

Contents

1 集合と写像の復習	2
2 可測空間	3
3 可測写像	8
4 直積空間	10
5 測度	12
6 非負値関数の積分	15
7 実数値関数の積分	20
8 L^p 空間	23
9 測度の一意性定理	25
10 Hopf の拡張定理	26
11 一次元 Lebesgue 測度	27

1 集合と写像の復習

Definition 1.1. 冪集合

集合 X の部分集合全体 $\{A : A \subset X\}$ を X の冪集合といい, $\mathcal{P}(X)$ で表す. $\mathcal{P}$ の元は $A, B, C, \dots$ で表し, $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 (X の部分集合族) は $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$ で表す

Definition 1.2. 逆像

写像 $f : X \rightarrow Y$ と $A \in \mathcal{P}(Y)$ に対して, $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ と定め, $f^{-1}(A)$ を A の逆像という

Problem 1.1.

$f : X \rightarrow Y$ とする

1. $\forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \in \mathcal{P}(Y)$ に対して

$$\bullet f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$$

$$\bullet f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$$

2. $f^{-1}(Y) = X, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ を示せ

3. $\forall A \in \mathcal{P}(Y), f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ を示せ

Proof.

1. $\bullet \forall x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right), f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ で, $\exists \lambda_0 \in \Lambda, s.t. f(x) \in A_{\lambda_0}$ となり, $x \in f^{-1}(A_{\lambda_0})$ となる. すると, $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ である. 逆に, $\forall x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda), \exists \lambda_0 \in \Lambda, s.t. x \in f^{-1}(A_{\lambda_0})$ となるから, $f(x) \in A_{\lambda_0}$ であり, $f(x) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ である. したがって,

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \text{ である}$$

- $\bullet \forall x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right), f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ で, $\forall \lambda \in \Lambda, f(x) \in A_\lambda$ となり, $x \in f^{-1}(A_\lambda)$ となる. すると, $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$ である. 逆に, $\forall x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda), \forall \lambda \in \Lambda, x \in f^{-1}(A_\lambda)$ となるから, $\forall \lambda \in \Lambda, f(x) \in A_\lambda$ であり, $f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ である. したがって,

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \text{ である}$$

2. $f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\} = X$ となり, $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$ となる

3. $f^{-1}(A^c) = \{x \in X : f(x) \in A^c\} = \{x \in X : f(x) \notin A\}^c = f^{-1}(A)^c$ となる

□

2 可測空間

Definition 2.1. σ -代数

X を非空な集合とし, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ とする. 次の条件が成り立つとき, $\mathcal{F}$ は X の σ -代数であるという

- $X \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Example 2.1.

- $\mathcal{P}(X)$ は X の σ -代数である
- $\{\emptyset, X\}$ は X の σ -代数である
- $\{\emptyset, X\}$ は X の最小の σ -代数であり, $\mathcal{P}(X)$ は X の最大の σ -代数である. すなわち, $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$

Problem 2.1.

$\mathcal{F}$ を X の σ -代数とする. このとき, 次を示せ

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Proof.

1. $\emptyset = X^c \in \mathcal{F}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F}$
 - $A_1 := A, A_2 := B, A_k := \emptyset (k \geq 3)$ とすれば, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \cup B \in \mathcal{F}$
 - $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ で, $A^c \in \mathcal{F}$ かつ $A \cup B \in \mathcal{F}$ より, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$ である
 - $A \setminus B = A \cap B^c$ であり, $B^c \in \mathcal{F}$ かつ $A \cap B \in \mathcal{F}$ より, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ である
3. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$ であり, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{F}$ で, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}$ であるから, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{F}$ である

□

Definition 2.2. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して, $\mathcal{C}$ を含む X の最小の σ -代数を $\sigma(\mathcal{C})$ で表す

Problem 2.2. $\mathcal{C}$ を含む σ -代数全体を $\{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ とし, $\mathcal{F} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ とする. このとき, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ を含む X の最小の σ -代数であることを示せ

Proof.

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}$ は X の σ -代数である
- $\mathcal{F}$ の最小性

これを示せばいいから

- $\forall \lambda \in \Lambda, \mathcal{F}_\lambda$ は $\mathcal{C}$ を含む X の σ -代数であるから, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_\lambda$ である. したがって, $\mathcal{C} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ である
- - 各 $\mathcal{F}_\lambda$ は X の σ -代数であるから, $X \in \mathcal{F}_\lambda$ である. したがって, $X \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ である
- $\forall A \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \Lambda, A \in \mathcal{F}_\lambda$ であるから, $A^c \in \mathcal{F}_\lambda$ である. したがって, $A^c \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ である
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}$ とすると, $\forall \lambda \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}_\lambda$ であるから, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\lambda$ である. したがって, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ である
- $\mathcal{G}$ を $\mathcal{C}$ を含む X の σ -代数とする. このとき, $\mathcal{G} \in \{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ から, $\mathcal{F} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{G}$ である

□

Definition 2.3. 可測空間・可測集合

集合 X と σ -代数 $\mathcal{F}$ の組 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間といい, $\mathcal{F}$ の元を X の可測集合という

Definition 2.4. Borel 集合

$(S, \mathcal{O})$ を位相空間とする. このとき, $\sigma(\mathcal{O})$ を S の Borel 集合といい, $\mathcal{B}(S)$ で表す. また, $\mathcal{B}(S)$ の元を S の Borel 集合という

Theorem 2.1. (S, d) を可分な距離空間とし, $\mathcal{E} = \{B(a, r) : a \in S, r > 0\}$ とする. このとき, $\mathcal{B}(S) = \sigma(\mathcal{E})$ である. ただし, $B(a, r) = \{x \in S : d(x, a) < r\}$ である

Proof.

$\mathcal{O}$ を S の開集合系とする. このとき, $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}$ であるから, $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(S)$ である. 次に, $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{E})$ を示す. これから, $\mathcal{B}(S) \subset \sigma(\mathcal{E})$ が導かれる

S は可分であるから, $\overline{D} = S$ となる可算集合 D が存在する. このとき, $\mathcal{E}_0 = \{B(q, 2^{-n}) : q \in D, n \in \mathbb{N}\}$ とおくと, $\mathcal{E}_0$ は可算集合である. また, $U = \mathcal{O}$ に対して, $\{B \in \mathcal{E}_0 : B \subset U\} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ とすると, Λ は可算集合であり, $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ である. したがって, $U \in \sigma(\mathcal{E})$ だから, $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{E})$

である

□

Remark 2.1. $\mathbb{R}^n$ は可分な距離空間であり, $\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の稠密な可算集合である

Theorem 2.2.

$\mathcal{E}_0 = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ とおく. また

- $\mathcal{E}_1 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_2 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_3 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_4 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

とおくと, $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である

Proof.

$\forall a \in \mathbb{R}, (a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, \infty \right) \in \sigma(\mathcal{E}_2), [a, \infty) = (-\infty, a)^c \in \sigma(\mathcal{E}_3)$ から, $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ で, $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ である. よって, $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ である. 同様にして, $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ であるから, $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4)$ である. すると, $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_3)$ だから, $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b) \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. よって, $\mathcal{E}_0 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ だから, $\sigma(\mathcal{E}_0) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ である. また, $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a+n, \infty) \in \sigma(\mathcal{E}_0)$ だから, $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_0)$ である. したがって, $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_1)$. $\mathbb{R}$ は可分な距離空間であるから, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_0)$ □

Problem 2.3.

X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする

- $\mathcal{F}$ を X の σ -代数とし, $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とする. このとき, $\mathcal{A}$ は Y の σ -代数であることを示せ
- $\mathcal{G}$ を Y の σ -代数とし, $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{G}\}$ とする. このとき, $\mathcal{B}$ は X の σ -代数であることを示せ

Proof.

- - $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$ より, $Y \in \mathcal{A}$
 - $A \in \mathcal{A}$ とすると, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であるから, $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ から, $Y \setminus A \in \mathcal{A}$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}$ とすると, $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ であるから, $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ から, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- - $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{B}$ であるから, $X \in \mathcal{B}$
 - $B \in \mathcal{B}$ とすると, $\exists A \in \mathcal{G}, s.t. B = f^{-1}(A)$ であるから, $X \setminus B = X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ と $Y \setminus A \in \mathcal{G}$ から, $X \setminus B \in \mathcal{B}$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}$ とすると, $\exists A_n \in \mathcal{G}, s.t. B_n = f^{-1}(A_n)$ であるから, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ と $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$ から, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ である

□

Problem 2.4.

$(X, \mathcal{F})$ は可測空間とする. また, $E \subset X$ とし, $\mathcal{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{F}\}$ とする. このとき, $(E, \mathcal{F}_E)$ は可測空間であることを示せ

Proof.

$\mathcal{F}_E$ が E の σ -代数であることを示せばいいから, $f: E \rightarrow X$ を $f(x) := x \quad x \in E$ と定めると, $A \in \mathcal{F}$ に対して, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\} = \{x \in E : x \in A\} = A \cap E$ であるから, $\mathcal{F}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{F}\} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ である. したがって, $\mathcal{F}_E$ は E の σ -代数である □

Definition 2.5. 拡大実数直線

$[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を拡大実数直線という

$[-\infty, \infty]$ には自然な順序が定義される. 特に, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $-\infty < x < \infty$ である. また, $a \in \mathbb{R}$ に対して, 次のように定める

- $(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}$
- $[a, \infty] = [a, \infty) \cup \{\infty\}$
- $[-\infty, a) = (-\infty, a) \cup \{-\infty\}$
- $[-\infty, a] = (-\infty, a] \cup \{-\infty\}$

Problem 2.5.

$[-\infty, \infty]$ の四つの部分集合族

- $\mathcal{E}_1 = \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_2 = \{[a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_3 = \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$
- $\mathcal{E}_4 = \{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

を考える. このとき, $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4)$ であることを示せ

Proof.

□

Definition 2.6.

$\mathcal{E}_1 = \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$ とおき, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{E}_1)$ とする. このとき, $[-\infty, \infty]$ は $\mathcal{F}_\infty$ が定義された可測空間とする

Theorem 2.3.

- $\{\infty\}, \{-\infty\}, \mathbb{R} \in \mathcal{F}_\infty$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_\infty$

Proof.

- $\{\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty] \in \mathcal{F}_\infty, \{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n] \in \mathcal{F}_\infty, \mathbb{R} = [-\infty, \infty] \setminus \{\infty, -\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ である
- $\mathcal{G} = \{A \cap \mathbb{R} : A \in \mathcal{F}_\infty\}$ とおくと, $\mathcal{G}$ は $\mathbb{R}$ の σ -代数である. また, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(a, \infty) = (a, \infty] \cap \mathbb{R} \in \mathcal{G}$ であるから, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ である. さらに, $\mathbb{R} \subset \mathcal{F}_\infty$ だから, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\infty$. よって, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_\infty$ である

□

Problem 2.6.

次を示せ

- $\mathcal{F}_\infty = \{A \subset [-\infty, \infty] : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \in \mathcal{F}_\infty\}$

Proof. • $\mathcal{A} := \{A \subset [-\infty, \infty] : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ とする

$\subset : \mathcal{F} := \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F})$. また, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(a, \infty] \cap \mathbb{R} = (a, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるから, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ である. $\mathcal{A}$ は $[-\infty, \infty]$ の σ -代数であるから, $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$ $\supset : A \in \mathcal{A}$ とする. このとき

$$A = A \cap (\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}) \quad (1)$$

$$= (A \cap \mathbb{R}) \cup (A \cap \{\infty\}) \cup (A \cap \{-\infty\}) \quad (2)$$

ここで, $A \cap \mathbb{A}$ より, $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_\infty$ である. また, $A \cap \{\pm\infty\}$ は $\emptyset$ か $\{\pm\infty\}$ だから, $A \cap \{\pm\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$. よって, $A \in \mathcal{F}_\infty$ で, $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{A}$ である

- $\mathcal{G} = \{A \cap \mathbb{R} : A \in \mathcal{F}_\infty\}$ とする

$\subset$ は証明済みだから, $\supset$ を示す. $B \in \mathcal{G}$ とすると, $\exists A \in \mathcal{F}_\infty, s.t. B = A \cap \mathbb{R}$ で, $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{A}$ なので, $B = A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. したがって, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{G}$ である

□

3 可測写像

Definition 3.1. 可測写像

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき, $\forall A \in \mathcal{G}, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ であるとき, $f: X \rightarrow Y$ は可測写像という

Theorem 3.1.

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}), (Z, \mathcal{H})$ を可測空間とし, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする. このとき, f, g がともに可測写像であるならば, $g \circ f: X \rightarrow Z$ も可測写像である

Proof.

□

Theorem 3.2.

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とし, $f: X \rightarrow Y$ とする. また, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ とし, $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{E})$ とする. このとき, 以下同値

- $f: X \rightarrow Y$ は可測写像である
- $\forall A \in \mathcal{E}, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

Proof.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい. $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とおく. 仮定 (2) より, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. また, $\mathcal{A}$ は σ -代数である (問 4). さらに, $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ を含む最小の σ -代数だから, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$. よって, 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ だから, $f: X \rightarrow Y$ は可測である □

Theorem 3.3.

X, Y は位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ は連続とする. このとき, $f: X \rightarrow Y$ は可測である

Proof.

X, Y の開集合系をそれぞれ, $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ とする. $f: X \rightarrow Y$ は連続だから, 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \subset \mathcal{B}(X)$. また, $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{O}_Y)$ だから, 定理 3.3 より, $f: X \rightarrow Y$ は可測である □

Problem 3.1.

$(X, \mathcal{F})$ は可測空間とし, $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ とする. このとき, 次の (1) と (2) は同値であることを示せ

1. $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測である.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$.

Theorem 3.4.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測とし, $x \in X$ に対して, $g(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, $h(x) = \inf \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ と定める. このとき, $g, h: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測である

Proof.

h についても同様だから, g について考える. $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{x \in X : g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \in \mathcal{F}$ だから, $g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測である □

Definition 3.2. 下極限・上極限・収束

$\{x_n\}$ は $[-\infty, \infty]$ 内の列とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\alpha_n = \inf \{x_k : k \geq n\}$, $\beta_n = \sup \{x_k : k \geq n\}$ とし, $\{x_n\}$ の下極限と上極限をそれぞれ, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ で定める. このとき, $-\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \infty$ である. また, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ が成り立つとき, $\{x_n\}$ は収束するという

Theorem 3.5. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測とし, $x \in X$ に対して, $g(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ と定める. このとき, $g, h : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測である. 特に, すべての $x \in X$ に対して, $\{f_n(x)\}$ が収束するとき, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$) と定めると, $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ は可測である

Proof. □

Problem 3.2.

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とし, $f : X \rightarrow Y$ を可測とする. また, $E \in \mathcal{F}$ とするとき, $f|_E : E \rightarrow Y$ は可測写像である

Proof.

$g := f|_E$ とし, $A \in \mathcal{G}$ とする. このとき

$$g^{-1}(A) = \{x \in E : g(x) \in A\} \tag{3}$$

$$= \{x \in E : f(x) \in A\} \tag{4}$$

$$= \{x \in X : f(x) \in A\} \cap E \in \mathcal{F} \tag{5}$$

したがって, $g : E \rightarrow Y$ は可測である □

4 直積空間

Problem 4.1.

$X = X_1 \times \cdots \times X_m$ を直積集合とし, $i = 1, \dots, m$ に対して, $p_i : X \rightarrow X_i$ を射影とする. すなわち, $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ に対して, $p_i(x) = x_i$ と定める. このとき, $A_i \in \mathcal{P}(X_i)$ ($i = 1, \dots, m$) に対して, 次を示せ: $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m, \dots, p_m^{-1}(A_m) = X_1 \times \cdots \times X_{m-1} \times A_m$

Definition 4.1. 直積 σ -代数・直積可測空間

$i = 1, \dots, m$ に対して, $(X_i, \mathcal{F}_i)$ は可測空間とし, $X = X_1 \times \cdots \times X_m$, $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m) = \{A_1 \times \cdots \times A_m : A_i \in \mathcal{F}_i \ (i = 1, \dots, m)\}$ と定める. このとき, $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m)$ を含む X 上の最小の σ -代数を $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ の直積 σ -代数といい, $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_m$ で表す. また, $(X, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_m)$ を可測空間 $(X_1, \mathcal{F}_1), \dots, (X_m, \mathcal{F}_m)$ の直積可測空間という.

Theorem 4.1.

X は可測空間 $(X_1, \mathcal{F}_1), \dots, (X_m, \mathcal{F}_m)$ の直積可測空間とする. このとき, $i = 1, \dots, m$ に対して, 射影 $p_i : X \rightarrow X_i$ は可測である

Proof.

$A \in \mathcal{F}_i$ に対して, $p_i^{-1}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m) \subset \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_m$ だから, $p_i : X \rightarrow X_i$ は可測である $\square$

Theorem 4.2.

$(X_1, \mathcal{F}_1), \dots, (X_m, \mathcal{F}_m)$ は可測空間とする. また, $\mathcal{F}$ は $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ 上の σ -代数とし, $i = 1, \dots, m$ に対して, 射影 p_i は可測空間 $(X, \mathcal{F})$ から $(X_i, \mathcal{F}_i)$ への可測写像であるとする. このとき, $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$

Proof.

$A_i \in \mathcal{F}_i$ ($i = 1, \dots, m$) とする. $i = 1, \dots, m$ に対して, p_i は $(X, \mathcal{F})$ から $(X_i, \mathcal{F}_i)$ への可測写像だから, $p_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$. さらに, $A_1 \times \cdots \times A_m = \bigcap_{i=1}^m p_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$ だから, $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m) \subset \mathcal{F}$. よって, $\mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$ $\square$

Theorem 4.3.

$S = S_1 \times \cdots \times S_m$ は位相空間 $S_1, \dots, S_m$ の直積位相空間とする. このとき, $\mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m) \subset \mathcal{B}(S)$

Proof.

$i = 1, \dots, m$ に対して, 射影 $p_i : S \rightarrow S_i$ は連続だから, 定理 3.4 より, p_i は可測空間 $(S, \mathcal{B}(S))$ から $(S_i, \mathcal{B}(S_i))$ への可測写像である. よって, $\mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m) \subset \mathcal{B}(S)$ $\square$

Theorem 4.4.

$i = 1, \dots, m$ に対して, (S_i, d_i) は可分な距離空間とし, $S = S_1 \times \cdots \times S_m$ は $S_1, \dots, S_m$ の直積位相空間とする. このとき, $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m)$

Proof.

定理 4.4 より, $\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m)$ を示せばよい. $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in S$ に対して, $d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \dots, m\}$ と定める. このとき, $x \in S, r > 0$ に対して, $B(x, r) = B_1(x_1, r) \times \cdots \times B_m(x_m, r) \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(S_1), \dots, \mathcal{B}(S_m))$. ここで, $B_i(x_i, r)$ は中心 x_i , 半径 r の S_i における開球である. よって, $\{B(x, r) : x \in S, r > 0\} \subset \mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m)$. さらに, S は可分な距離空間だから, 定理 2.7 より, $\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}(S_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(S_m)$ $\square$

Remark 4.1.

$\mathbb{R}$ は可分な距離空間だから, 定理 4.5 より, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Theorem 4.5.

$(X, \mathcal{F})$ は可測空間とする. また, Y は可測空間 $(Y_1, \mathcal{G}_1), \dots, (Y_m, \mathcal{G}_m)$ の直積可測空間とする. さらに, $f_i: X \rightarrow Y_i$ ($i = 1, \dots, m$) とし, $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in X$ と定める. このとき, 次の (1) と (2) は同値である

1. $i = 1, \dots, m$ に対して, $f_i: X \rightarrow Y_i$ は可測である
2. $f: X \rightarrow Y$ は可測である

Proof.

まず, (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. $A_i \in \mathcal{G}_i$ ($i = 1, \dots, m$) とし, $A = A_1 \times \dots \times A_m$ とおく. (1) より, $i = 1, \dots, m$ に対して, $f_i: X \rightarrow Y_i$ は可測だから, $f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$. また, $f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(A_i)$

だから, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. よって, 直積 σ -代数の定義より, $f: X \rightarrow Y$ は可測である

次に, (2) $\Rightarrow$ (1) を示す. 射影 $p_i: Y \rightarrow Y_i$ は可測である. また, (2) より, $f: X \rightarrow Y$ は可測であり, $f_i = p_i \circ f$ だから, $f_i: X \rightarrow Y_i$ は可測である $\square$

Theorem 4.6.

$(X, \mathcal{F})$ は可測空間とし, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とする. このとき, $f + g, fg: X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測である

Proof.

fg も同様だから, $f + g$ について考える. $h(x) = (f(x), g(x))$ ($x \in X$) と定めると, $h: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ は可測である. また, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\varphi(s, t) = s + t$ と定めると, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続だから, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は可測である. さらに, $f + g = \varphi \circ h$ だから, $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測である $\square$

5 測度

Definition 5.1. 測度

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とし, $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ とする. 以下の条件をみたすとき, μ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度であるという

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ は互いに素ならば, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と測度 μ の組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間という

Problem 5.1.

$A, B, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ とする. このとき, 次を示せ

- $A \subset B$ ならば, $\mu(A) \leq \mu(B)$
- $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$

Proof.

- $A \subset B$ から, $B = A \cup (B \setminus A) \cup \emptyset \cup \dots$ で, $A, B \setminus A, \emptyset$ は互いに素だから, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + 0 + \dots \geq \mu(A)$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup \dots$ で, $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, \emptyset$ は互いに素だから, $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$ である
また, $\begin{cases} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup \dots \\ B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup \dots \end{cases}$ なので, $\begin{cases} \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) \\ \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \end{cases}$ から

$$\mu(A) + \mu(B) = [\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)] + \mu(A \cap B) \quad (6)$$

$$= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \quad (7)$$

- $m = 2$ のとき, $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ であり, $m = 3$ のとき, $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_3) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3)$ である. これを繰り返せばいい

□

Theorem 5.1. 測度の単調収束定理

$A_n \in \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \ (n \in \mathbb{N})$ とし, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Proof.

$A_0 = \emptyset, B_n = A_n \setminus A_{n-1} \ (n \in \mathbb{N})$ と定める. このとき, $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ は互いに素であり, $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ かつ $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A$ だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(A)$ □

Problem 5.2.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}, A_{n+1} \subset A_n$ とし, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とする. また, $\mu(A_1) < \infty$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ を示せ

Proof.

$B_n := A_1 \setminus A_n$ とおくと, $B_n \in \mathcal{F}$ で, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subset B_{n+1}$ である. よって, $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(B)$. また, $\mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(B_n)$ で, $\mu(B_n) \leq \mu(A_1) < \infty$ だから, $\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n)$. さらに

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \quad (8)$$

$$= A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \quad (9)$$

$$= A_1 \setminus A \quad (10)$$

で, $\mu(B) \leq \mu(A_1) < \infty$ だから, $\mu(A) = \mu(A_1) - \mu(B)$. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(B) = \mu(A) \quad (11)$$

□

Theorem 5.2.

$A_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) とする. このとき, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Proof.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ とおく. このとき, $B_n \in \mathcal{F}, B_n \subset B_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) であり,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ だから}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (12)$$

□

一般に, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が測度空間であり, $\mu(\Omega) = 1$ のとき, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を確率空間という. また, μ を確率測度という

Example 5.1.

Ω は空でない集合とする. $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ に対して, $\mu(A) = \begin{cases} \#A & (A \text{ が有限集合のとき}) \\ \infty & (A \text{ が無限集合のとき}) \end{cases}$ と定め

ると, $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ は測度である. この測度を counting measure という

Problem 5.3.

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ を counting measure とする. また, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ とする. このとき

• $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$ を示し, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ は成り立たないことを示せ

Proof.

• $k \in A_{n+1} \Rightarrow k \geq n+1 \Rightarrow k \geq n \Rightarrow k \in A_n$ より, $A_{n+1} \subset A_n$. また, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) = \emptyset$

• $\mu(A_n) = \infty$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$. また, $A = \emptyset$ より, $\mu(A) = 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \neq \mu(A)$

□

Example 5.2.

$\mathbb{R}$ の区間 I の長さを $\ell(I)$ で表す. $\mathbb{R}^N$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ 上で定義された測度 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ で, $\mu(I_1 \times \cdots \times I_N) = \prod_{i=1}^N \ell(I_i)$ ($I_1, \dots, I_N$ は $\mathbb{R}$ の区間) をみたすものが一意に存在する. これを $\mathbb{R}^N$ の Lebesgue 測度という

6 非負値関数の積分

Definition 6.1.

以下の条件をみたすとき, $\{(\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m \in \mathcal{D}$ と定める:

- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in [0, \infty), A_i \in \mathcal{F}$
- $\forall i, A_i$ は互いに素であり, $X = \bigcup_{i=1}^m A_i$

Definition 6.2. 単関数

$S = \{(\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m \in \mathcal{D}$ に対して

$$\phi_S(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in \Omega), \quad I(S) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \quad (13)$$

と定める. $\{\phi_S : S \in \mathcal{D}\}$ の元単関数という

Remark 6.1.

$I(S)$ の定義より, $0 \cdot \infty = 0$ とする

Definition 6.3.

$f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ に対して, $f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \ x \in \Omega$

Theorem 6.1.

$S = \{(\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m, T = \{(\beta_j, B_j)\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}$ とする. このとき, $\varphi_S \leq \varphi_T$ ならば, $I(S) \leq I(T)$

Proof.

$\Lambda = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} : A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ とおくと, $\{B_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{F}$ は互いに素で, $\Omega = \bigcup_{j=1}^n B_j$ だから

$$I(S) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \quad (14)$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \quad (15)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \quad (16)$$

同様に, $I(T) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \sum_{(i,j) \in \Lambda} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$ である. また, $(i, j) \in \Lambda$ のとき, $x \in A_i \cap B_j$

とすると, $\alpha_i = \varphi_S(x) \leq \varphi_T(x) = \beta_j$ だから

$$I(S) = \sum_{(i,j) \in \Lambda} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{(i,j) \in \Lambda} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = I(T) \quad (17)$$

□

Definition 6.4.

可測関数 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ に対して, $\int_{\Omega} f d\mu = \sup \{I(S) : S \in \mathcal{D}, \varphi_S \leq f\}$ と定める

Theorem 6.2.

$S \in \mathcal{D}$ に対して, $\int_{\Omega} \varphi_S d\mu = I(S)$

Proof.

$\int_{\Omega} \varphi_S d\mu$ の定義より, $I(S) \leq \int_{\Omega} \varphi_S d\mu$ である. また, $T \in \mathcal{D}$ で $\varphi_T \leq \varphi_S$ とすると, $I(T) \leq I(S)$ だから, T の上限を取れば, $\int_{\Omega} \varphi_S d\mu \leq I(S)$ $\square$

Theorem 6.3.

$f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とし, $f \leq g$ とする. このとき, $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$

Proof.

$S \in \mathcal{D}$ で $\varphi_S \leq f$ とすると, $\varphi_S \leq g$ だから, $I(S) \leq \int_{\Omega} g d\mu$. これを S の上限を取れば, $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$ $\square$

Theorem 6.4.

$f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とし, $c \in [0, \infty)$ とする. このとき, $\int_{\Omega} c f d\mu = c \int_{\Omega} f d\mu$

Proof.

$S = \{(\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m \in \mathcal{D}$ で $\varphi_S \leq f$ とする. $T = \{(c\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m$ とおくと, $T \in \mathcal{D}$ で $\varphi_T = \sum_{i=1}^m c\alpha_i \chi_{A_i} = c\varphi_S \leq c f$ だから

$$cI(S) = \sum_{i=1}^m c\alpha_i \mu(A_i) = I(T) \leq \int_{\Omega} c f d\mu \quad (18)$$

これから, $c \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} c f d\mu$. さらに

$$\frac{1}{c} \int_{\Omega} c f d\mu \leq \int_{\Omega} \frac{1}{c} c f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad (19)$$

だから, $\int_{\Omega} c f d\mu = c \int_{\Omega} f d\mu$ $\square$

Definition 6.5.

可測関数 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ と可測集合 $E \in \mathcal{F}$ に対して, $\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu$ と定める

Theorem 6.5. Monotone Convergence Theorem

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とし, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ とする. このとき, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ と定めると, $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$

Proof.

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測であり, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f_{n+1} d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu$ だから, $\exists \alpha \in [0, \infty], s.t. \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu$
 $c \in (0, 1)$ を任意に取り, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $E_n = \{x \in \Omega : c\varphi_S(x) \leq f_n(x)\}$ とおくと, $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \subset E_{n+1}$ である. また, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ が成り立つ. 実際, $x \in \Omega$ とすると, $\varphi_S(x) = 0$ ならば, $x \in E_1$ である. また, $\varphi_S(x) > 0$ ならば

$$c\varphi_S(x) < \varphi_S(x) \leq f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (20)$$

だから, $c\varphi_S(x) \leq f_p(x)$ となる $p \in \mathbb{N}$ が存在するので, $x \in E_p$ である. よって, $A_i \cap E_n \subset A_i \cap E_{n+1}$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap E_n) = A_i$ であるから, 測度の単調収束定理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ が成り立ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \varphi_S d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \int_{\Omega} \varphi_S d\mu \quad (21)$$

また, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c \int_{E_n} \varphi_S d\mu = \int_{E_n} c\varphi_S d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_{\Omega} f_n d\mu \leq \alpha \quad (22)$$

だから, $c \int_{\Omega} \varphi_S d\mu \leq \alpha$. ここで, $c \in (0, 1)$ は任意だったから, $\int_{\Omega} \varphi_S d\mu \leq \alpha$ □

Theorem 6.6. Fatou の補題

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする. このとき, $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ と定めると,

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ は可測であり, } \int_{\Omega} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

Proof.

$\forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, g_n(x) = \inf \{f_k(x) : k \geq n\}$ とおくと, $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq f_n$ だから, $\int_{\Omega} g_n d\mu \leq$

$$\int_{\Omega} f_n d\mu$$

また, $x \in \Omega$ に対して, $\{g_n(x)\}$ は非減少で $f(x)$ に収束するから, MCT より, $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測であり, $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$ □

Theorem 6.7.

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする. このとき, 以下の条件をみたす単関数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在する

- $\forall x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$
- $\forall x \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$

Proof.

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $B_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$, $A_{n,k} = \left\{x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}$, $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n \chi_{B_n}$ と定めれば良い □

Remark 6.2.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \infty], \varphi_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}(t) + n \chi_{[n, \infty)}(t) \quad (23)$$

と定めると, $x \in \Omega$ に対して, $\varphi_n(x) = \varphi_n(f(x))$ である. また, MCT より, $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n d\mu$

Theorem 6.8.

$\varphi, \psi : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ は単関数とする. このとき, $\int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu = \int_{\Omega} \varphi d\mu + \int_{\Omega} \psi d\mu$

Proof.

$\varphi = \varphi_S, \psi = \varphi_T$ をみたす $S = \{(\alpha_i, A_i)\}_{i=1}^m, T = \{(\beta_j, B_j)\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}$ が存在する. $\Lambda = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} : A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ とおくと

$$\varphi = \sum_{(i,j) \in \Lambda} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad (24)$$

$$\psi = \sum_{(i,j) \in \Lambda} \beta_j \chi_{A_i \cap B_j} \quad (25)$$

$$\varphi + \psi = \sum_{(i,j) \in \Lambda} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j} \quad (26)$$

は単関数であるから

$$\int_{\Omega} (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{(i,j) \in \Lambda} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \quad (27)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{(i,j) \in \Lambda} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \quad (28)$$

$$= \int_{\Omega} \varphi d\mu + \int_{\Omega} \psi d\mu \quad (29)$$

□

Theorem 6.9.

$f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする. このとき, $f + g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測であり, $\int_{\Omega} (f + g) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$

Proof.

単関数列 $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ が存在し, $\{\varphi_n(x)\}$ は非減少で $f(x)$ に収束し, $\{\psi_n(x)\}$ は非減少で $g(x)$ に収束する. このとき, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\Omega} (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_{\Omega} \varphi_n d\mu + \int_{\Omega} \psi_n d\mu$. また, MCT より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n d\mu = \int_{\Omega} g d\mu \quad (31)$$

さらに, $\forall x \in \Omega, \{\varphi_n(x) + \psi_n(x)\}$ は非減少で $f(x) + g(x)$ に収束するから, MCT より, $f + g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ は可測であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_{\Omega} (f + g) d\mu$. よって, $\int_{\Omega} (f + g) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$ □

Problem 6.1.

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とし, $E \in \mathcal{F}, a \in Y$ とする. また, $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in E) \\ a & (x \in X \setminus E) \end{cases}$ と定める. このとき, $g : X \rightarrow Y$ は可測であることを示せ

Proof.

$A \in \mathcal{G}$ とする. f は可測なので, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\} \in \mathcal{F}$ である

$a \notin A$ のとき, $g^{-1}(A) = \{x \in X : g(x) \in A\} = \{x \in E : f(x) \in A\} \in \mathcal{F}$
 $a \in A$ のとき

$$g^{-1}(A) = \{x \in X : g(x) \in A\} \tag{32}$$

$$= \{x \in X : g(x) \in A \setminus \{a\}\} \cup \{x \in X : g(x) = a\} \tag{33}$$

$$= \{x \in E : f(x) \in A\} \cup (X \setminus E) \in \mathcal{F} \tag{34}$$

よって, $g : X \rightarrow Y$ は可測である

□

7 実数値関数の積分

Definition 7.1. f^+, f^-

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $f^+, f^-: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad (35)$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad (36)$$

と定める. また, $\forall x \in \Omega, |f|(x) = |f(x)|$ とする

Theorem 7.1.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が可測ならば, $f^\pm, |f|: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ も可測である

Proof.

f^+ だけ示す. $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi^+(t) = \max\{t, 0\}$ と定めると, $\varphi^+: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるから, 可測である. また, $f^+ = \varphi^+ \circ f$ であり, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は可測だから, $f^+: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ は可測である $\square$

Remark 7.1.

$x \in \Omega$ に対して, $f^\pm(x) \geq 0, f(x) = f^+(x) - f^-(x), |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

Definition 7.2. 可積分

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が可測であり, $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$ のとき, f は Ω 上で可積分であるといい, $f \in L^1(\Omega)$ と書く

Remark 7.2.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が可測とする, $|f| = f^+ + f^-$ だから, $\int_\Omega |f| d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu$ である. よって, $\int_\Omega |f| d\mu < \infty \iff \int_\Omega f^+ d\mu < \infty$ かつ $\int_\Omega f^- d\mu < \infty$

Definition 7.3.

$f \in L^1(\Omega)$ に対して, $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$ と定める. $\int_\Omega f d\mu$ の代わりに, $\int_\Omega f(x) \mu(dx)$ と書くこともある

Theorem 7.2.

$f \in L^1(\Omega)$ に対して, $\left| \int_\Omega f d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| d\mu$

Proof.

$f \in L^1(\Omega)$ より, $\int_\Omega f^+ d\mu, \int_\Omega f^- d\mu \in [0, \infty)$ だから

$$\left| \int_\Omega f d\mu \right| \leq \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu = \int_\Omega |f| d\mu \quad (37)$$

$\square$

Theorem 7.3.

$f, g \in L^1(\Omega)$ とする. このとき, $f + g \in L^1(\Omega)$ であり, $\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$

Proof.

$f, g \in L^1(\Omega)$ とする. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ だから

$$\int_\Omega |f + g| d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |g| d\mu < \infty \quad (38)$$

だから, $f + g \in L^1(\Omega)$ である. なお, $h = f + g$ とおくと, $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ だから, $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$ である. このとき

$$\int_{\Omega} h^+ d\mu + \int_{\Omega} f^- d\mu + \int_{\Omega} g^- d\mu = \int_{\Omega} h^- d\mu + \int_{\Omega} f^+ d\mu + \int_{\Omega} g^+ d\mu \quad (39)$$

ここでの積分の値は全て有限であるから

$$\int_{\Omega} (f + g) d\mu = \int_{\Omega} h d\mu = \int_{\Omega} h^+ d\mu - \int_{\Omega} h^- d\mu \quad (40)$$

$$= \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu + \int_{\Omega} g^+ d\mu - \int_{\Omega} g^- d\mu \quad (41)$$

$$= \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu \quad (42)$$

□

Theorem 7.4.

$f \in L^1(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu$

Proof.

$\alpha > 0$ のとき, $(\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm}$ だから

$$\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \int_{\Omega} \alpha f^+ d\mu - \int_{\Omega} \alpha f^- d\mu = \alpha \int_{\Omega} f^+ d\mu - \alpha \int_{\Omega} f^- d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu \quad (43)$$

さらに, $0 = \int_{\Omega} (f - f) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} (-f) d\mu$ だから, $\int_{\Omega} (-f) d\mu = -\int_{\Omega} f d\mu$. よって, $\alpha < 0$ のとき

$$\int_{\Omega} \alpha f d\mu = \int_{\Omega} (-\alpha)(-f) d\mu = (-\alpha) \int_{\Omega} (-f) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu \quad (44)$$

$\alpha = 0$ のときは明らか

□

Theorem 7.5. Dominated Convergence Theorem, DCT

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とし, 次の条件をみたすとする

- $\forall x \in \Omega, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$
- $x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ をみたす $g \in L^1(\Omega)$ が存在する

このとき, $f_n, f \in L^1(\Omega)$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0 \quad (45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad (46)$$

Proof.

$\forall n \in \mathbb{N}, x \in \Omega, |f_n(x)| \leq g(x)$ かつ $g \in L^1(\Omega)$ より, $f_n \in L^1(\Omega)$ である. また, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は可測であり, $|f(x)| \leq g(x)$ だから, $f \in L^1(\Omega)$ である. さらに, $x \in \Omega, |f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$ だから, Fatou の補題より

$$\int_{\Omega} 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (2g - |f_n - f|) d\mu \quad (47)$$

$$= \int_{\Omega} 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \quad (48)$$

ここで, $\int_{\Omega} 2g d\mu \in \mathbb{R}$ だから, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \leq 0$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$. また

$$\left| \int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{\Omega} f d\mu \right| = \left| \int_{\Omega} (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \quad (49)$$

だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$ □

8 L^p 空間

以下, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし, $\mu(\Omega) > 0$ とする. また, 関数は実数値とする

Definition 8.1. L^1 ノルム

$f \in L^1(\Omega)$ に対して, $\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f| d\mu$ と定める

Theorem 8.1.

$f, g \in L^1(\Omega), \alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\|\alpha f\|_{L^1} = |\alpha| \|f\|_{L^1}$ であり, $\|f + g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$ である

Proof.

- $f \in L^1(\Omega), \alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $|\alpha f|_{L^1} = \int_{\Omega} |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_{\Omega} |f| d\mu = |\alpha| \|f\|_{L^1}$
- $f, g \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\|f + g\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f + g| d\mu \leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) d\mu \quad (50)$$

$$= \int_{\Omega} |f| d\mu + \int_{\Omega} |g| d\mu = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \quad (51)$$

□

Definition 8.2. 零集合・ほとんどいたるところ

$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0\}$ とおく. $\mathcal{N}$ の元を零集合という

また, $P(x)$ を $x \in \Omega$ に対する命題とする. $A \in \mathcal{N}$ が存在し, 全ての $x \in \Omega \setminus A$ に対して $P(x)$ が成り立つとき, $P(x)$ はほとんどいたるところ成り立つという. このとき, P a.e. on Ω または $P(x)$ for a.e. $x \in \Omega$ と書く

Theorem 8.2.

$f \in L^1(\Omega), \|f\|_{L^1} = 0$ とする. このとき, $f = 0$ a.e. on Ω

Proof.

$A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ とおく. また, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \left\{x \in \Omega : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$ とおく. このとき, $A_n \in \mathcal{F}$ であり

$$0 = \|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f| d\mu \geq \int_{A_n} |f| d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \quad (52)$$

だから, $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = 0$ である. また, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから, $A \in \mathcal{F}$ であり, $\mu(A) = 0$ である. よって, $f = 0$ a.e. on Ω □

以下, $f(x) = g(x)$ for a.e. on Ω をみたす可測関数 $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を同一視する. この同一視により, $L^1(\Omega)$ はノルム空間となる

Definition 8.3. p 乗可積分

$1 < p < \infty$ とする. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が可測であり, $\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$ のとき, f は Ω 上で p 乗可積分であるという. Ω 上で p 乗可積分な関数全体の集合を $L^p(\Omega)$ で表す. また, $f \in L^p(\Omega)$ に対して, $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ と定める

Theorem 8.3.

$(X, \|\cdot\|)$ はノルム空間とし, 以下の条件を仮定する

$$\{u_n\} \subset X \text{ かつ } \sum_{k=1}^{\infty} \|u_{k+1} - u_k\| < \infty \text{ ならば, } \{u_n\} \text{ は } X \text{ の収束列である}$$

このとき, X は完備である

Theorem 8.4.

$f: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ は可測であり, $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$ とする. このとき, $f(x) < \infty$ for a.e. $x \in \Omega$

Proof.

$A = \{x \in \Omega : f(x) = \infty\}$ とおく. また, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$ とおく. このとき, $A, A_n \in \mathcal{F}$ であり

$$n\mu(A_n) = \int_{A_n} n d\mu \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_{\Omega} f d\mu < \infty \quad (53)$$

また, $\forall n \in \mathbb{N}, A \subset A_n$ だから, $\mu(A) \leq \mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. よって, $\mu(A) = 0$ だから, $f(x) < \infty$ for a.e. $x \in \Omega$ $\square$

Theorem 8.5.

$1 \leq p < \infty$ とする. このとき, ノルム空間 $L^p(\Omega)$ は完備である

Proof.

上の定理を用いて, $\{u_n\} \subset L^p(\Omega), u_0 = 0$ とし, $M := \sum_{k=0}^{\infty} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^p} < \infty$ とする. また,

$x \in \Omega$ に対して, $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|$ とおき, $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|$ とおく. このとき, $x \in \Omega$ に対して, $\{w_n(x)\}$ は非減少で $w(x)^p$ に収束するので, MCT より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_{L^p}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w_n^p d\mu = \int_{\Omega} w^p d\mu \quad (54)$$

また, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\|w_n\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^p} \leq M$ だから, $\int_{\Omega} w^p d\mu \leq M^p$ となる. よって, $w(x) < \infty$ for a.e. $x \in \Omega$. すなわち, $E = \{x \in \Omega : w(x) < \infty\}$ とおくと, $E \in \mathcal{F}, \mu(E^c) = 0$. $x \in E$ に対して, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| = w(x) < \infty$ だから

$$u(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) \quad (55)$$

が存在する. また, $x \in E^c$ に対して, $u(x) = 0$ と定める. このとき, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は可測であり, $x \in E$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$ である. また, $n \in \mathbb{N}, x \in \Omega$ に対して

$$|u_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| = w_n(x) \leq w(x) \quad (56)$$

だから, $|u(x)| \leq w(x)$ であり, $|u_n(x) - u(x)|^p \leq (|u_n(x)| + |u(x)|)^p \leq 2^p w(x)^p$. さらに, $w \in L^p(\Omega)$ だから, $u \in L^p(\Omega)$ であり, DCT より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |u_n - u|^p d\mu \quad (57)$$

よって, $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ だから, $L^p(\Omega)$ は完備である $\square$

9 測度の一意性定理

Definition 9.1. 乗法族

$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(X)$ とする. $A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$ が成り立つとき, $\mathcal{C}$ を X 上の乗法族という

Definition 9.2. Dynkin 族

$\mathcal{D} \subset \mathcal{F}(X)$ とする. $\mathcal{D}$ が X 上の Dynkin 族であるとは, 以下の条件をみたすことである

- $X \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D}$ かつ $A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$
- $A_n \in \mathcal{D}, A_n \subset A_{n+1} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

Theorem 9.1. Dynkin 族定理

$\mathcal{C}$ は乗法族, $\mathcal{D}$ は Dynkin 族であり, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ とする. このとき, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$ である

Theorem 9.2. 測度の一意性定理

$\mathcal{C}$ は X 上の乗法族とする. また, μ_1, μ_2 は $\sigma(\mathcal{C})$ 上の測度とし, 以下の条件を仮定する

- $A \in \mathcal{C}, \mu_1(A) = \mu_2(A)$
- 以下の条件をみたす $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ が存在する
 - $E_n \subset E_{n+1}$
 - $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$
 - $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

このとき, $A \in \sigma(\mathcal{C})$ に対して, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ である

Proof.

$\forall n \in \mathbb{N}, A \in \sigma(\mathcal{C})$ に対して, $\mu_1(A \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n)$ を示せば良い. 実際, このとき, 仮定より測度の単調収束定理により, $A \in \sigma(\mathcal{C})$ に対して

$$\mu_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(A \cap E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A \cap E_n) = \mu_2(A) \quad (58)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{D}_n = \{A \subset X : \mu_1(A \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n)\}$ とおく. 示すべきことは, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_n$ である. 仮定と $\mathcal{C}$ が乗法族であることから, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_n$ である. 以下, $\mathcal{D}_n$ が Dynkin 族であることを示す

- $E_n \in \mathcal{C}$ と仮定より, $\mu_1(X \cap E_n) = \mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) = \mu_2(X \cap E_n)$ だから, $X \in \mathcal{D}_n$
- $A, B \in \mathcal{D}_n, A \subset B$ とする. このとき, $(B \setminus A) \cap E_n = (B \cap E_n) \setminus (A \cap E_n)$ であり, $\mu_i(A \cap E_n) \leq \mu_i(E_n) < \infty$ だから

$$\mu_1((B \setminus A) \cap E_n) = \mu_1(B \cap E_n) - \mu_1(A \cap E_n) \quad (59)$$

$$= \mu_2(B \cap E_n) - \mu_2(A \cap E_n) = \mu_2((B \setminus A) \cap E_n) \quad (60)$$

よって, $B \setminus A \in \mathcal{D}_n$

- $A_k \in \mathcal{D}_n, A_k \subset A_{k+1}$ とし, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とおく. このとき, 測度の単調収束定理により

$$\mu_1(A \cap E_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_1(A_k \cap E_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2(A_k \cap E_n) = \mu_2(A \cap E_n) \quad (61)$$

だから, $A \in \mathcal{D}_n$

以上により, $\mathcal{D}_n$ は Dynkin 族である □

10 Hopf の拡張定理

Definition 10.1. 半代数

$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}(X)$ とする. $\mathcal{C}$ が X 上の半代数であるとは, 以下の条件をみたすことである

- $X, \emptyset \in \mathcal{C}$
- $A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$
- $A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \tilde{\mathcal{C}}$. ここで, $\tilde{\mathcal{C}} := \left\{ \bigcup_{i=1}^n C_i : n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C} \text{ は互いに素} \right\}$ である

Definition 10.2. 有限加法的・可算加法的・可算劣加法的

$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ とし, $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ とする

- μ が $\mathcal{C}$ 上で有限加法的であるとは, 有限個の集合 $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}$ が互いに素であり,
 $A = \bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{C} \implies \mu(A) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$

- μ が $\mathcal{C}$ 上で可算加法的であるとは, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{C}$ が互いに素であり, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$
 $\implies \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- μ が $\mathcal{C}$ 上で可算劣加法的であるとは, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{C}$ が互いに素であり, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$
 $\implies \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Theorem 10.1. Hopf の拡張定理

$\mathcal{C}$ は半代数とし, $\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ は以下の条件をみたすとする

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- μ_0 は $\mathcal{C}$ 上で有限加法的である
- μ_0 は $\mathcal{C}$ 上で可算劣加法的である

このとき, $\forall E \in \mathcal{C}, \mu(E) = \mu_0(E)$ をみたす測度 $\mu : \sigma(\mathcal{C}) \rightarrow [0, \infty]$ が存在する

11 一次元 Lebesgue 測度

Definition 11.1.

$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \quad (62)$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \quad (63)$$

と定める. また, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \emptyset$ と定める

Problem 11.1.

$\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}$ 上の半代数であることを示せ. また, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}_1)$ を示せ

Definition 11.2.

$\mu_0 : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ を次のように定める

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- $(a, b] \in \mathcal{C}_1 \implies \mu_0((a, b]) = b - a$
- $I \in \mathcal{C}_2 \implies \mu_0(I) = \infty$

Problem 11.2.

μ_0 は $\mathcal{C}$ 上で有限加法的であることを示せ

Theorem 11.1.

$I \in \mathcal{C}_1, I_n \in \mathcal{C}_1, n \in \mathbb{N}$ かつ $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ とする. このとき, $\mu_0(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n)$

Proof.

$I_n = (a_n, b_n], I = (a, b]$ とする. $\varepsilon > 0$ を任意にとる

$$[a + \varepsilon, b] \subset (a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a_n, b_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \quad (64)$$

だから, $[a + \varepsilon, b]$ のコンパクト性より, $\mathbb{N}$ の有限部分集合 J が存在し

$$(a + \varepsilon, b] \subset [a + \varepsilon, b] \subset \bigcup_{j \in J} \left(a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \subset \bigcup_{j \in J} \left(a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right] \quad (65)$$

これから

$$\mu_0(I) - \varepsilon = b - a - \varepsilon = \mu_0((a + \varepsilon, b]) \quad (66)$$

$$\leq \sum_{j \in J} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \quad (67)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(I_n) + \varepsilon \quad (68)$$

□