとき

$$\left| \prod_{k=n+1}^{n+m} a_k - 1 \right| = \left| \frac{1}{P_n} (P_{n+m} - P_n) \right| \quad (2)$$

$$= \frac{1}{|P_n|} |P_{n+m} - P_n| \leq \frac{2}{|P_{\infty}|} \cdot |P_{n+m} - P_n| < \epsilon \quad (3)$$

- (2) $\Rightarrow$ (1)
(2) が成立すると仮定すると、 $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall m, n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left| \prod_{k=n+1}^{n+m} a_k - 1 \right| < \frac{1}{2} \min\{\epsilon, 1\}$. $m = 1$ を取れば、 $n > n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \frac{1}{2} \min\{\epsilon, 1\} \leq \frac{1}{2}$ より、 $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{2} < |a_n| < \frac{3}{2}$ かつ同様にして、 $l > n_0 + 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \left| \prod_{k=n_0+2}^l a_k \right| < \frac{3}{2}$. 従って、 $n > n_0 + 2, m \in \mathbb{N}$ のとき $\left| \frac{P_{n+m}}{P_n} - 1 \right| < \frac{1}{2} \min\{\epsilon, 1\}$ なので

$$|P_{n+m} - P_n| < |P_n| \cdot \frac{1}{2} \min\{\epsilon, 1\} \leq \frac{3}{4} \min\{\epsilon, 1\} < \epsilon \quad (4)$$

$\epsilon > 0$ は任意なので、 $\{P_l\}_l$ は Cauchy 列である。従って、 $\{P_l\}_l$ は収束する。また、 $l \rightarrow \infty$ とすれば、 $\frac{1}{2} \leq \lim_{l \rightarrow \infty} |P_l| = \left| \lim_{l \rightarrow \infty} P_l \right| \leq \frac{3}{2}$ なので、 $\lim_{l \rightarrow \infty} P_l \neq 0$

□

Corollary 1.1. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Proof.

N が十分大で, $P_l := \prod_{k=N}^l a_k \xrightarrow{l \rightarrow \infty} P_\infty \neq 0$ なので, $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{P_\infty}{P_\infty} = 1$ □

Remark 1.1. この系より, $a_n = 1 + u_n$ と置き換えて $a_n \rightarrow 1 \iff u_n \rightarrow 0$ で, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ の形で無限積を考えることができる

Problem 1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + u_n \neq 0$ のとき, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が収束 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + u_n)$ が収束する

Example 1.3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in \mathbb{R}$ かつ $v_n \geq 0$ のとき, $1 + x \leq e^x$ を使うと

$$1 + v_1 + \cdots + v_n \leq (1 + v_1)(1 + v_2) \cdots (1 + v_n) \quad (5)$$

$$\leq e^{v_1} \cdot e^{v_2} \cdots e^{v_n} \quad (6)$$

$$= \exp(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \quad (7)$$

Corollary 1.2. $v_n := |u_n|$ と考える. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ が収束 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ が収束する

Definition 1.3. 無限積の絶対収束

無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が絶対収束する $\stackrel{\text{def}}{\iff} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ が収束する

言い換えれば, $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|)$ が存在する

Proposition 1.1. 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が絶対収束する $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が収束する

Proof.

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ が収束するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ で, n 十分大で, $\text{Re}(1 + u_n) > 0$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + u_n)$ は絶対収束する. $m > n$ 十分大で

$$\prod_{k=n}^m (1 + u_k) = \prod_{k=n}^m \exp(\text{Log}(1 + u_k)) \quad (8)$$

$$= \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} \text{Log}(1 + u_k)\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} \text{Log}(1 + u_k)\right) \neq 0 \quad (9)$$

□

Remark 1.2.

- $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が絶対収束 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が絶対収束
- $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が絶対収束 $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が収束
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が絶対収束 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束

Theorem 1.2. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が絶対収束するとする. このとき, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ は積の順序を入れ替えても収束し, 値は変わらない

Proof.

写像 $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を全単射とする, 十分大きな N を取り, $\forall n \geq N, 1 + u_n \neq 0, 1 + u_{\sigma(n)} \neq 0, \operatorname{Re}(1 + u_n) > 0, \operatorname{Re}(1 + u_{\sigma(n)}) > 0$ かつ $\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} \right| = 1$ より $|\operatorname{Log}(1 + u_n)| \leq 2|u_n|$ とできるので, $\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_n)$ は絶対収束する. $m > n$ に対して

$$\prod_{n=N}^m (1 + u_{\sigma(n)}) = \exp \left(\sum_{n=N}^m \operatorname{Log}(1 + u_{\sigma(n)}) \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_{\sigma(n)}) \right) \quad (10)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}) = \prod_{n=1}^{N-1} (1 + u_{\sigma(n)}) \cdot \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}) \quad (11)$$

$$= \exp \left(\sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Log}(1 + u_{\sigma(n)}) \right) \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_{\sigma(n)}) \right) \quad (12)$$

$$= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_{\sigma(n)}) \right) \quad (13)$$

$$= \exp \left(\sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Log}(1 + u_n) \right) \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_n) \right) \quad (14)$$

$$= \prod_{n=1}^{N-1} (1 + u_n) \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n) \quad (15)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \quad (16)$$

□

Problem 1.2. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{z} \quad z \in \mathbb{C}$

Proof.

• $z = 0$

$$\text{RHS} = 1, \text{LHS} = \prod_{n=1}^{\infty} 1 = 1$$

• $z \notin \pi\mathbb{Z}$

このとき, $\cos \frac{z}{2^n} \neq 0$ に注意して, $m \geq 2$ に対して

$$\sin z = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2} = 4 \sin \frac{z}{4} \cos \frac{z}{4} \cos \frac{z}{2} \quad (17)$$

$$= \vdots \quad (18)$$

$$= 2^m \sin \frac{z}{2^m} \cdot \prod_{n=1}^m \cos \frac{z}{2^n} \quad (19)$$

$$\text{よって, } \sum_{n=1}^m \cos \frac{z}{2^n} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{2^m}} = \frac{\frac{z}{2^m}}{\sin \frac{z}{2^m}} \cdot \frac{\sin z}{z} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\sin z}{z}$$

- $z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)
 $\frac{z}{2^n} = \frac{k\pi}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ なので, $\cos \frac{k\pi}{2^n} = 0$ となる最大の n を N とすると, $n > N \Rightarrow \cos \frac{z}{2^n} \neq 0$
かつ $\left| \frac{z}{2^N} \right| = \frac{\pi}{2}$ に注意すれば, 同様にして, $m > N$ のとき, $\sin \frac{z}{2^N} = 2^m \sin \frac{z}{2^{N+m}}$.
 $\prod_{n=N+1}^m \cos \frac{z}{2^n}$ なので

$$\prod_{n=N+1}^m \cos \frac{z}{2^n} = \frac{\frac{z}{2^{N+m}}}{\sin \frac{z}{2^{N+m}}} \cdot \frac{2^N}{z} \sin \frac{z}{2^N} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{2^N}{z} \sin \frac{z}{2^N} = 1 \neq 0 \quad (20)$$

□

Problem 1.3. $u_n := \frac{i}{n}$ とすると, $\prod_{n=1}^{\infty} |1 + u_n|$ は収束するが, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ は発散する

Proof. $n \geq 2$ で $1 < \left| 1 + \frac{i}{n} \right|^2 = \frac{n^2 + 1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2 - 1} = \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$ なので

$$1 < \prod_{n=2}^m \left| 1 + \frac{i}{n} \right| < \prod_{n=2}^m \sqrt{\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}} = \sqrt{\prod_{n=2}^m \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}} \quad (21)$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{m}{m+1}} < \sqrt{2} \quad (22)$$

よって, $\prod_{n=2}^{\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$ は単調増加で上に有界なので収束する. $\prod_{n=2}^{\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right| = \sup_m \prod_{n=2}^m \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$. 一方, $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{1+t^2} = 1$ なので, n 十分大で $\frac{1}{2n} < \arctan \frac{1}{n} < \text{Arg} \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ となるから, $\sum_{n=N}^m \text{Arg} \left(1 + \frac{i}{n} \right) > \sum_{n=N}^m \frac{1}{2n} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ で, $\sum_{n=N}^m \text{Log} \left(1 + \frac{i}{n} \right) = \sum_{n=N}^m \log \left| 1 + \frac{i}{n} \right| + i \cdot \sum_{n=N}^m \text{Arg} \left(1 + \frac{i}{n} \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ なので, $\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ は収束しない □

Problem 1.4. $\forall n, v_n \in \mathbb{R}, v_n > 0$ とする. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ が収束 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ が収束

Proof.

- ($\Rightarrow$)
 N 十分大で, $n \geq N \Rightarrow 1 - v_n > 0$ に注意して, $m > N$ のとき, $0 < (1 - v_n) \cdots (1 - v_m) \leq \exp - \sum_{n=N}^m v_n$ より $\exp \left(\sum_{n=N}^m v_n \right) \leq \frac{1}{\prod_{n=N}^m (1 - v_n)} \in \mathbb{R}$ で, $0 \leq \sum_{n=N}^m v_n \leq -\log \left(\prod_{n=N}^m (1 - v_n) \right)$
- ($\Leftarrow$)
 $v_n \geq 0$ より, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |-v_n| < \infty$ なので, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - |-v_n|)$ は収束する. よって, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ も収束する

□

2 関数項の無限積

Definition 2.1. 各点収束

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ $u_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が D 上で各点収束する $\stackrel{def}{\iff} \forall z \in D, \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ が収束する
 $\iff \forall z \in D, \exists N_z \in \mathbb{N}, s.t. \forall n \in \mathbb{N}_z, 1 + u_n(z) \neq 0$ かつ $\prod_{n=N_z}^{\infty} (1 + u_n(z)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=N_z}^m (1 + u_n(z)) \neq 0$ が存在する

Remark 2.1.

各点収束 $\Rightarrow \forall z \in D, P_m(z) := \prod_{n=1}^m (1 + u_n(z)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$

Definition 2.2. 一様収束

$A \subset D, \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ が A 上で一様収束する $\stackrel{def}{\iff}$

$$\bullet \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall z \in A, \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^m (1 + u_n(z)) \neq 0$$

$$\bullet \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{z \in A} \left| \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)) - \prod_{n=1}^m (1 + u_n(z)) \right| = 0$$

$$\text{ここで, } \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)) = \prod_{n=1}^{N-1} (1 + u_n(z)) \cdot \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

Remark 2.2.

各 $u_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ が連続のとき, $P_m(z) = \prod_{n=1}^m (1 + u_n(z))$ も連続なので, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ が D 上一様収束 $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ は D 上連続

Proposition 2.1.

$D \subset \mathbb{C}$, 正則な $u_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ を $\prod_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ を D 上に広義一様収束するとする. このとき,

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ は D 上で正則な関数に広義一様収束する

Proof.

各 $z \in D$ をとって固定すれば, $\prod_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| < \infty \iff \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n(z)|)$ 収束 $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$

収束. 言い換えれば, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ は各点収束している. D に含まれる任意のコンパクト集合 K をとって固定する. このとき, 仮定から $\max_{z \in K} \sum_{n=l}^m |u_n(z)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ が成り立つことに注意

する. また, これは $\max_{z \in K} |u_m(z)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ を示している. $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall z \in K, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow 1 + u_n(z) \neq 0$ であることに注意する

また, $\forall z \in K, P_m(z) = P_1(z) + \sum_{n=2}^m (P_n(z) - P_{n-1}(z)) = P_1(z) + \sum_{n=2}^m P_{n-1}(z) u_n(z)$ とかけるの

で, $l > m$ のとき, $\forall z \in K, |P_l(z) - P_m(z)| = \left| \sum_{n=m+1}^l P_{n-1}(z) u_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^l |P_{n-1}(z)| |u_n(z)|$.

また

$$|P_{n-1}(z)| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + u_k(z)) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 + u_k(z)| \quad (23)$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + |u_k(z)|) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^{n-1} |u_k(z)| \right) \leq e^M \quad (24)$$

に注意すれば, $|P_l(z) - P_m(z)| \leq e^M \cdot \sum_{n=m+1}^l |u_n(z)| \leq e^M \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |u_n(z)|$. P_l は P_{∞} に各点

収束しているので, $\sup_{z \in K} |P_{\infty}(z) - P_m(z)| \leq e^M \cdot \sup_{z \in K} \sum_{n=m+1}^{\infty} |u_n(z)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ なので, $\{P_m\}_m$ は P_{∞} に K 上で一様収束する. コンパクト集合 $K \subset D$ は任意だったので, $\{P_m\}_m$ は D 上で広義一様収束する $\square$

Theorem 2.1. 対数微分の定理

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $u_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則な関数とする. $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ が D 上広義一様収束するとする. このとき

- f の零点からなる集合 Z_f は $Z_f = \{z \in D : \exists n \in \mathbb{N}, 1 + u_n(z) = 0\}$
- $z \in D \setminus Z_f$ で次の対数微分が成立する: $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)}$. さらに右辺の級数は $D \setminus Z_f$ 上で広義一様収束する

Proof. $Z_f = \{z \in D : \exists n \in \mathbb{N}, s.t. 1 + u_n(z) = 0\}$ を示す

$z \in \{z \in D : \exists n \in \mathbb{N}, s.t. 1 + u_n(z) = 0\}$ とすると, m 十分大で, $f_m(z) = 0$ で, $m \rightarrow \infty$ とすれば,

$f(z) = 0$. 逆に $f(z) = 0$ とすると, 一様収束の定義から, $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z)) \neq 0$ かつ

$$0 = f(z) = \prod_{n=1}^{N-1} (1 + u_n(z)) \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z)) \text{ なので, } \prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z)) = 0 \text{ より, } \prod_{n=1}^{N-1} (1 + u_n(z)) = 0$$

$D \setminus Z_f$ に含まれるコンパクト集合 K をとる. このとき, $\frac{f'_m}{f_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{f'}{f}$ は K 上で一様収束することを示す

f は正則で $K \subset D \setminus Z_f$ なので, $\delta := \min_{z \in K} |f(z)| > 0$ とすると, $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ は K 上で一様収束

する. $\exists m_0 \in \mathbb{N}, s.t. \forall m \geq m_0, \min_{z \in K} |f_m(z)| \geq \frac{1}{2} \delta$. さらに, $M := \max_{z \in K} |f(z)| + \max_{z \in K} |f'(z)| < \infty$ とおけば, $m \geq m_0$ のとき

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{f'_m(z)}{f_m(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right| = \sup_{z \in K} \left| \frac{f(z) f'_m(z) - f'(z) f_m(z)}{f(z) f_m(z)} \right| \quad (25)$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2} \sup_{z \in K} |f(z) f'_m(z) - f'(z) f_m(z)| \quad (26)$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2} (|f(z)| |f'_m(z) - f'(z)| + |f'(z)| |f_m(z) - f(z)|) \quad (27)$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2} \left(\sup_{z \in K} |f'_m(z) - f'(z)| + \sup_{z \in K} |f_m(z) - f(z)| \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (28)$$

積の微分法より

$$f'_m = u'_1 \prod_{n=2}^m (1+u_n) + u'_2 (1+u_1) \prod_{n=3}^m (1+u_n) + \cdots + u'_m \prod_{n=1}^{m-1} (1+u_n) \quad (29)$$

$$= \sum_{n=1}^m \frac{u'_n}{1+u_n} \prod_{n=1}^m (1+u_n) \quad (30)$$

□

Theorem 2.2. Euler の積公式

$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ $z \in \mathbb{C}$ で、右辺の無限積は $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束する

Proof. 任意のコンパクト集合 K をとると、 $\exists R > 0, s.t. D := D(0, R) \supset K$ とできるので、 $u_n(z) := -\frac{z^2}{n^2\pi^2}$ とすれば、 $\sup_{z \in K} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2\pi^2} < \infty$ から、 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ は K 上で一様収束する。 K は任意に取ったから、 $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ は $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束する。

$\forall R > 0$ をとり、 $D := D(0, R)$ を固定しておく、 $z \notin Z_f$ のとき、 $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(z)}{1+u_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ なので、 $z \notin Z_f \cup \{0\}$ のとき、 $\frac{(zf(z))'}{zf(z)} = \frac{f(z) + zf'(z)}{zf(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$ 。
一方、 $z \notin \pi\mathbb{Z}$ のとき

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \quad (31)$$

なので、 $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ のとき、 $\left(\frac{zf(z)}{\sin z}\right)' = 0$ 。 $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ は連結なので、 $\exists c \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{zf(z)}{\sin z} = c$ 。
 $z_m := \frac{1}{m}$ とすれば、 m 十分大で、 $z_m \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ かつ $c = \frac{z_m}{\sin z_m} f(z_m) \Rightarrow c = 1$ 。従って、 $\sin z = zf(z)$ 。一致の定理より、 $\sin z = zf(z)$ □

3 Gamma 関数

Lemma 3.1. $g_n(z) := \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ は次をみたす

1. $g_n(z) = z \exp\left(z\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)\right) \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right)$
2. Euler の定数 $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) > 0$
3. 無限積 $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right)$ は $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束する

Proof.

1.

$$g_n(z) = z(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right) \cdot n^{-z} \quad (32)$$

$$= z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{k}\right) \cdot \exp(-z \log n) \quad (33)$$

$$= z \exp\left(z\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right)\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \exp\left(-\frac{z}{k}\right) \quad (34)$$

2. $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1)$ とおくと, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = a_n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ なので, $\{a_n\}_n$ が収束することを示ばいい

•

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k}\right) \quad (35)$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t}\right) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k^2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad (36)$$

- $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+2}{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+t}\right) dt < 0$ なので, $\{a_n\}_n$ は上に有界で単調増加な数列であることで収束する

3. $u_n(z) := \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) - 1$ とすれば, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ なので

$$f(w) := (1+w)e^{-w} - 1 = e^{-w}(1+w-e^w) \quad (37)$$

$$= e^{-w} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = e^{-w} \cdot w^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+2)!} \quad (38)$$

なので, $|f(w)| \leq e^{-\operatorname{Re} w} \cdot |w|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|w|^k}{(k+2)!} \leq e^{-\operatorname{Re} w} \cdot |w|^2 \cdot e^{|w|} \leq |w|^2 e^{|w|}$ を使えば,

$|z| \leq R$ のとき, $|u_n(z)| = \left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leq \frac{R^2}{n^2} e^{\frac{R}{n}}$ なので, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| \leq R^2 e^R \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ か

ら, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ は $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束する

□

Remark 3.1.

$g(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) n^{-z}$ は $\mathbb{C}$ 上で広義一様収束する. なので, g は $\mathbb{C}$ 上正則で, g の零点は $P_\Gamma := \{n : n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ である

Definition 3.1. Gauss の無限積による Γ 関数

$$\forall z \notin P_\Gamma, \Gamma(z) := \frac{1}{g(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

Theorem 3.1. Γ 関数の性質

1. Γ の $\mathbb{C}$ にある特異点は全て孤立していて極であり, Γ の極全体の集合は P_Γ は全て位数 1 である
2. Weierstrass の無限積 $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$
3. $\forall z \notin P_\Gamma, \Gamma(1) = 1, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Res}(\Gamma, 0) = 1, \text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Proof.

• (1) と (2) は補題より証明済み

• $g(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ なので, $\Gamma(1) = \frac{1}{g(1)} = 1$. $z \notin P_\Gamma$ のとき

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \frac{g(z)}{g(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} \quad (39)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{z+n+1} = z \quad (40)$$

• $\text{Res}(\Gamma, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1$ で, $z \notin P_\Gamma, n \in \mathbb{N}$ のとき, $\Gamma(z+n+1) = (z+n)\Gamma(z+n) = \cdots = z(z+1) \cdots (z+n)\Gamma(z)$ なので, $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)}$ より, $\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{\Gamma(1)}{\prod_{k=0}^{n-1} (-n+k)} = \frac{(-1)^n}{n!}$

□

Theorem 3.2. Γ 関数の性質 2

1. Euler の相補公式: $\forall z \in \mathbb{C}, (g(z)g(1-z)) = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
3. $\forall z \notin P_\Gamma, \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right)$

$$4. \forall z \notin P_\Gamma, \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

$$5. \text{Legedre の公式: } \forall z \notin P_\Gamma \cup P_\Gamma - \frac{1}{2}, \sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

$$6. \text{Euler の積分表示: } \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Proof.

1.

$$g(z)g(1-z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)g_n(1-z) \quad (41)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z \cdot (1+z) \cdots (z+n)}{n^z n!} \cdot \frac{(1-z)(2-z) \cdots (n+1-z)}{n^{1-z} n!} \quad (42)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(n+1-z)}{n(n!)^2} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \quad (43)$$

$$= \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \quad (44)$$

$$2. z = \frac{1}{2} \text{ とすれば, } \left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{\pi} \text{ から, } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}$$

$$3. (g(z))' = \left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)' = -\frac{\Gamma'(z)}{(\Gamma(z))^2} \text{ なので, } \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\Gamma(z)g'(z) = -\frac{g'(z)}{g(z)} \text{ で, } \frac{1}{\Gamma(z)} =$$

$$g(z) = ze^{\gamma z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \text{ なので}$$

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} \exp\left(-\frac{z}{n}\right) - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)}{\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)} \quad (45)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-z}{n^2 + nz} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) \quad (46)$$

で

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{-(ze^{\gamma z})' h(z) - ze^{\gamma z} h'(z)}{ze^{\gamma z} h(z)} \quad (47)$$

$$= -\frac{1}{z} - \gamma - \frac{h'(z)}{h(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) \quad (48)$$

4.

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) \right) \quad (49)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad (50)$$

5. $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ と $\Gamma(2z)$ の極の集合は $P := P_\Gamma \cup \left(P_\Gamma - \frac{1}{2}\right) = \left\{n, n - \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\right\}$ に注意する. $z \notin P$ のとき

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \quad (51)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{(2z+2n)^2} + \frac{4}{(2z+2n+1)^2} \right) \quad (52)$$

$$= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2z+m)^2} = 2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) \quad (53)$$

よって, $f(z) := \frac{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)}$ とおけば

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})} \times \frac{(\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}))' \Gamma(2z) - 2\Gamma'(2z)\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{(\Gamma(2z))^2} \quad (54)$$

$$= \frac{(\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}))'}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})} - 2 \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \quad (55)$$

なので, $\frac{d}{dz} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) = 0$ で, $\exists c \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \mathbb{C} \setminus P, \frac{f'(z)}{f(z)} = c$. $z_m := \frac{1}{m}$ とすれば, m 十分大で, $z_m \in \mathbb{C} \setminus P$ かつ $c = \frac{f'(z_m)}{f(z_m)} = \frac{\Gamma'(2z_m)}{\Gamma(2z_m)} - \frac{\Gamma'(z_m)}{\Gamma(z_m)} - \frac{\Gamma'(z_m+\frac{1}{2})}{\Gamma(z_m+\frac{1}{2})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ になるので, $c = 0$. 従って, $\exists c' \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \mathbb{C} \setminus P, f(z) = c'$. $z_m := \frac{1}{m}$ とすれば, m 十分大で, $z_m \in \mathbb{C} \setminus P$ かつ $c' = f(z_m) = \frac{\Gamma(z_m)\Gamma(z_m+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z_m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2^{1-1}\sqrt{\pi}$ になるので, $c' = 2^{1-1}\sqrt{\pi}$. 従って, $\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$. この c を用いて, $h(z) = e^{cz}$ とおくと, $\frac{h'}{h} = c = \frac{f'}{f}$ より, $\mathbb{C} \setminus P$ 上で, $\left(\frac{f(z)}{h(z)}\right)' = \frac{f'(z)h(z) - f(z)h'(z)}{(h(z))^2} = 0$. 言い換えれば, $\exists d \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \mathbb{C} \setminus P, f(z) = de^{cz}$ で, d と C について解くと, $d = 2\sqrt{\pi}, c = -2\log 2$

6. $F(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ は $x > 0$ のとき広義積分可能で, $F_n(x) := \int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt$ は $x > 0$ 上広義一様収束する. $I_n(x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ $x > 0$ とおけば, $I_n(x) = \frac{1}{g_n(x)}, n \in \mathbb{N}, x > 0$ で, I_n は $x > 0$ で F に広義一様収束する. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, F_n(z) := \int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt$ とおけば, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\operatorname{Re} z-1}$ なので, F_n は D 上で $F(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ に広義一様収束するから, F は D 上で正則である. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{g_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = F(x)$ で, Γ と F は共に D 上で正則であるから, 一致の定理より, $\forall z \in D, \Gamma(z) = F(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$

□

4 注意事項

Lemma 4.1. 一様収束性

$D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{C}$ とし, $(z_0, \xi_0) \in D_2^\circ \times D_3^\circ$ とする. $K \subset D_3$ を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合とし, $h : D_1 \times D_2 \times D_3 \rightarrow \mathbb{C}$ を連続写像とする. このとき, h は (z_0, ξ_0) で K 上一様収束する. 言い換えれば, $\max_{\omega \in K} |h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)| \rightarrow 0 \quad (z, \xi) \rightarrow (z_0, \xi_0)$

Proof.

$(z_0, \xi_0) \in D_2^\circ \times D_3^\circ$ なので, $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, 2r) \subset D_2$ と $\overline{D(\xi_0, r)} \subset D(\xi_0, 2r) \subset D_3$ をみたす $r > 0$ が存在する. このとき, $K \times \overline{D(z_0, r)} \times \overline{D(\xi_0, r)} =: X$ はコンパクトなので, h は X 上で一様連続である. すると, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (\omega, z, \xi) \in X, \forall (\omega', z', \xi') \in X, |\omega - \omega'| < \delta, |z - z'| < \delta, |\xi - \xi'| < \delta$ ならば $|h(\omega, z, \xi) - h(\omega', z', \xi')| < \varepsilon$ である. $\forall \varepsilon > 0$, このような $\delta > 0$ を取ると, $\forall \omega \in K$ に対して, (ω, z, ξ) と (ω, z_0, ξ_0) は $|z - z_0| < \delta, |\xi - \xi_0| < \min\{r, \delta\} =: \rho$ のとき, $|h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)| < \varepsilon$ である. 言い換えれば, $\forall \omega \in K, \forall z \in D(z_0, \rho), \forall \xi \in D(\xi_0, \rho), |h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)| < \varepsilon$ である. 従って, $\max_{\omega \in K} |h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)| < \varepsilon$ である $\square$

Lemma 4.2.

γ : 閉路とし, $g : \gamma^*$ 上連続とする. このとき, $G(z) := \int_{\gamma} \frac{g(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad z \notin \gamma^*$ とする. このとき, G は $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ 上連続である

Proof.

$h(w, z) := \frac{g(w)}{w - z}$ とおく. $z_0 \notin \gamma^*, z \notin \gamma^*$ に対して

$$|G(z) - G(z_0)| = \left| \int_{\gamma} (h(w, z) - h(w, z_0)) dw \right| \quad (56)$$

$$\leq \int_{\gamma} |h(w, z) - h(w, z_0)| dw \quad (57)$$

$$\leq \max_{w \in \gamma^*} |h(w, z) - h(w, z_0)| \cdot \text{length}(\gamma) \quad (58)$$

$\square$

Proposition 4.1. 積分記号下の微分

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, γ を閉路とし, $g : D \times \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ を連続写像とする. さらに

- $\forall \xi \in \gamma^*, g(\cdot, \xi) : D \rightarrow \mathbb{C}$ は微分可能
- $\frac{\partial g}{\partial z}$ は $D \times \gamma^*$ 上連続

このとき, $G(z) := \int_{\gamma} g(z, \xi) d\xi \quad z \in D$ は D 上で正則で, $G'(z) = \frac{d}{dz} \int_{\gamma} g(z, \xi) d\xi = \int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial z}(z, \xi) d\xi$

Proof.

$z_0 \in D$ を固定する, $z \neq z_0$ のとき, $\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{g(z, \xi) - g(z_0, \xi)}{z - z_0} d\xi$. そこで, $z \in D, \xi \in$

γ^* に対して, $h(z, \xi) := \begin{cases} \frac{g(z, \xi) - g(z_0, \xi)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \xi) & z = z_0 \end{cases}$ と定義すると, 仮定から h は $D \times \gamma^*$ 上

連続である。よって、 $\max_{\xi \in \gamma^*} |h(z, \xi) - h(z_0, \xi)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ なので

$$\left| \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \xi) d\xi \right| = \left| \int_{\gamma} h(z, \xi) - h(z_0, \xi) d\xi \right| \quad (59)$$

$$\leq \max_{\xi \in \gamma^*} |h(z, \xi) - h(z_0, \xi)| \cdot \text{length}(\gamma) \quad (60)$$

従って、 G は z_0 で微分可能で、 $\frac{dG}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \xi) d\xi$. z_0 は D の任意の点だったので、 G は D 上で正則である $\square$

Lemma 4.3.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし、 $f : D$ 上で正則な関数とする。 $g : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ を $g(z, \xi) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} & z \neq \xi \\ f'(z) & z = \xi \end{cases}$ とする。このとき、以下は成り立つ

- g は連続
- $\forall \xi \in D, g(\cdot, \xi) : D \rightarrow \mathbb{C}$ は正則
- $\frac{\partial g}{\partial z}$ は $D \times D$ 上連続

Proof.

- $\forall (z_0, \xi_0) \in D \times D$ を固定する。 $z_0 \neq \xi_0$ のとき、 $g(z, \xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ なので、 (z_0, ξ_0) で連続。 $z_0 = \xi_0$ のとき、 $\overline{D}(z_0, r_0) \subset D$ となる半径 $r_0 > 0$ を取っておく。 $\gamma(t) := z_0 + r_0 e^{it}, t \in [0, 2\pi], z, \xi \in D(z_0, r_0)$ のとき、Cauchy の微積分公式より、 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - \xi} d\omega, f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$ なので、 $z \in D(z_0, r_0), \xi \in D(z_0, r_0)$ のとき、 $\xi \neq z$ のとき、 $g(z, \xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)(\omega - \xi)} d\omega$ で、 $\xi = z$ のとき、 $g(z, \xi) = f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega$ なので、 $\omega \in \gamma^*, z \in D(z_0, r_0), \xi \in D(\xi_0, r_0)$ に対して、 $h(\omega, z, \xi) = \frac{f(\omega)}{(\omega - z)(\omega - \xi)}$ とおけば、 h は $\gamma^* \times D(z_0, r_0) \times D(\xi_0, r_0)$ 上連続で

$$|g(z_0, \xi_0) - g(z, \xi)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (h(\omega, z_0, \xi_0) - h(\omega, z, \xi)) d\omega \right| \quad (61)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\omega \in \gamma^*} |h(\omega, z_0, \xi_0) - h(\omega, z, \xi)| \cdot \text{length}(\gamma) \quad (62)$$

- $\forall \xi_0 \in D$ を固定して、 $g_0(z) := g(z, \xi_0)$ の微分可能性を考える。 $z \neq \xi_0$ のとき、 $g_0(z) = g(z, \xi_0) = \frac{f(z) - f(\xi_0)}{z - \xi_0}$ なので、 g_0 は z で微分可能。 $z = \xi_0$ のとき、 f は D 上で正則なので、 $\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = f'(z) = g(z, \xi_0) = g_0(z)$ なので、 g_0 は z で連続である。それ以外のところも g_0 は微分可能なので、Morera の定理より、 g_0 は D 上で正則である。
- $g_{\xi}(z) := g(z, \xi)$ とおくと、 $\frac{\partial g}{\partial z}(z, \xi) - \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \xi_0) = g'_{\xi}(z) - g'_{\xi_0}(z)$. そこで、 $r > 0$ を小さく取り、 $\overline{D}(z_0, r) \subset D$ としておく。 $\gamma(t) := z_0 + r e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ とおく。 $z \in D(z_0, r)$ のと

き, Cauchy の微積分公式より, $g'_\xi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g_\xi(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z, \xi)}{(\omega - z)^2} d\omega$ なので

$$\left| \frac{\partial g}{\partial z}(z, \xi) - \frac{\partial g}{\partial z}(z_0, \xi_0) \right| = |g'_\xi(z) - g'_{\xi_0}(z)| \quad (63)$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)) d\omega \right| \quad (64)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\omega \in \gamma^*} |h(\omega, z, \xi) - h(\omega, z_0, \xi_0)| \cdot 2\pi \xrightarrow{(z, \xi) \rightarrow (z_0, \xi_0)} 0 \quad (65)$$

となるので, $\frac{\partial g}{\partial z}$ は (z_0, ξ_0) で連続である

□

5 回転数

Proposition 5.1. 回転数

γ を閉路とし, $p \notin \gamma^*$ とする. このとき, $\text{Ind}(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz \in \mathbb{Z}$ とし, この $\text{Ind}(\gamma, p)$ を γ の p に関する指数という

Proof.

$\gamma = \gamma(t), t \in [a, b], \gamma(a) = \gamma(b)$ とする. このとき, $\int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p} dt$. そこで,

$h(s) := \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p} dt, s \in [a, b]$ とおき, $g(s) := e^{-h(s)} (\gamma(s) - p)$ とおく

g は定数のとき, 有限個の点を除いて g も可微分で, $g'(s) = -e^{-h(s)} (-h'(s) (\gamma(s) - p) + \gamma'(s)) = 0$ で, h と γ が連続なので, g も連続であり, 定数である. $c := g(a)$ とおけば, $c = e^{-h(a)} (\gamma(a) - p) = \gamma(a) - p$

$e^{h(b)} = \frac{\gamma(b) - p}{c} = \frac{\gamma(b) - p}{\gamma(a) - p} = 1 = e^0$ なので, $\exists m \in \mathbb{Z}, s.t. h(b) = 2m\pi i$ □

Example 5.1.

γ を定値閉路とし, $z_* \in \mathbb{C}$ とする. さらに $\gamma(t) = z_*$ ($t \in [0, 2\pi]$) とする. $\gamma'(t) = 0$ より, $p \neq z_*$ のとき, $\int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p} dt = 0$ である. よって, $\text{Ind}(\gamma, p) = 0$

Example 5.2.

$\gamma(t) := p + R(t) e^{i\theta(t)}, t \in [a, b]$ とし, $R, \theta : C^1$ 級の実数値で, $R(t) > 0, \gamma(a) = \gamma(b)$ とする. $\gamma'(t) = e^{i\theta(t)} (R'(t) + iR(t)\theta'(t))$ なので

$$\text{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{R(t) e^{i\theta(t)}} dt \quad (66)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{R'(t)}{R(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta'(t) dt \quad (67)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \text{Log} \frac{R(b)}{R(a)} + \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) \quad (68)$$

Proposition 5.2.

γ を閉路とし, $p \notin \gamma^*$ とする. また, γ^{-1} を γ の逆向きの閉路とする. このとき

- $\text{Ind}(\gamma^{-1}, p) = -\text{Ind}(\gamma, p)$
- γ^* が凸集合 D に含まれているとき, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$

Proof.

積分の定義より

$$2\pi i \text{Ind}(\gamma, p) = \int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = - \int_{\gamma^{-1}} \frac{1}{z-p} dz = -2\pi i \text{Ind}(\gamma^{-1}, p) \quad (69)$$

$p \notin D$ のとき, z の関数 $\frac{1}{z-p}$ は D 上正則なので, Cauchy の積分定理より, $\text{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-p} dz = 0$ □

Theorem 5.1.

γ を閉路とする. このとき, 関数 $\mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ を $z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z)$ とする. この関数は連続である. したがって, 各連結成分上で $\text{Ind}(\gamma, \cdot)$ は一定の整数値である

Proof.

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, G(z) := \int_{\gamma} \frac{1}{\omega - z} d\omega$ は連続なので, $\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} G(z)$ も連続である. Ω を $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ の連結成分とすると, Ω は開集合より, 弧状連結である. $\forall z, w \in \Omega$ に対して, $\exists \varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$: 連続で, $\varphi(0) = z, \varphi(1) = w$ とする. このとき, $\text{Ind}(\gamma, \varphi(\cdot))$ の一様連続性より, $\exists \delta > 0, s.t. \forall s \in [0, 1], \forall t \in [0, 1], |s - t| < \delta \Rightarrow |\text{Ind}(\gamma, \varphi(s)) - \text{Ind}(\gamma, \varphi(t))| < \frac{1}{2}$ であるから, $\text{Ind}(\gamma, \varphi(s)) = \text{Ind}(\gamma, \varphi(t))$ として考えると, $\text{Ind}(\gamma, \varphi(0)) = \text{Ind}(\gamma, \varphi(1))$ である $\square$

Proposition 5.3.

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を閉路とし, $p \notin \gamma^*$ とする. このとき, 以下をみたす区分的に C^1 級の関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する:

- $\forall t \in [a, b], \exp(f(t)) = \gamma(t) - p$
- $\forall t \in [a, b], f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p}$
- $\text{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} dt = \frac{f(b) - f(a)}{2\pi i}$

Proof.

記号を簡単にするため, 座標を平行移動して, $p = 0 \notin \gamma^*$ としておく. $0 \notin \gamma^*$ かつ γ^* はコンパクトなので, $d := \min_{t \in [a, b]} |\gamma(t)| > 0$ である. γ は $[a, b]$ 上一様収束で, $\gamma^* = \gamma([a, b])$ はコンパクトなので, 区間 $[a, b]$ を細かく分割して, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, I_k := [t_k, t_{k+1}]$ とすると

- $\forall t \in I_k, |\gamma(t) - \gamma(t_k)| < \frac{d}{2} \quad (0 \leq k \leq n-1)$
- 各開円盤 $D\left(\gamma(t_k), \frac{d}{2}\right)$ 上で, $\arg \gamma(t)$ が正則な一価関数となるようにとり, $\forall t \in I_k, f_k(t) := \log(\gamma(t))$ と定義する. さらに $t \in I_0$ のとき, $f(t) := f_0(t)$ と定義し, $\exp(f_0(t_1)) = \gamma(t_1) = \exp(f_1(t_1))$ なので, $\exists m_0 \in \mathbb{Z}, s.t. f_0(t_1) = f_1(t_1) + 2m_0\pi i$. そこで, $t \in I_1$ のとき, $f(t) := f_1(t) + 2m_0\pi i$ とすれば, f は $I_0 \cup I_1$ 上で連続である. 同様にして, 各 $1 \leq k \leq n-1, t = t_k$ で, $\exp(f_k(t_{k+1})) = \gamma(t_{k+1}) = \exp(f_{k+1}(t_{k+1}))$ なので, $0 \leq \forall k \leq n-1, \exists m_k \in \mathbb{Z}, s.t. f_k(t_{k+1}) = f_{k+1}(t_{k+1}) + 2m_k\pi i$ である. $t \in I_k$ のとき, $f(t) := f_k(t) + 2\pi i \sum_{j=0}^{k-1} m_j$ と定義すれば, f は連続で各小区間 I_k 上で $f'(t) = f'_k(t) =$

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \quad \text{で, } \exp(f(t)) = \exp(f_k(t)) \exp\left(2\pi i \sum_{j=0}^{k-1} m_j\right) \quad \text{だから}$$

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \quad (70)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} (f(b) - f(a)) \quad (71)$$

$\square$

6 ホモトピー同値・ホモロジー同値

Definition 6.1. ホモトピー同値

$\Omega (\subset \mathbb{C})$: 領域とし, $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$: 連続閉曲線とする. γ_0 と γ_1 がホモトピー同値 (ホモトープ) であるとは, $\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$: 連続写像で

- $\forall t \in [0, 1], H(0, t) = \gamma_0(t)$
- $\forall t \in [0, 1], H(1, t) = \gamma_1(t)$
- $\forall s \in [0, 1], H(s, 0) = H(s, 1)$

Remark 6.1.

ホモトピー同値は同値関係である

- $\gamma \sim_{\Omega} \gamma, H(s, t) := \gamma(t)$
- $\gamma_0 \sim_{\Omega} \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 \sim_{\Omega} \gamma_0, \tilde{H}(s, t) := H(1 - s, t)$
- $\gamma_0 \sim_{\Omega} \gamma_1, \gamma_1 \sim_{\Omega} \gamma_2 \Rightarrow \gamma_0 \sim_{\Omega} \gamma_2, H(s, t) := \begin{cases} H_1(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s - 1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, H_1(1, \cdot) = \gamma_1(\cdot) = H_2(0, \cdot)$

Theorem 6.1. 回転数のホモトピー不変性

$\Omega (\subset \mathbb{C})$: 領域とし, $\gamma_0, \gamma_1 : \Omega$ 内の閉路とする. $\gamma_0 \sim_{\Omega} \gamma_1 \Rightarrow \forall p \notin \Omega, \text{Ind}(\gamma_0, p) = \text{Ind}(\gamma_1, p)$

Lemma 6.1.

$\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$: 閉路とし, $p \notin \gamma_0^* \cup \gamma_1^*, \gamma_0$ は γ_1 と $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ 内でホモトピー H によりホモトピー同値であるとする. このとき, $\exists F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$: 連続写像で

- $F(0, \cdot)$ と $F(1, \cdot)$ は区分的に C^1 級
- $\forall s \in [0, 1], \forall t \in [0, 1], \exp(F(s, t)) = H(s, t) - p$

Proof.

$\tilde{H}(s, t) := H(s, t) - p$ として, $p \notin H([0, 1] \times [0, 1]) \iff 0 \notin \tilde{H}([0, 1] \times [0, 1])$ に注意する. $\tilde{H}$ を考えることで, $p = 0$ のときを示せばいい

H は $[0, 1] \times [0, 1]$ 上一様連続なので, $s_j := \frac{j}{n}, t_k := \frac{k}{n}, j, k \in [0, n]$ とおくと, 各小区間 $I_{j,k} := [s_j, s_{j+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ に対して, n を大きくとれば, $F_{j,k}(s, t) := \log(H(s, t))$ が $I_{j,k}$ 上で正則な関数となる

$t \in [t_0, t_1]$ のとき, $\exp(F_{0,1}(s_1, t)) = H(s_1, t) = \exp(F_{1,1}(s_1, t))$ なので, 各 $t \in [t_0, t_1], \exists m_{0,1}(t) \in \mathbb{Z}, s.t. F_{0,1}(s_1, t) = F_{1,1}(s_1, t) + 2\pi i m_{0,1}(t)$. ここで, $m_{0,1}(t) = \frac{1}{2\pi i} (F_{0,1}(s_1, t) - F_{1,1}(s_1, t))$ なので, $m_{0,1}(t)$ は t に依存しない整数. 言い換えれば, $\forall t \in [t_0, t_1], m_{0,1} \equiv m_{0,1}(t)$. 従って, $\forall t \in [t_0, t_1], F_{0,1}(s_1, t) = F_{1,1}(s_1, t) + 2\pi i m_{0,1}$. 同様にして, $\forall j \in [0, n-1], \exists m_{j,1} \in \mathbb{Z}, s.t. \forall t \in [t_j, t_{j+1}], F_{j,1}(s_{j+1}, t) = F_{j+1,1}(s_{j+1}, t) + 2\pi i m_{j,1}$. すると

$$F_1(s, t) = \begin{cases} F_{0,1}(s, t) & (s, t) \in I_{0,1} \\ F_{j+1,1}(s, t) + \sum_{k=0}^j 2\pi i m_{k,1} & (s, t) \in I_{j+1,1} \end{cases} \quad (72)$$

このとき, F_1 は $[0, 1] \times [t_0, t_1]$ 上で連続で, $\exp(F_1(s, t)) = H(s, t)$ をみたす
同様に, $F_k := [0, 1] \times [t_{k-1}, t_k]$ 上で連続で, $\exp(F_k(s, t)) = H(s, t)$ となるように構成する.
 $\forall s \in [0, 1], \exp(F_k(s, t_k)) = H(s, t_k) = \exp(F_{k+1}(s, t_k))$

$\forall s \in [0, 1], \exists m_k \in \mathbb{Z}, s.t. F_k(s, t_k) = F_{k+1}(s, t_k) + 2\pi i m_k, \mathbb{Z} \ni m_k(s) = \frac{1}{2\pi i} (F_k(s, t_k) - F_{k+1}(s, t_k))$
 から, $\forall s \in [0, 1], m_k \equiv m_k(s)$ である. すると, $F_k(s, t_{k+1}) = F_{k+1}(s, t_k) + 2\pi i m_k$ なので,

$$F(s, t) := \begin{cases} F_1(s, t) & (s, t) \in [0, 1] \times [0, t_1] \\ F_{k+1}(s, t) + 2\pi i \sum_{l=1}^k m_l & (s, t) \in [0, 1] \times [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$
 と定義すれば, $[0, 1] \times [0, 1]$ 上で
 $\exp(F(s, t)) = H(s, t)$ をみたす. $F(0, t) = \log(H(0, t)) = \log(\gamma_0(t)), F(1, t) = \log(H(1, t)) = \log(\gamma_1(t))$ $\square$

Definition 6.2. 曲線の形式和

n 個の曲線 γ_k の形式和 (チェーン) $\gamma := \gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, 像として, $\gamma^* = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^*$
 とする. また, n 個の曲線 γ の形式和を $n\gamma := \gamma + \cdots + \gamma$ と書く. 各 γ_k が閉路のとき,
 $\gamma := \gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$ をサイクルとよぶ. サイクル $\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$ の点 $p \notin \gamma^*$ における指数
 (回転数) を $\text{Ind}(\gamma, p) := \sum_{k=1}^n \text{Ind}(\gamma_k, p)$ と定義する

Definition 6.3. ホモロジー同値

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, γ を D 内に含まれるサイクルとする. $\gamma^* \subset D$ とする. γ が D 内で 0 に
 ホモロジー同値であるとは, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$
 γ_0, γ_1 を D 内にある閉路とし, $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset D$ とする. γ_0 と γ_1 が D 内でホモロジー同値である
 とは, サイクル $\gamma_0 + \gamma_1^{-1}$ が D 内で 0 にホモロジー同値である. 言い換えれば, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma_0, p) = \text{Ind}(\gamma_1, p)$

7 Cauchy の積分定理と積分公式

Definition 7.1. 単連結

領域 Ω が単連結である $\iff$ Ω 内の任意の閉路が Ω 内で 0 にホモトピー同値である

Remark 7.1.

凸集合や星型領域は単連結である

Theorem 7.1. Cauchy の積分公式

$D \subset \mathbb{C}$: 開集合で, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$: 正則関数とする. γ を D 内の閉路とし, γ が D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. 言い換えれば, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$ とする. このとき, $\forall z \in D \setminus \gamma^*, \text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$ である

Proof.

$\gamma: D$ 内の円盤で D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. 言い換えれば, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$ とする. γ^* はコンパクトなので, $\exists R_0 > 0, s.t. \gamma^* \subset D(0, R_0)$ で, $|p| \geq R_0 \Rightarrow \text{Ind}(\gamma, p) = 0$ となる, $E := \{p \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \text{Ind}(\gamma, p) = 0\}$ と定義すると, $\gamma^* \subset D$ より $\mathbb{C} = D \cup E$ で $\mathbb{C} \setminus D(0, R_0) \subset E$.

E は開集合で, $g: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ を $g(z, \xi) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} & z \neq \xi \\ f'(z) & z = \xi \end{cases}$ とし, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(z) := \begin{cases} \int_{\gamma} g(z, \xi) d\xi & z \in D \\ \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi & z \in \mathbb{C} \setminus D \subset E \end{cases} \quad \text{と定義する. } D \cap E \text{ 上で, } \int_{\gamma} g(z, \xi) d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

である. h は整関数で, 定数関数 0 であるから, $z \notin D \setminus \gamma^*$ のとき

$$0 = h(z) = \int_{\gamma} g(z, \xi) d\xi \quad (73)$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad (74)$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi \quad (75)$$

$$\text{から, } \text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \square$$

Theorem 7.2. Cauchy の積分定理

$D \subset \mathbb{C}$: 開集合で, $\gamma: D$ 内の閉路とする. γ が D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. このとき, 任意の D 上で正則な関数 f に対して, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ が成り立つ

Proof.

f を D 上の正則関数とする. $\forall p \in D \setminus \gamma^*, F(z) := (z - p) f(z) (\forall z \in D)$ とすれば, F は D 上の正則関数である. Cauchy の積分公式より, $\forall z \in D \setminus \gamma^*, \text{Ind}(\gamma, z) (z - p) f(z) = \text{Ind}(\gamma, z) F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi$ である. $p \in D \setminus \gamma^*$ は任意なので, $p = z$ ととれば, $0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi \quad \square$

Corollary 7.1. Cauchy の積分定理: 単連結

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とし, f を Ω 上の正則関数とする. このとき, f は Ω 上の原始関数 F が存在する. したがって, Ω 内の任意の閉路 γ に対して, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ が成り立つ

Proof.

基底 $z_0 \in \Omega$ を一つとして固定する. $\forall z \in \Omega, \exists \gamma_z^c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ が連続で, $\gamma_z^c(0) = z_0, \gamma_z^c(1) = z$ である. この γ_z^c を近似して, 区分的に C^1 な曲線 γ_z を作る. この曲線に沿った線積分 $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\xi) d\xi$ が f の原始関数である $\square$

Theorem 7.3.

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : D$ 上で正則関数とする. $\gamma := \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ を D 内のサイクルで, D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. 言い換えれば, $\forall p \notin D, 0 = \text{Ind}(\gamma, p) = \sum_{k=1}^n \text{Ind}(\gamma_k, p)$ とする. このとき, $\forall z \in D \setminus \gamma^*$ かつ $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ に対して, $\text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$ である

Corollary 7.2. 積分路の変更

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, f を D 上の正則関数とする. γ_0, γ_1 を D 内の閉路とし, $\gamma_0 \sim_D \gamma_1$ とする. このとき, $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ である

Proof.

$\gamma_0 \sim_D \gamma_1$ より, $\gamma := \gamma_0 + \gamma_1^{-1}$ は D 内で 0 にホモロジー同値である. この γ に対して, $0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$ $\square$

Corollary 7.3. Cauchy の微積分公式 (一般)

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $\gamma := \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ を D 内のサイクルで, D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. さらに f を D 上の正則関数とする. このとき, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D \setminus \gamma^*, \text{Ind}(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$

Proof.

$\text{Ind}(\gamma, z) = \sum_{k=1}^m \text{Ind}(\gamma_k, z), \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$ より, γ が閉路で 0 にホモロジー同値であるときに示せばいい. $\forall z \notin \gamma^*$ を固定し, $\text{dist}(z, \gamma^*) > 0$ なので, $\exists r_0 > 0, s.t. D(z, r_0) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ である. 言い換えれば, $\forall \omega \in D(z, r_0), \text{Ind}(\gamma, z) = \text{Ind}(\gamma, \omega)$ で, $\lim_{\omega \rightarrow z} \frac{\text{Ind}(\gamma, z) - \text{Ind}(\gamma, \omega)}{z - \omega} = 0$ である. よって, $\text{Ind}(\gamma, \cdot)$ は微分可能である

$n = 1$ のとき, Cauchy の積分公式より, $\forall z \in D \setminus \gamma^*, \text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$ であり, 両辺を微分すればいい

$n \geq 2$ のとき, $\forall z \in D \setminus \gamma^*, \text{Ind}(\gamma, z) f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$ であると仮定する. 両辺を微分すれば $\text{Ind}(\gamma, z) f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+2}} d\omega$ である $\square$

8 留数定理

Proposition 8.1.

f を $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ 上の正則関数とする. $\gamma : D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ に含まれるサイクルで, $z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$ とする. このとき, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}(\gamma, z_0) \text{Res}(f, z_0)$ が成り立つ

Proof.

γ^* はコンパクトで, $z_0 \notin \gamma^*$ なので, $0 < r_1 < \text{dist}(z_0, \gamma^*) < r_2 < R$ となるように r_2 をとっておくと, $\gamma^* \subset A(z_0; r_1, r_2)$ に注意すると, f の z_0 における Laurent 級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ は $\bar{A}(z_0; r_1, r_2)$ 上で一様収束するから, γ^* 上でも一様収束する. よって, 項別積分可能である. すると

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz \quad (76)$$

ここで, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ のとき, $\frac{d}{dz} \left(\frac{(z - z_0)^{m+1}}{m+1} \right) = (z - z_0)^m$ で, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_l$ なので,

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \sum_{k=1}^l \int_{\gamma_k} (z - z_0)^m dz = 0. \quad m = -1 \text{ のとき, 閉路の回転数の定義から}$$

$$\text{Ind}(\gamma_k, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} dz \quad (77)$$

で, k に関して和をとると

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^l \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \quad (78)$$

$$\text{すると, } \int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \cdot 2\pi i \text{Ind}(\gamma, z_0) \quad \square$$

Remark 8.1.

$\gamma(t) := z_0 + re^{it} \quad (0 < r < R, t \in [0, 2\pi])$ のとき, $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$ なので, $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ となる

Theorem 8.1. 留数定理

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $p_1, \dots, p_m \in D$ で, $f : D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 上で正則とする. γ を $D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 内のサイクルで, D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. 言い換えれば, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$ とする. このとき, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Ind}(\gamma, p_k) \text{Res}(f, p_k)$ が成り立つ

Proof.

$\gamma_1 \sim c_1$ を 2 周で, $\gamma_2 \sim c_2$ を -1 周とする. $\text{Ind}(\gamma_1, p_1) = 2\text{Ind}(c_1, p_1), \text{Ind}(\gamma_2, p_2) = -\text{Ind}(c_2, p_2)$ である. $\tilde{\gamma} := \gamma + 2c_1^{-1} + (-1)c_2^{-1}$ とすれば, $\tilde{\gamma}$ が $D \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 内で 0 にホモロジー同値であることが示れば, $\tilde{\gamma}$ に Cauchy の積分定理を適用すれば

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{2c_1^{-1} - c_2^{-1}} f(z) dz \quad (79)$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz - 2 \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz \quad (80)$$

各特異点 p_k を中心をして, 半径 $r > 0$ を十分小よくとった円周 C_k で

- $k \neq j \Rightarrow \overline{D(p_k, 2r)} \cap \overline{D(p_j, 2r)} = \emptyset$
- $C_k^* \subset D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$

となるようにしておく. $N_k := \text{Ind}(\gamma, p_k) \in \mathbb{Z}$ とおき, $\tilde{\gamma} := \gamma + \sum_{k=1}^m N_k C_k^{-1}$ と定義する. すると, $\tilde{\gamma}$ は $D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 内で 0 にホモロジー同値, $D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 上で f と $\tilde{\gamma}$ に Cauchy の積分定理を適用すれば

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz \quad (81)$$

$$= \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^m N_k \int_{C_k^{-1}} f(z) dz \quad (82)$$

よって, $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Ind}(\gamma, p_k) \text{Res}(f, p_k)$ である □

9 偏角の原理と Rouché の定理

Proposition 9.1.

$f: D(p, R) \setminus \{p\}$ 上正則とし, $p \in \mathbb{C}, R > 0$ とする. また, p を f の n 次の零点または極とする. このとき, p は $\frac{f'}{f}$ の一次の極であり, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = \begin{cases} n & p \text{ は零点} \\ -n & p \text{ は極} \end{cases}$

Proof.

p が n 次の零点のとき, p の近傍で正則な関数 g を用いて, $f(z) = (z-p)^n g(z), g(p) \neq 0$ と書けるので, $f'(z) = n(z-p)^{n-1} g(z) + (z-p)^n g'(z)$ より, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ である.

主要部は $\frac{n}{z-p}$ であるから, p は $\frac{f'}{f}$ の位数 1 の極で, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = n$ である
 p が n 次の極のとき, p の近傍で Laurent 展開すると

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-p)^m + \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-p} \quad (83)$$

$$= \frac{1}{(z-p)^n} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-p)^{m+n} + a_{-n} + \cdots + a_{-1} (z-p)^{n-1} \right\} \quad (84)$$

$$f'(z) = \frac{-n}{(z-p)^{n+1}} h(z) + \frac{h'(z)}{(z-p)^n} \quad (85)$$

となるので, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-p} + \frac{h'(z)}{h(z)}$ である. よって, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = -n$ である □

Theorem 9.1. 偏角の原理 (Argument Principle)

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, f は D 上の正則関数とする

- γ を D 内の閉路とし, $\forall z \in \gamma^*, f(z) \neq 0$
- γ が D 内で 0 にホモロジー同値であるとする. 言い換えれば, $\forall p \notin D, \text{Ind}(\gamma, p) = 0$

と仮定すると, $\text{Ind}(\gamma, 0) \neq 0$ となる f の零点 $p \in D$ は高々有限個で

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{p \in D \\ f(p)=0}} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) \quad (86)$$

ここで, $\mu(p, f)$ は p の位数である

Proof.

$\gamma^* \subset D$ なので, $\gamma^* \subset \Omega$ となる D の連結成分 Ω をとる. $\infty \geq \delta_0 := \text{dist}(\gamma^*, \partial\Omega) > 0$, $0 < \delta < \min\{\delta_0, 1\}$ に対して, $\Omega_{\delta} := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) > \delta\}$ とすれば, $\gamma^* \subset \Omega_{\delta}$ である. γ^* はコンパクトなので, 十分大きな $R > 0$ を取れば, $\gamma^* \subset D(0, R) \cap \Omega_{\delta}$. γ^* を含む $\Omega_{\delta} \cap D(0, R)$ の連結成分を Ω' とする. f の Ω' に含まれる f の零点が高々有限個である. Ω' 上で $\frac{f'}{f}$ に留数定理を使えば, $\frac{f'}{f}$ は Ω' から有限個の点 $p_1, \dots, p_N$ を除いたところでは正則. さらに, $\int_{\gamma}$ は Ω'

内で 0 にホモロジー同値であるので、留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^N \text{Ind}(\gamma, p_k) \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p_k\right) \quad (87)$$

$$= \sum_{k=1}^N \text{Ind}(\gamma, p_k) \mu(p_k, f) \quad (88)$$

$$= \sum_{\substack{p \in D \\ f(p)=0}} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) \quad (89)$$

$p \in D$ かつ $p \notin \Omega$ のとき、 $\gamma^* \subset \Omega$ で、 $p \notin \Omega$ なので、 p を含む連結成分を D_p として、 $q \in \partial D_p$ をとると、 $q \notin D$ なので、仮定より、 $\text{Ind}(\gamma, q) = 0$ である。 $\text{Ind}(\gamma, \cdot)$ は各連結成分上一定値かつ $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ 上で連続なので、 $\text{Ind}(\gamma, p) = \text{Ind}(\gamma, q) = 0$ である

$p \in \Omega \setminus \Omega'$ のとき、 $p \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta'}$ ($\delta < \delta' < \delta_0$)、 $q \in \partial \Omega \subset D^c$ で、 p と同じ $\Omega \setminus \overline{\Omega}_{\delta'}$ の連結成分に含まれるものを取れば、 $\text{Ind}(\gamma, p) = \text{Ind}(\gamma, q) = 0$ である $\square$

Theorem 9.2. 偏角の原理

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を有理型関数とし、 $D \subset \mathbb{C}$ を開集合とする。また

- γ は D 内のサイクルで、 γ^* 上に f の零点も極も含まない
- γ は D 内で 0 にホモロジー同値である

このとき、 $\text{Ind}(\gamma, 0) \neq 0$ となる f の零点と極は高々有限個で

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{q \in Z_f} \text{Ind}(\gamma, q) \mu(q, f) - \sum_{p \in P_f} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) \quad (90)$$

ただし、 $Z_f := \{q \in D : f(q) = 0\}$ 、 $P_f := \{p \in D : p \text{ は } f \text{ の極}\}$

Proof.

$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ とし、各 γ_j は閉路とする。各 γ_i を含む D の連結成分を Ω_j とおき、 $\gamma_j^* \subset \Omega'_j \subset \overline{\Omega}'_j \subset \Omega_j \cap D(0, R_j)$ となるように作り、 $\Omega' := \bigcup_{j=1}^n \Omega'_j$ とする。命題より、 p が

f の極 ($p \in P_f$) $\Rightarrow p$ は $\frac{f'}{f}$ の一位の極で、 $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = -\mu(p, f)$ である。 p が f の零点

($p \in Z_f$) $\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = \mu(p, f)$ である。すると、 γ は Ω' 内で 0 にホモロジー同値であるの

で、 $p \in D \setminus \overline{\Omega}' \Rightarrow \text{Ind}(\gamma, p) = 0$ にも注意すれば、留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{p \in (Z_f \cup P_f) \cap \Omega'} \text{Ind}(\gamma, p) \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) \quad (91)$$

$$= \sum_{p \in Z_f} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) - \sum_{p \in P_f} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) \quad (92)$$

$\square$

Theorem 9.3. Rouché の定理

$f, g: \overline{D}(z_0, R)$ 上で正則とする。 $\forall z \in \partial D(z_0, R), |f(z) - g(z)| < |f(z)|$ とする。このとき、 f と g の零点の個数 (重複度込み) で等しいである。言い換えれば $\sum_{p \in Z_f} \mu(p, f) = \sum_{q \in Z_g} \mu(q, f)$

である

Proof.

$f(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |f(z) - g(z)|, g(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| = |f(z) - g(z)|$ から, f と g の零点は $\partial D(z_0, R)$ 上に存在しないことに注意すると, $\forall z \in \partial D(z_0, R), \left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ である. 言い換えれば $\text{Ind}(h \circ \gamma, 0) = 0$ である. すると, 偏角の原理より

$$0 = \text{Ind}(h \circ \gamma, 0) \quad (93)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz \quad (94)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (95)$$

$$= \sum_{q \in Z_g} \text{Ind}(\gamma, q) \mu(q, g) - \sum_{p \in Z_f} \text{Ind}(\gamma, p) \mu(p, f) \quad (96)$$

よって, $\sum_{p \in Z_f} \mu(p, f) = \sum_{q \in Z_g} \mu(q, g)$ □

Theorem 9.4. Hurwitz の定理

$f : \overline{D}(z_0, R)$ ($z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$) 上で正則で, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \overline{D}(z_0, R)$ 上で正則な関数列でとする

- $f_n \rightarrow f$ は $\partial D(z_0, R)$ 上で一様収束する
- $\forall z \in \partial D(z_0, R), f(z) \neq 0$

このとき, 十分大きな n に対して, f と f_n の $D(z_0, R)$ 内にある零点の個数は重複度込みで等しい. 言い換えれば $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sum_{p \in Z_f} \mu(p, f) = \sum_{q \in Z_{f_n}} \mu(q, f_n)$

Proof.

$D := D(z_0, R)$ とおくと, $\min_{z \in \partial D} |f(z)| > 0$ であり, $\max_{z \in \partial D} |f(z) - f_n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ なので, 十分大きな n に対して, $\max_{z \in \partial D} |f(z) - f_n(z)| < \min_{z \in \partial D} |f(z)|$ である. Rouché の定理より, $\sum_{p \in Z_f} \mu(p, f) =$

$$\sum_{q \in Z_{f_n}} \mu(q, f_n) \quad \square$$

Corollary 9.1.

$f, f_n : \overline{D}(z_0, R)$ ($z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$) 上で正則で, f は $\overline{D}(z_0, R)$ 上で定数でなく, $f_n \rightarrow f$ は $\overline{D}(z_0, R)$ 上広義一様収束とする. このとき

1. $D(z_0, R)$ 内の零点を持たないような部分列 $\{f_{n_k}\}$ が取れる
2. 各 f_n が単射 $\Rightarrow f$ も単射

Proof. $D := D(z_0, R)$ とおく

1. f の零点は孤立していて, $\overline{D}$ はコンパクトなので, $Z_f(\overline{D})$ は有限集合で, $\infty \geq \delta_0 := \text{dist}(\partial D, Z_f(D)) > 0$ である. $0 < \delta < \min\{\delta_0, R\}$ とすれば, $Z_f(D) \subset D(z_0, R - \delta) =: D_\delta$ であり, $\partial D_\delta \cap Z_f = \emptyset$ である. この D_δ 上で f と f_n に対して Hurwitz の定理を適用すれば, f_n は D 上で f に広義一様収束する. $\partial D_\delta \subset D$ はコンパクトなので, f_n は ∂D_δ 上で f に一様収束する. f_n, f は $\overline{D}_\delta \subset D$ 上で正則なので, 十分大きな n に対して, $\sum_{p \in Z_f(D_\delta)} \mu(p, f) = \sum_{q \in Z_{f_n}(D_\delta)} \mu(q, f_n)$ なので, 右辺で $Z_{f_{n_k}}(D_\delta) = \emptyset$ となるような n_k をとれば, $Z_f(D) = Z_f(D_\delta) = \emptyset$ である

2. 対偶で示す. そこで, f が単射でないとする. このとき, $\exists z \in D, \exists w \in D, s.t. z \neq w$ かつ $f(z) = f(w)$ である. $\begin{cases} h(\xi) := f(\xi) - c \\ h_n(\xi) := f_n(\xi) - c \end{cases}$ とする. $z \neq w$ なので, 十分小さな $r > 0$ を取れば, $D(z, r), D(w, r) \subset D$ かつ $D(z, r) \cap D(w, r) = \emptyset$ とできる. 各開円板 $D(z, r), D(w, r)$ 上で f は定数でないので, h も定数でない. この h に対して, $D(z, r)$ と $D(w, r)$ 上で (1) の対偶を適用すれば, 各 $D(z, r)$ と $D(w, r)$ 上で零点を持つような h_n は高々有限個である. したがって, 十分大きな n に対して, h_n は $D(z, r)$ と $D(w, r)$ の両方で零点を持つ

□

10 開写像定理と逆関数定理

Proposition 10.1.

$f: z_0 \in \mathbb{C}$ の近傍で正則で, z_0 を f の位数 n の零点とする. このとき, $\exists r > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall \alpha \in D(0, \delta) \setminus \{0\}, \#\{z \in D(z_0, r) : f(z) = \alpha\} = n = \#\{z \in D(z_0, r) : f(z) = 0\}$

Proof.

f は $D(z_0, r)$ 上で正則で, $D(z_0, r)$ 内に z_0 以外の零点を持たないとする. z_0 は f の位数 n の零点なので, $\exists h: D(z_0, 2r)$ 上正則で, $h(z_0) \neq 0$ かつ $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ と書ける. $\partial D(z_0, r)$ 上に f の零点はないから, $\delta := \min\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\} > 0$ とおけば, $\alpha \in D(0, \delta) \setminus \{0\}$ を任意に取って固定する. $g_\alpha(z) := f(z) - \alpha$ とおくと, Rouché の定理より, $\#\{z \in D(z_0, r) : g_\alpha(z) = 0\} = \#\{z : f(z) = 0\} = n$ である $\square$

Corollary 10.1.

$z_0 \in \mathbb{C}, R > 0$, f を $D(z_0, R)$ 上正則とし, $f'(z_0) \neq 0$ とする. このとき, 十分小さな $\delta > 0$ を取れば, $f: D(z_0, R) \cap f^{-1}(V) \rightarrow V$ が全単射になるようにできる. ここで, $V := D(f(z_0), \delta)$ とする

Proof.

$F(z) := f(z) - f(z_0)$ に対して

$0 < \exists r < R, \exists \delta > 0, s.t. \forall \alpha \in D(0, \delta) \setminus \{0\}, \#\{z \in D(z_0, r) : F(z) = \alpha\} = 1$. 言い換えれば, $F: D(z_0, r) \cap F^{-1}(\tilde{V}) \rightarrow \tilde{V}$ は全単射である. ここで, $\tilde{V} := D(0, \delta), V := D(f(z_0), \delta)$ である. すると, F は平行移動だったので, $f: D(z_0, r) \cap f^{-1}(V) \rightarrow V$ も全単射である $\square$

Corollary 10.2.

f は開集合 D 上で正則であるとする. このとき, $\forall z \in D, \exists \xi \in D, \exists \eta \in D, s.t. \xi \neq \eta$ かつ $f'(z) = \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}$ である

Proof.

$z \in D$ を任意に取って固定する. $g(w) := f(w) - f'(z)w$ と定める. このとき, g は D 上で正則で, $g'(w) = f'(w) - f'(z)$ より, $g'(z) = 0$ である. Ω を z を含む D の連結成分とする. g が Ω 上で定数のとき, $\exists C \in \mathbb{C}, s.t. \forall z \in \Omega, g(z) = C \iff f(w) = f'(z)w + C$ なので, $\forall \xi, \forall \eta \in \Omega, f(\xi) - f(\eta) = f'(z)(\xi - \eta)$ である. $\xi \neq \eta$ となるものを取れば良い. g が Ω 上で定数でないとき, $h(w) := g(w) - g(z)$ とすれば, z は h の零点で, $h'(z) = g'(z) = 0$ より位数は 2 以上である

- h' が定数のとき, $h' \equiv c \iff g' \equiv c$ で, このとき, z の近傍で $g(w) = g(z) + c(w - z) = g(z) \iff f(w) = f(z) + g(z) + f'(z)w$ なので, z の近傍で異なる二点 ξ, η を取れば, $f(\xi) - f(\eta) = f'(z)(\xi - \eta)$ である
- h' が定数でないとき, h' の零点も孤立しているので, 十分小さな $r_0 > 0$ を取れば, $\forall w \in D(z, r_0) \setminus \{z\} \subset \Omega, h'(w) \neq 0$ である. この $D(z, r_0)$ で h に対して, $0 < \exists r < r_0, \exists \delta > 0, s.t. \forall \alpha \in D(0, \delta) \setminus \{0\}, \#\{w \in D(z, r) : h(w) = \alpha\} \geq 2$. ここで, $H(w) = h(w) - \alpha$ から, $H'(w) = h'(w) \neq 0$ の零点の位数は 1 なので, $D(z, r)$ 内の H の零点は二個以上である. 言い換えれば $\exists \xi \neq \eta \in D(z, r) \setminus \{z\}, s.t. h(\xi) = \alpha = h(\eta) \Rightarrow g(\xi) = g(\eta) \iff f(\xi) - f'(z)\xi = f(\eta) - f'(z)\eta$

$\square$

Theorem 10.1. 開写像定理

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $f: \Omega$ 上正則で一定値を取らないとする. このとき, f は開写像である. 言い換えれば, $D \subset \Omega$ が開集合のとき, $f(D)$ も開集合である. 特に, $f(\Omega)$ は領域である

Proof.

$D \subset \Omega$ を開集合とする. $z_0 \in D$ を任意にとって固定する, $r_0 > 0$ が十分小で, $D(z_0, r_0) \subset \Omega, F(z) := f(z) - f(z_0)$ とすると, F は定数でなく, z_0 は F の零点である. $0 < \exists r < r_0, \exists \delta > 0, s.t. \forall \alpha \in D(0, \delta) \setminus \{0\}, \#\{z \in D(z_0, r) : F(z) = \alpha\} = z_0$ の位数 > 0 である. 言い換えれば, $F^{-1}(D(0, \delta)) \subset D(z_0, r) \iff f^{-1}(D(f(z_0), \delta)) \subset D(z_0, r)$. よって, $D(f(z_0), \delta) \subset f(D(z_0, r)) \subset f(D)$ である $\square$

Theorem 10.2. 逆関数定理

f を開集合 D 上で正則とし, $z_0 \in D$ で $f'(z_0) \neq 0$ とする. このとき, $\exists U : z_0$ の開近傍, $\exists V : f(z_0)$ の開近傍

• $f|_V : U \xrightarrow{\cong} V$ は同相

• $g := (f|_V)^{-1} : V \rightarrow U$ は正則で, $\forall w \in V, g'(w) = \frac{1}{f'(z)} \Big|_{z=g(w)}$

Proof.

$f'(z_0) \neq 0$ なので, $\exists R > 0, \exists \delta > 0, s.t. D(z_0, R) \subset D$ かつ $f' \neq 0$ で, $f : D(z_0, R) \cap f^{-1}(V) \rightarrow D(f(z_0), \delta)$ が全単射となる. 各 U の連結成分ごとに開写像定理を適用すれば, $f|_U : U \rightarrow V$ は開写像で, $g := (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ は連続である. よって, $U \cong V$ であり, U は領域である. $\omega_* \in V$ を任意に取り, $z_* := g(\omega_*)$ とおく. 各 $\omega \in V$ に対する $z \in U$ を z_ω と書く. 言い換えれば, $g(\omega) = z_\omega$ で, $f(z_\omega) = \omega$ である. このとき, $f|_U$ の単射性から, $\omega \neq \omega_* \Rightarrow z_\omega = g(\omega) \neq g(\omega_*) = z_*$. また, g は連続なので, $\omega \rightarrow \omega_* \Rightarrow z_\omega = g(\omega) \rightarrow g(\omega_*) = z_*$ である. 以上より, $f(z_*) = \omega_* \neq \omega = f(z_\omega) \in V$ のとき

$$\frac{g(\omega) - g(\omega_*)}{\omega - \omega_*} = \frac{z_\omega - z_*}{f(z_\omega) - f(z_*)} \quad (97)$$

$$= \frac{1}{\frac{f(z_\omega) - f(z_*)}{z_\omega - z_*}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_*} \frac{1}{f'(z_*)} \quad (98)$$

以上より, g は ω_* で微分可能で

$$g'(\omega_*) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_*} \frac{g(\omega) - g(\omega_*)}{\omega - \omega_*} = \frac{1}{f'(z_*)} \quad (99)$$

$\square$

Theorem 10.3. Lagrange の公式

f を開集合 D 上で正則とし, $f'(z_0) \neq 0$ とする. 逆関数定理より, $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \overline{D}(z_0, \epsilon) \subset U \cong V \supset f(D(z_0, \epsilon)) \supset D(f(z_0), \delta)$. この $D(f(z_0), \delta)$ 上で f の逆関数 g は $g(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega} dz$ と表示される. ここで, $\gamma_\epsilon(\theta) := z_0 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ である

Proof.

$\omega_* \in D(f(z_0), \delta)$ を任意にとって固定する. $h(z) := \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega_*}$ とおくと, h の高々極は $f(z) = \omega_*$ で位数は 1 以下である. h に対して, 留数定理を適用すれば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz = \text{Res}(h, z_*) \quad (100)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_*} (z - z_*) h(z) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{(z - z_*)zf'(z)}{f(z) - f(z_*)} \quad (101)$$

$$= \frac{z_*}{f'(z_*)} \cdot f'(z_*) = z_* = g(\omega_*) \quad (102)$$

$\square$

Theorem 10.4. Lagrange の反転公式

f を開集合 D 上で正則とし, $f'(z_0) \neq 0$ とする. $g = (f|_U)^{-1}$ の $\omega_0 := f(z_0)$ を中心とした Taylor 級数は $g(\omega) = g(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\omega - \omega_0)^n$ で

$$b_n = \frac{1}{n} \text{Res} \left(\frac{1}{(f - \omega_0)^n}, z_0 \right) \quad (103)$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\left(\frac{z - z_0}{f(z) - \omega_0} \right)^n \right) \Big|_{z=z_0} \quad (104)$$

Remark 10.1.

$$b_1 = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{f'(z_0)} = g'(\omega_0) \quad (105)$$

Proof.

$\delta \geq \min \{|f(z) - \omega_0| : z \in \gamma_\epsilon^*\} > 0$ に注意して, $\omega \in D(\omega_0, \delta)$ をとり h を書き直すと

$$h(z) = \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega \pm \omega_0} \quad (106)$$

$$= \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega - \omega_0}{f(z) - \omega_0}} \quad (107)$$

$$= \frac{zf'(z)}{f(z) - \omega} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega - \omega_0}{f(z) - \omega_0} \right)^n \quad (108)$$

ここで, $z \in \gamma_\epsilon^*, \omega \in D(\omega, \delta)$ のとき, $\left| \frac{\omega - \omega_0}{f(z) - \omega_0} \right| \leq \frac{|\omega - \omega_0|}{\delta} < 1$ なので, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega - \omega_0}{f(z) - \omega_0} \right)^n$ は γ_ϵ^* 上で一様収束する. よって

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz \quad (109)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (\omega - \omega_0)^n \int_{\gamma_\epsilon} \frac{zf'(z)}{(f(z) - \omega_0)^{n+1}} dz \quad (110)$$

$\frac{d}{dz} \frac{z}{(f(z) - \omega_0)^n} = \frac{1}{(f(z) - \omega_0)^n} - n \frac{zf'(z)}{(f(z) - \omega_0)^{n+1}}$ なので

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{zf'(z)}{(f(z) - \omega_0)^{n+1}} dz \quad (111)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{n} \left(\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{(f(z) - \omega_0)^n} dz - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{d}{dz} \frac{z}{(f(z) - \omega_0)^n} dz \right) \quad (112)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{(f(z) - \omega_0)^n} dz \quad (113)$$

$$= \frac{1}{n} \text{Res} \left(\frac{1}{(f - \omega_0)^n}, z_0 \right) \quad (114)$$

ここで, z_0 は $f - f(z_0)$ の位数 1 の零点なので, $f(z) - \omega_0 = f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \Phi(z)$ を注意すると

$$\frac{z - z_0}{f(z) - \omega_0} = \frac{1}{\Phi(z)} \quad (115)$$

で z_0 の近傍で正則であり, $\frac{1}{(f(z) - \omega_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - \omega_0} \right)^n$ に注意すれば

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(f - \omega_0)^n}, z_0 \right) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{z - z_0}{f(z) - \omega_0} \right)^n \Big|_{z=z_0} \quad (116)$$

□

Corollary 10.3.

f を z_0 の近傍で正則とするとき, 以下は同値

- $f'(z_0) \neq 0$
- f は z_0 の近傍で単射

11 写像の等角性

Definition 11.1. 等角・等角写像

f を開集合 D 上で正則とする. f が $z_0 \in D$ 上で等角であるとは, z_0 を通る任意の滑らかな二本の曲線 γ_1, γ_2 の z_0 でのなす角が f で写した曲線 $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ の $f(z_0)$ でのなす角が向きを込めて等しい

f は等角写像であるとは, f は定義域内の任意の点で等角である

Remark 11.1.

$t \neq 0$ のとき, $\theta(t) = \arg \gamma(t) - \arg \gamma(0) = \arg \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$ で, $t \rightarrow 0$ として, $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = \arg \gamma'(0)$ なので, 等角であること

$$\arg \gamma_1'(0) - \arg \gamma_2'(0) = \arg (f \circ \gamma_1)'(0) - \arg (f \circ \gamma_2)'(0) \quad (117)$$

は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg (\gamma_1(t) - \gamma_1(0)) - \lim_{t \rightarrow 0} \arg (\gamma_2(t) - \gamma_2(0)) \quad (118)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \arg (f(\gamma_1(t)) - f(z_0)) - \lim_{t \rightarrow 0} \arg (f(\gamma_2(t)) - f(z_0)) \quad (119)$$

Theorem 11.1.

f は z_0 の近傍で正則で, $f'(z_0) \neq 0$ とする. このとき, f は z_0 で等角である

Proof.

γ_1, γ_2 を $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ の C^1 級とし, $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ とする. また, $\gamma_1'(0) \neq 0, \gamma_2'(0) \neq 0$ とする. f は z_0 で微分可能なので, $\tilde{\gamma}_k'(0) = f'(\gamma_k(0)) \gamma_k'(0) \neq 0$ である

$$\arg \tilde{\gamma}_2'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(0) \quad (120)$$

$$\arg \tilde{\gamma}_1'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(0) \quad (121)$$

$$\varphi = \arg \tilde{\gamma}_2'(0) - \arg \tilde{\gamma}_1'(0) \quad (122)$$

□

Remark 11.2. $f'(z_0) \neq 0 \iff z_0$ の近傍で f は単射だったので, f は開集合 D 上で正則かつ単射であるとき, f と $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ はともに等角写像である

Theorem 11.2.

f は $D(z_0, r)$ 上正則とし, $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ とする. このとき, z_0 を通る任意の滑らかな曲線 γ_1 と γ_2 の f による像 $f \circ \gamma_1$ と $f \circ \gamma_2$ の $f(z_0)$ でのなす角は, 元の γ_1 と γ_2 のなす角の n 倍となる

Proof.

$\gamma_k: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ を C^1 級とし, $\gamma_k(0) = z_0, \gamma_k'(0) \neq 0$ とする. $\tilde{\gamma}_k := f \circ \gamma_k$ とおく. f の z_0 で展開して, 仮定より

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k \quad (123)$$

と書けるので

$$\arg (f(\gamma_k(t)) - f(z_0)) = \arg ((\gamma_k(t) - z_0)^n g(\gamma_k(t))) \quad (124)$$

$$= \arg ((\gamma_k(t) - z_0)^n) + \arg (g(\gamma_k(t))) \quad (125)$$

で

$$\arg \tilde{\gamma}'_2(0) - \arg \tilde{\gamma}'_1(0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{f(\gamma_2(t)) - f(z_0)}{t} \right) - \arg \left(\frac{f(\gamma_1(t)) - f(z_0)}{t} \right) \quad (126)$$

$$= n \left[\arg \left(\frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} \right) - \arg \left(\frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)}{t} \right) \right] \quad (127)$$

$$+ \arg g(\gamma_2(t)) - \arg g(\gamma_1(t)) \quad (128)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} n (\arg \gamma'_2(0) - \arg \gamma'_1(0)) + \arg g(z_0) - \arg g(z_0) \quad (129)$$

□

Theorem 11.3.

U を z_0 の開近傍とし, f を z_0 での等角写像とする. また, $x_0 := \operatorname{Re} z_0, y_0 := \operatorname{Im} z_0$ とおくと, $u := f \circ J, v := f \circ J$ が $J^{-1}(U)$ 上で C^1 級とする. このとき, f は z_0 で微分可能である. また, $J(x, y) := x + iy$ である

Proof.

$f(\gamma_\theta(t)) = u(x_t, y_t) + iv(x_t, y_t)$ で, t で微分すると

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_\theta(t)) = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta + i(v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) \quad (130)$$

$|\theta| < \frac{\pi}{2}$ に対して, $\gamma_\theta(t) := z_0 + te^{i\theta}$ $t \geq 0$, $\begin{cases} x_\theta(t) := x_0 + t \cos \theta \\ y_\theta(t) := y_0 + t \sin \theta \end{cases}$ とおくと, $\operatorname{Re} \gamma_\theta = x_\theta, \operatorname{Im} \gamma_\theta = y_\theta$ で $f(\gamma_\theta(t)) = u(x_\theta(t), y_\theta(t)) + iv(x_\theta(t), y_\theta(t))$ となる. このとき, 仮定から, $t \approx 0$ で t に関して微分可能なので, 合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_\theta(t))|_{t=0} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta + i(v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) \quad (131)$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\theta} (u_x + v_y + i(v_x - u_y)) + \frac{1}{2} e^{-i\theta} (u_x - v_y + i(v_x + u_y)) \quad (132)$$

f は z_0 で等角で, γ_0 と γ_θ のなす角は θ なので, $f \circ \gamma_0$ と $f \circ \gamma_\theta$ のなす角も θ である. したがって

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_\theta(t))|_{t=0} \times e^{-i\theta} = \frac{1}{2} [u_x + v_y + i(v_x - u_y) + e^{-2i\theta} (u_x - v_y + i(v_x + u_y))] \quad (133)$$

から, $u_x - v_y + i(v_x + u_y) = 0$ である. 言い換えれば, $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ □

Theorem 11.4.

f は開集合 D 上で等角で, $\operatorname{Re}(f \circ J), \operatorname{Im}(f \circ J)$ は $J^{-1}(D)$ 上で C^1 級とする. このとき, f は D 上で正則で, $\forall z \in D, f'(z) \neq 0$

Proof.

$\forall z_0 \in D$ に対して, f は z_0 で微分可能である. $z_0 \in D$ は任意なので, f は D 上正則となる $z_0 \in D$ を任意にとる. f の等角性から, f は z_0 を含む連結成分上で定数ではないので, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, s.t. f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$ である. $N := \min \{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ とすると, $N < \infty$ で, $f'(z_0) = \dots = f^{(N-1)}(z_0) = 0, f^{(N)}(z_0) \neq 0$ となるが, $N \geq 2$ だとすると, f は z_0 で等角でないことに矛盾するので, $N = 1$ である. したがって, $f'(z_0) \neq 0$ □

Example 11.1.

- 平行移動 $0 \neq h \in \mathbb{C}$ に対して, $z \mapsto z + h$ は $\frac{d}{dt}(z + h) = 1 \neq 0$ から同相であり, 等角写像である
- 縮尺 $0 \neq c \in \mathbb{C}$ に対して, $z \mapsto cz$ は $\frac{d}{dt}(cz) = c \neq 0$ から, $c = \lambda \in \mathbb{R}$ のとき等角写像である

Definition 11.2. 等角同値

$U, V \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, U と V が等角同値であるとは, $\exists f: U \rightarrow V$ が正則かつ全単射である

Example 11.2.

- $\frac{d}{dz}(e^{iz}) = ie^{iz} \neq 0$ から, 指数関数 e^{iz} は等角同値である
- $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}, I := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}z < \pi\}$ より, 対数関数 $\log z$ は H と I の間の等角同値である
- $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ とすると, $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), f'(z) = \frac{z^2 - 1}{2z^2}$ で, $H := D(0, 1) \setminus \{0\}, I := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ とすると, f は H と I の間の等角同値であり, Joukowski 変換である
- $F(z) = \frac{1+z}{1-z}, F^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$ とすると
メビウス変換 F は $D(0, 1)$ と $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0, \text{Im}z > 0\}$ の間の等角同値である
- $G(z) = \frac{i-z}{i+z}, G^{-1}(w) = i \frac{1-w}{1+w}$ とすると, G は $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ と $D(0, 1)$ の間の等角同値である

12 Riemann 球面

Definition 12.1. Riemann 球面

$\mathbb{C}$ に ∞ を加えた集合 $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする

$\tilde{P}(\infty) := N(0, 0, 1)$ とし, $\vec{N}\tilde{P} = t\vec{N}Q, 0 < t < 1$ とする. また,
$$\begin{cases} X = tx \\ Y = ty \\ Z - 1 = -t \end{cases} \quad \text{とおけば,}$$

$\tilde{P} \in S^2 \iff X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ であるので, $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$ となる. これより

$$\begin{cases} X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X}{1 - Z} \\ y = \frac{Y}{1 - Z} \end{cases} \quad (134)$$

これより, $\tilde{P}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ は全単射である. また

$\mathbb{C}_\infty$	S^2
$z = 0$	南極 $(0, 0, -1)$
∞	北極 $(0, 0, 1)$
$ z \rightarrow \infty$	$\tilde{P}(z) \rightarrow N(0, 0, 1)$
単位円内部 $ z < 1$	南半球 $z < 0$
単位円周 $ z = 1$	赤道 $z = 0$
単位円外部 $ z > 1$	北半球 $z > 0$
円周 $ z = R > 0$	緯線 $z = \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1}$

Remark 12.1.

$\tilde{P}: \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ とする. $\mathbb{C}_\infty$ には $\tilde{P}$ から誘導された (逆像) 位相が入る. 言い換えれば, $\tilde{P}$ を連続とする最弱位相. よって, $\{\tilde{P}^{-1}(U) : U \text{ は } S^2 \text{ の開集合}\}$. 実は $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ なので, 一点コンパクト化としての位相が考えられるが, これは $\tilde{P}$ から誘導された位相と一致する. ∞ の開近傍は $V(\infty, r) := \left\{ \omega \in \mathbb{C} : |\omega| > \frac{1}{r} \right\} \cup \{\infty\}$ である

Theorem 12.1.

$\mathbb{C}_\infty$ は点列コンパクト. 言い換えれば, $\mathbb{C}_\infty$ 内の任意の点列は収束部分列をもつ

Proof.

$\{z_n\} \subset \mathbb{C}_\infty$ とする. このとき, $\{\tilde{P}(z_n)\}_n$ は S^2 内の点列である. S^2 はコンパクトなので, $\{\tilde{P}(z_{n_k})\}_k$ は収束部分列をもつ. $\tilde{P}(z_{n_k}) \rightarrow (X_\infty, Y_\infty, Z_\infty) \in S^2$ とおけば, $z_{n_k} \rightarrow \tilde{P}^{-1}(X_\infty, Y_\infty, Z_\infty) =: z_\infty$. 言い換えれば, $\text{dist}(z_{n_k}, z_\infty) = \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}(z_{n_k}), \tilde{P}(z_\infty)) \rightarrow 0$ となる $\square$

Remark 12.2. $\omega \rightarrow \infty \iff \frac{1}{\omega} \rightarrow 0$ より, $f: V(\infty, r) \rightarrow \mathbb{C}$ が ∞ で微分可能である $\iff F(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ が 0 で微分可能である. すると, f が $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$ 上で正則であるとき, $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ は $V\left(0, \frac{1}{r}\right) \setminus \{0\}$ 上で正則であり, 0 は F の孤立特異点である

Proposition 12.1.

f を定数でない整関数とし, $F(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ とする. このとき

- f が n 次多項式であるとき, 0 は F の (∞ は f) の位数 n の極である
- f が多項式でないとき, 0 は F の真性特異点である

Proof.

- $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$ とすると

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \quad (135)$$

$$= a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-(n-1)} + \cdots + a_1 z^{-1} + a_0 \quad (136)$$

$$= z^{-n} (a_n + a_{n-1} z + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n) \quad (137)$$

- f は整関数なので, $z = 0$ で Taylor 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とできる. 仮定から, f は多項式でないので, 無限和 $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ となる. 主要部が無限和なので, 0 は F の真性特異点である

□

Remark 12.3.

f を $\{z \in \mathbb{C} : R < |z| < \infty\}$ 上で正則とする. $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \omega^{-n}$ で, $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} \frac{F(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega$ である. ここで, $\gamma_{\frac{1}{r}}(t) = \frac{1}{r} e^{it}, r > R, t \in [0, 2\pi]$ なので, f の ∞ での Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad (138)$$

$$a_n = b_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) z^{n-1} dz \quad (139)$$

で, 主要部は $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$ である. f の ∞ での留数 $\text{Res}(f, \infty) := -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_r} f(z) dz$

Remark 12.4.

$G(\omega) = \frac{1}{\omega^2} f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ とおく. ∞ が f の孤立特異点であるとき, $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}(G, 0)$ である

Proof.

Laurent 展開すれば, $G(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \omega^{-n} \right)$ で, $\text{Res}(G, 0)$ は $\frac{1}{\omega}$ の係数 b_1 となる. よって, $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -b_1 = -\text{Res}(G, 0)$ □

Theorem 12.2.

$p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}$ とし, f を $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ 上正則とする. このとき, $\text{Res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^m \text{Res}(f, p_k) = 0$

Proof.

仮定より, 十分大きな $R > 0$ を取れば, $p_1, \dots, p_m \in D(0, R)$ で, $V(\infty, R)$ 上正則である. 留数定理より, $\sum_{k=1}^m \text{Res}(f, p_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$ である. また, 定義より, $\sum_{k=1}^m \text{Res}(f, p_k) = -\text{Res}(f, \infty)$ である $\square$

Example 12.1.

$f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z + i} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} - 1}{\frac{1}{\omega} + i} = \frac{1 + \omega - \omega^2}{\omega + i\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{0} = \infty$ から, $f(\infty) = \infty$ とすれば, f は $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ の有理関数である

Definition 12.2. 有理型

$D \subset \mathbb{C}_\infty$ を開集合とし, f が D 上有理型であるとは, f の正則でない点は全て孤立していて, 高々極 (除去可能特異点または極) である

Remark 12.5.

f が $\mathbb{C}_\infty$ で有理型である $\iff f$ は $\mathbb{C}$ 上有理型かつ ∞ が f の正則点または高々極

Example 12.2.

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$ とする. $\sin z = 0 \iff z = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ で

- f は $\mathbb{C}$ 上有理型であるが, 有理関数ではない
- $f(\infty)$ をどのように定義しても, $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\omega}\right)}$ は $\omega = 0$ で正則でない. $n\pi \rightarrow \infty$ となるので, ∞ は孤立していないから, f は $\mathbb{C}_\infty$ 上有理型ではない

Theorem 12.3.

f を $\mathbb{C}_\infty$ 上の有理関数とし, P を f の $\mathbb{C}_\infty$ 内にある極全体で, Z を f の $\mathbb{C}_\infty$ 内にある零点全体とする. また, $\mu(P)$ を p の位数とする. このとき, $\sum_{p \in P} \mu(p) = \sum_{q \in Z} \mu(q)$ である. 言い換えれば, 位数込みで考えれば, 極の個数と零点の個数は等しい

Proof.

f は有理関数なので, $\mathbb{C}$ 内にある極と零点は有限個であるから, $\exists R > 0, s.t. (P \cap \mathbb{C}) \cup (Z \cap \mathbb{C}) \subset D(0, R), \gamma(t) := Re^{it} (t \in [0, 2\pi])$ として, 偏角の原理を用いれば, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, \infty\right) =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{q \in Z \cap \mathbb{C}} \mu(q) - \sum_{p \in P \cap \mathbb{C}} \mu(p) \text{ である}$$

f が ∞ で正則で $f(\infty) \neq 0$ のとき, $F(\omega) := f\left(\frac{1}{\omega}\right)$ とおくと, F は 0 で正則で $F(0) \neq 0$ である.

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{dz} f\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\omega^2}\right) \text{ より, } \frac{\frac{d}{d\omega} f\left(\frac{1}{\omega}\right)}{f\left(\frac{1}{\omega}\right)} = \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} \cdot (-\omega^2) \text{ である. } \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\frac{d}{d\omega} f\left(\frac{1}{\omega}\right)}{f\left(\frac{1}{\omega}\right)} = -\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}$$

に注意すれば, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, \infty\right) = -\text{Res}\left(\frac{F'}{F}, 0\right) = 0$ である. $Z \cap \mathbb{C} = Z$ かつ $P \cap \mathbb{C} = P$ なので,

$$\sum_{q \in Z} \mu(q) = \sum_{p \in P} \mu(p) \text{ である}$$

∞ が位数 k の零点のとき, $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, \infty\right) = -\text{Res}\left(-\frac{F'}{F}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{F'}{F}, 0\right) = k = \mu(\infty)$ である.

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, \infty\right) = -\text{Res}\left(-\frac{F'}{F}, 0\right) = \text{Res}\left(\frac{F'}{F}, 0\right) = k = \mu(\infty) \text{ である. } Z = (Z \cap \mathbb{C}) \cup \{\infty\} \text{ かつ } P = P \cap \mathbb{C} \text{ を注意すれば, } \mu(\infty) = \sum_{q \in Z \cap \mathbb{C}} \mu(q) - \sum_{p \in P} \mu(p) \iff$$

$$\sum_{p \in P} \mu(p) = \sum_{q \in Z} \mu(q)$$

∞ が位数 k の極のとき, $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \infty\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{F'}{F}, 0\right) = -k = -\mu(\infty)$ である. $P = (P \cap \mathbb{C}) \cup \{\infty\}$ かつ $Z = Z \cap \mathbb{C}$ を注意すれば, $-\mu(\infty) = \sum_{q \in Z} \mu(q) - \sum_{p \in P \cap \mathbb{C}} \mu(p) \iff \sum_{p \in P} \mu(p) = \sum_{q \in Z} \mu(q)$ □

Lemma 12.1.

$\mathbb{C}_\infty$ 上の有理型な関数の極は高々有限個である

Theorem 12.4. Liouville の定理

$\mathbb{C}_\infty$ から $\mathbb{C}$ への正則関数は定数関数に限る. また, $\mathbb{C}_\infty$ 上の有理型な関数は有理関数に限る
言い換えれば, $\mathbb{C}_\infty$ で考えると, 有理型 $\iff$ 有理関数

Corollary 12.1.

f を $\mathbb{C}_\infty \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ 上正則とする. このとき, f が定数でないなら, f は除去可能でない特異点をもつ

特に, f が $\mathbb{C}$ 上定数でない整関数であるなら, f は ∞ を除去可能でない特異点をもつ

Example 12.3.

$f(z) = \frac{z^3}{z^2 + z + 1}$ とし, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1}$ と展開でき, $z^2 + z + 1 = (z - \omega)(z - \omega^2)$ で, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ であり, $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^3 + \omega^2 + \omega} = \frac{1}{\omega(\omega^2 + \omega + 1)}$ より, f の極は ω, ω^2, ∞ である. 主要部はそれぞれ $\frac{-i\sqrt{3}}{3(z - \omega)}, \frac{i\sqrt{3}}{3(z - \omega^2)}, z$ であるから

$$h(z) := f(z) - \left(\frac{-i\sqrt{3}}{3(z - \omega)} + \frac{i\sqrt{3}}{3(z - \omega^2)} + z \right) \quad (140)$$

Liouville の定理より, h は定数関数である. よって, $h(0) = f(0) - 1 = -1$ なので, $f(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1} + z - 1$

13 一次分数変換

Definition 13.1. 一次分数関数 (変換)

$ad - bc \neq 0$ をみたす $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ を用いて, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ を一次分数関数という. また, T を $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ への写像とみたとき, 一次分数変換 (Möbius 変換) という. ここで, $T\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{a+b\omega}{c+d\omega}$ なので, $T(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$ となる. また, $c \neq 0$ のとき, $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ と定義すれば, $T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ も定義できる

Remark 13.1.

- $ad - bc = 0$ のとき, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$ となり, T は定数関数・定値写像となる
- $z \neq -\frac{d}{c}$ のとき, $\frac{d}{dz}T(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ なので, T は $z \neq -\frac{d}{c}$ で等角である
- 一次分数変換 $T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ を $\longleftrightarrow$ 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$

Proposition 13.1.

$I, A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ とし, I を単位行列とする

- T_I は恒等写像・恒等変換
- $T_{AB} = T_A \circ T_B$
- $T_A = T_B \iff \exists \lambda \neq 0, s.t. A = \lambda B$
- $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$

Proof.

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $T_I(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z$ から, $T_I = id$
- $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とすると, $AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$ で,
 $T_{AB}(z) = \frac{(a_1b_1 + a_2b_3)z + (a_1b_2 + a_2b_4)}{(a_3b_1 + a_4b_3)z + (a_3b_2 + a_4b_4)}$ となり, $T_A(T_B(z)) = \frac{a_1\left(\frac{b_1z+b_2}{b_3z+b_4}\right) + a_2}{a_3\left(\frac{b_1z+b_2}{b_3z+b_4}\right) + a_4}$ となる.
 整理すれば良い

- $\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ だけ示す

$$T_{AB} = T_A \circ T_{B^{-1}} = T_B \circ T_{B^{-1}} = T_I \text{ なので, } AB^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおけば, } \frac{az+b}{cz+d} = T_I(z) = z \text{ なので, } \forall z \in \mathbb{C}, az+b = z(cz+d)$$

□

Remark 13.2.

$T_{AB} = T_A \circ T_B$ より, 一次分数変換の合成も一次分数変換で, $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$ より, 一次分数変換の逆も一次分数変換である

Remark 13.3. 一次分数変換の基本変換

- 平行移動

$$T(z) = z + b \iff M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 定数倍

$$T(z) = az \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 反転

$$T(z) = \frac{1}{z} \iff M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 13.1.

任意の一次分数変換は高々 4 個の基本変換の合成として表すことができる

Proof.

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$c = 0$ のとき, $T(z) = \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right) = (S_2 \circ S_1)(z)$ で, $S_1(z) = \frac{a}{d}z, S_2(z) = z + \frac{b}{a}$ である
行列で考えると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (141)$$

$c \neq 0$ のとき, $T(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} = (S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1)(z)$ で, $S_1(z) = z + \frac{d}{c}$ は平行移動, $S_2(z) = \frac{1}{z}$ は反転, $S_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z$ は定数倍, $S_4(z) = z + \frac{a}{c}$ は平行移動である
行列でかけば

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{bc - ad}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{bc - ad}{c^2} + \frac{ad}{c^2} \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (142)$$

□

Theorem 13.2. 円円対応

一次分数変換は $\mathbb{C}_\infty$ 上の円を $\mathbb{C}_\infty$ 上の円に写す

Proof.

- 平行移動

$\omega := T(z) = z + \alpha$ とすれば, $a|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \iff a|\omega - \alpha|^2 + \bar{\beta}(\omega - \alpha) + \beta\bar{\omega} - \bar{\alpha} + c = 0$ を整理すれば, $a|\omega|^2 + (\bar{\beta} - a\bar{\alpha})\omega + (\beta - a\alpha)\bar{\omega} + c + a|\alpha|^2 - \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha} = 0$ であり, $|\beta - \alpha|^2 - a(c + a|\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\beta}\alpha)) = |\beta|^2 - ac > 0$ である

- 定数倍

$\omega := T(z) = \frac{1}{\lambda}z$ とすれば, $a|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \iff a|\lambda\omega|^2 + \lambda\bar{\beta}\omega + \bar{\lambda}\beta\omega + c = 0$ を整理すれば, $|\lambda\bar{\beta}|^2 - |\lambda|^2 a \cdot c = |\lambda|^2 (|\beta|^2 - ac) > 0$

□

Definition 13.2. 複比

異なる四点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ に対して, $[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$ と定義し, これを複比という (非調和化). 特に ∞ が入ったときは, 極限で考える. 言い換えれば

- $[\infty, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$
- $[z_1, \infty, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$
- $[z_1, z_2, \infty, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$
- $[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$

Theorem 13.3.

異なる三点 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対して, $T(\alpha) = 1, T(\beta) = 0, T(\gamma) = \infty$ を満たす一次分数変換 T は一意的で, $T(z) = [z, \alpha, \beta, \gamma]$ である

Corollary 13.1.

$\mathbb{C}_\infty$ 内の異なる三点のペア $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ に対して, $T(\alpha) = a, T(\beta) = b, T(\gamma) = c$ を満たす一次分数変換 T が一意的に存在する

Corollary 13.2. 複比保存

T を一次分数変換とする. 異なる四点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ に対して, $[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ である