

Contents

1	位相空間論の応用	2
2	ホモトピー（連続変形）と基本群	4
3	道の積・道のホモトピーの積・基本群	8
4	連続写像・ホモトピー同値写像・基本群	11
4.1	連続写像と基本群	11
4.2	ホモトピーと基本群	12
5	基本群の計算	13
5.1	四つのテクニック	13
5.2	基本群の応用	17
6	S^1 の基本群	18
7	被覆空間	21
7.1	被覆空間の定義	21
7.2	被覆空間の基本性質	21
7.3	被覆空間の典型例	22
7.4	被覆空間の基本群・底空間の基本群・被覆変換群	25
7.5	被覆空間への写像の持ち上げ	26

1 位相空間論の応用

Proposition 1.1.

X, Y : 位相空間, $A \subset X$ を部分空間とする. このとき, $f : X \rightarrow Y$ が同相写像 $\Rightarrow f|_A : A \rightarrow f(A)$ も同相写像

Proof. □

Definition 1.1. 弧状連結

X : 位相空間とする

X が弧状連結である $\stackrel{def}{\iff} \forall x_0, x_1 \in X, \exists \varphi : [0, 1] \rightarrow X, s.t. \varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x_1$

Theorem 1.1.

X, Y : 位相空間とし, $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき

$A (\subset X)$ が弧状連結 $\Rightarrow f(A) (\subset Y)$ も弧状連結

Proof. $\forall y_0, y_1 \in f(A), \exists x_0, x_1 \in A, s.t. f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$. A は弧状連結なので, $\exists \varphi : [0, 1] \rightarrow A, s.t. \varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x_1$. f は連続なので, $f|_A : A \rightarrow f(A)$ も連続. したがって, $f_A \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow f(A)$ も連続で

$$\begin{cases} (f|_A \circ \varphi)(0) = f|_A(\varphi(0)) = f|_A(x_0) = f(x_0) = y_0 \\ (f|_A \circ \varphi)(1) = f|_A(\varphi(1)) = f|_A(x_1) = f(x_1) = y_1 \end{cases}$$

□

Corollary 1.1.

$X \cong Y$ のとき, X が弧状連結 $\iff Y$ も弧状連結

Remark 1.1. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でない ($n \geq 2$)

Proof.

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ と仮定すると, $\exists f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が同相写像である. ここで, $a = f(\mathbf{0})$ とすると, $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$ は同相写像であるが, $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ は弧状連結であるのに対し, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ は弧状連結でないから矛盾 □

Definition 1.2. コンパクト性

X : 位相空間とする

$A (\subset X)$ がコンパクトである $\stackrel{def}{\iff} A$ の X における任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, その中の有限個開集合 $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$ を適当に選べば, それだけで A を被覆できる. すなわち, $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ となる

Theorem 1.2. Heine-Borel の定理

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し, A がコンパクト $\iff A$ は有界閉集合

Theorem 1.3.

X, Y : 位相空間とし, $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, $A \subset X$ がコンパクト $\Rightarrow f(A) \subset Y$ もコンパクト

Proof. □

Corollary 1.2.

$X \cong Y$ のとき, X がコンパクト $\iff Y$ もコンパクト

Proof. □

Remark 1.2. $S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ と $\mathbb{R}^n$ は同相でない

Proof.

S^n は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合からコンパクトである. $\mathbb{R}^n$ は $n \geq 1$ のときコンパクトでない. $\mathbb{R}^0$ は一点集合でコンパクトだが, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, S^n$ は 2 点以上の点を含む. よって, $\mathbb{R}^0$ と同相ではない $\square$

Theorem 1.4.

X, Y : 位相空間とし, X がコンパクトで Y がハウスドルフ空間であるとする. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, f は閉写像である

Proof.

$\square$

Corollary 1.3.

X, Y : 位相空間とし, X がコンパクトで Y がハウスドルフ空間であるとする. $f: X \rightarrow Y$ を単射連続写像とする. このとき, $f: X \rightarrow f(X)$ は同相写像である

Proof.

$\square$

2 ホモトピー（連続変形）と基本群

Definition 2.1. ホモトピック・ホモトピー

X, Y を位相空間, $f, g : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. f が g にホモトピックまたはホモトープであるとは

$$\exists F : X \times I \xrightarrow{\text{連続}} Y, s.t. \forall x \in X, \begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

このとき, $f \cong g$ で表し, F を f から g へのホモトピーという

Remark 2.1.

$C(X, Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合とすると, $\cong$ は $C(X, Y)$ 上の同値関係である. つまり:

- $\forall f \in C(X, Y), f \cong f$
- $\forall f, g \in C(X, Y), f \cong g \Rightarrow g \cong f$
- $\forall f, g, h \in C(X, Y), f \cong g \wedge g \cong h \Rightarrow f \cong h$

さらに, $f \in C(X, Y)$ に対して, f を含む同値類を f のホモトピー類という

Example 2.1.

包含写像 $\iota : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ と原点 0 への定値写像 $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ はホモトピックである

Proof.

$F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t \right) \mapsto \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$ とすると

$$F \text{ は連続で, } \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S^1, \begin{cases} F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 1\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \iota\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \end{cases} \quad \text{だから, } F \text{ は } f \text{ から}$$

ι へのホモトピーである. よって, $f \cong \iota$ □

Definition 2.2. ナルホモトピック・ゼロホモトープ

定値写像とホモトピックになるような連続写像をナルホモトピックまたはゼロホモトープという

Example 2.2.

$id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto x$ と $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ はホモトピックである

Proof.

F を

$$F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1}$$

$$(x, t) \mapsto \frac{x}{t\|x\| + (1-t)} \tag{2}$$

で定めると, F は well-defined な写像で連続である

また, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \begin{cases} F(x, 0) = \frac{x}{1} = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x) \\ F(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = f(x) \end{cases}$. よって, F は $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ から f へのホモトピーである. よって, $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \cong f$ □

Definition 2.3. 動かさずにホモトピック

X, Y を位相空間, $A \subset X$ を部分空間, $f, g : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, f と g が動かさずにホモトピックであるとは

$$\exists F : X \times I \rightarrow Y, s.t. F \text{ は } f \text{ から } g \text{ へのホモトピーであって, } \forall a \in A, \forall t \in I, F(a, t) = f(a)$$

このとき, $f \cong_{rel A} g$ で表し, $f(a) = g(a)$ でなければ, $f \cong_{rel A} g$ にはならない
 $f \cong g \iff f \cong_{rel \emptyset} g$ で, $\cong_{rel A}$ は $C(X, Y)$ 上の同値関係である

Theorem 2.1. 写像の合成とホモトピー

X, Y, Z を位相空間, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ と $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ をそれぞれ連続写像とする. このとき

$$\begin{cases} f_0 \cong f_1 : X \rightarrow Y \\ g_0 \cong g_1 : Y \rightarrow Z \end{cases} \Rightarrow g_0 \circ f_0 \cong g_1 \circ f_1 : X \rightarrow Z$$

Proof.

f_0 から f_1 へのホモトピーを $F : X \times I \rightarrow Y$, g_0 から g_1 へのホモトピーを $G : Y \times I \rightarrow Z$ とする. このとき, $H : X \times I \rightarrow Z$ を $H(x, t) = G(F(x, t), t)$ で定めると, H は連続である $\forall x \in X$

$$H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x) \quad (3)$$

$$H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f_1(x), 1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x) \quad (4)$$

以上より, H は $g_0 \circ f_0$ から $g_1 \circ f_1$ へのホモトピーである. よって, $g_0 \circ f_0 \cong g_1 \circ f_1$ $\square$

Definition 2.4. ホモトピー同値

X, Y を位相空間とする. このとき, X と Y がホモトピー同値または同じホモトピー型を持つとは

$$\begin{cases} \exists f : X \rightarrow Y, f \text{ は連続写像である} \\ \exists g : Y \rightarrow X, g \text{ は連続写像である} \end{cases} \quad s.t. g \circ f \cong id_X \text{ かつ } f \circ g \cong id_Y$$

Example 2.3.

$\mathbb{R}^n$ と 1 点空間 $\{p\}$ はホモトピー同値である

Proof.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{p\}, x \mapsto p$ と $g : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \mathbf{0}$ とすると, f も g も連続である. さらに, $f \circ g = id_{\{p\}}$ であるから, $f \circ g \cong id_{\{p\}}$. また, $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{0}$ への定値写像であるから, $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$

を $F(x, t) = tx$ で定めると, F は連続で, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} F(x, 0) = \mathbf{0} = (g \circ f)(x) \\ F(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n}(x) \end{cases}$. よって, F

は $g \circ f$ から $id_{\mathbb{R}^n}$ へのホモトピーである. 従って, $g \circ f \cong id_{\mathbb{R}^n}$. 以上より, $\mathbb{R}^n \cong \{p\}$ $\square$

Theorem 2.2.

X, Y を位相空間とする. $X \cong Y$ のとき, X が弧状連結 $\iff Y$ が弧状連結

Proof.

$\Rightarrow$ を示せば良い

$X \cong Y$ より, ホモトピー同値写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在する. つまり, f は連続写像で,

$\exists g : Y \xrightarrow{\text{連続}} X, s.t. g \circ f \cong id_X$ かつ $f \circ g \cong id_Y$. 特に, $f \circ g \cong id_Y$ より, $f \circ g$ から id_Y へのホモトピー $F : Y \times I \rightarrow Y$ が存在する. F は連続で, $F(y, 0) = (f \circ g)(y)$ かつ $F(y, 1) = y$. $\forall y_0, y_1 \in Y$ を任意に取り, $x_0 = g(y_0), x_1 = g(y_1)$ とする. X は弧状連結なので, $\exists \varphi : [0, 1] \xrightarrow{\text{連続}} X, s.t. \varphi(0) = x_0, \varphi(1) = x_1$. よって, $f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow Y$ は連続で,

$\begin{cases} (f \circ \varphi)(0) = f(x_0) = f(g(y_0)) \\ (f \circ \varphi)(1) = f(x_1) = f(g(y_1)) \end{cases}$. ここで, $\begin{cases} \psi' : [0, 1] \rightarrow Y & t \mapsto F(y_0, 1-t) \\ \psi'' : [0, 1] \rightarrow Y & t \mapsto F(y_1, t) \end{cases}$ とすると, ψ', ψ''

は連続で, $\begin{cases} \phi'(0) = F(y_0, 1) = y_0 \\ \phi'(1) = F(y_0, 0) = (f \circ g)(y_0) \end{cases}, \begin{cases} \phi''(0) = (f \circ g)(y_1) \\ \phi''(1) = y_1 \end{cases}$. よって, $\psi: [0, 1] \rightarrow Y$
を $\psi(t) = \begin{cases} \psi'(3t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (f \circ \varphi)(3t-1) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \psi''(3t-2) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$ とすると, ψ は連続で, $\psi(0) = \psi'(0) = y_0, \psi(1) = \psi''(1) = y_1$ となり, Y は弧状連結である $\square$

Example 2.4.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ はホモトピー同値である

Proof.

包含写像 $\iota: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ をそれぞれ $x \mapsto x$ と $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ で定めると, ι も f も連続である. ここで, $f \circ \iota: id_{S^{n-1}}$ は明らかで, $f \circ \iota \cong id_{S^{n-1}}$. また, $\iota \circ f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ は $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ にホモトピックであるから, $S^{n-1} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ である $\square$

Definition 2.5. レトラクション・レトラクト

X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間とする. このとき

1. $r: X \rightarrow A$ が X から A へのレトラクションであるとは, r は連続写像であって, $r|_A: A \rightarrow A$ が恒等写像であること
2. A が X のレトラクトであるとは, 何らかのレトラクション $r: X \rightarrow A$ が存在すること

Remark 2.2.

- $r: X \rightarrow A$ がレトラクション $\iff \iota: A \hookrightarrow X$ を考えると, $r \circ \iota = id_A$ で, $r: X \rightarrow A$ は連続
- A が X のレトラクトであっても, $A \cong X$ となるのは稀である

Definition 2.6. 変形レトラクション・変形レトラクト

X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間とする. このとき

- $r: X \rightarrow A$ が X から A への変形レトラクションであるとは, r はレトラクションであって, 包含写像 $\iota: A \hookrightarrow X$ に対し, $\iota \circ r \cong id_X$ が存在すること
- A が X の変形レトラクトであるとは, 何らかの変形レトラクション $r: X \rightarrow A$ が存在すること

Remark 2.3.

- A が X の変形レトラクト $\Rightarrow A \cong X$
- S^{n-1} は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の変形レトラクトで, $S^{n-1} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Definition 2.7. 強変形レトラクション・強変形レトラクト

X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間とする. このとき

- $r: X \rightarrow A$ が X から A への強変形レトラクションであるとは, r はレトラクションであって, 包含写像 $\iota: A \hookrightarrow X$ に対し, $\iota \circ r \cong_{rel A} id_X$ が存在すること
- A が X の強変形レトラクトであるとは, 何らかの強変形レトラクション $r: X \rightarrow A$ が存在すること

Remark 2.4.

A が X の強変形レトラクト $\Rightarrow A$ が X の変形レトラクト $\Rightarrow \begin{cases} A \cong X \\ A \text{ は } X \text{ のレトラクト} \end{cases}$

Example 2.5.

S^{n-1} は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の強変形レトラクトである

3 道の積・道ホモトピーの積・基本群

Definition 3.1. 道・逆の道・定値道

X を位相空間とする。このとき

- ・ 連続写像 $f: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道や X 内の道という
- ・ 道 $f: [0, 1] \rightarrow X$ に対し、道 $\bar{f}: [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto f(1-t)$ を f の逆の道という
- ・ 点 $x \in X$ に対して、道 $\varepsilon_x: [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto x$ を x に値をとる定値道という

Definition 3.2. 道の積

X を位相空間とする。このとき、 X 上の二つの道 $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ が $f(1) = g(0)$ をみたすとき、

道 $[0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ を道 f と道 g の積といい、 fg で表す

Definition 3.3. 道ホモトピー

X を位相空間とする。このとき、道 $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする。このとき、 f が g に道ホモトピックであるとは、 $f \cong_{rel\{0,1\}} g$ である

Remark 3.1.

道 $f: [0, 1] \rightarrow X$ に対し、記号 $[f]$ で、 f の属する道ホモトピー類を表す

Lemma 3.1.

X を位相空間とする。 $f_0 \sim f_1: [0, 1] \rightarrow X$ と $g_0 \sim g_1: [0, 1] \rightarrow X$ をそれぞれ道ホモトピーとする。このとき、 $f_0 g_0 \sim f_1 g_1: [0, 1] \rightarrow X$ である

Proof.

$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ を $\begin{cases} H(t, s) = F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(t, s) = G(2t-1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ と定めると、 H は well-defined で

$$H(t, 0) = \begin{cases} F(2t, 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1, 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$= \begin{cases} f_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_0(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$= (f_0 g_0)(t) \quad (7)$$

同様に、 $H(t, 1) = (f_1 g_1)(t)$ で、 $H(0, s) = f_0(0), H(1, s) = g_0(1)$ である。貼り合わせ補題より、 H は連続であるから、 H は $f_0 g_0$ から $f_1 g_1$ への道ホモトピーである $\square$

Definition 3.4. 道ホモトピーの積

X を位相空間とし、 $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道で、 $f(1) = g(0)$ をみたすとする。このとき、 $[f]$ と $[g]$ の積を $[f][g] = [fg]$ で定める

Remark 3.2.

f, g, h を X 上の道で、 $f(1) = g(0), g(1) = h(0)$ をみたすとする。このとき、 $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ である。つまり、道ホモトピーの積は結合的である。つまり、 $[(fg)h] = [f(gh)]$ であり、 $(fg)h \sim f(gh)$ であることを示す

Proof.

$$F : I \times I \rightarrow X \text{ を } F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(\frac{4t}{2-s} - \frac{2+s}{2-s}\right) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ と定めると, } F \text{ は well-}$$

defined で連続である. さらに, $F(0, s) = f(0)$, $F(1, s) = h(1)$, $F(t, 0) = ((fg)h)(t)$, $F(t, 1) = (f(gh))(t)$ である. よって, F は $(fg)h$ から $f(gh)$ への道ホモトピーである. 従って, $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ である $\square$

Remark 3.3.

左右単位元の存在: X 上の道 $f : [0, 1] \rightarrow X$ に対し, $[\varepsilon_{f(0)}][f] = [f] = [f][\varepsilon_{f(1)}]$ とすると,

$$\varepsilon_{f(0)}f \sim f \text{ を示せばいい. } F : I \times I \rightarrow X \text{ を } F(t, s) = \begin{cases} f(0) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f\left(\frac{2t}{1+s} - \frac{1-s}{1+s}\right) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ と}$$

定めると, F は well-defined で連続で, $\varepsilon_{f(0)}f$ から f への道ホモトピーである

Lemma 3.2.

逆元の存在: X 上の道 $f : [0, 1] \rightarrow X$ に対し, $[f][\bar{f}] = [\varepsilon_{f(0)}]$, $[\bar{f}][f] = [\varepsilon_{f(1)}]$ であるとする

$$\text{と, } f\bar{f} \sim \varepsilon_{f(0)} \text{ を示せばいい. } F : I \times I \rightarrow X \text{ を } F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \bar{f}(2t-1) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ とす}$$

ると, F は well-defined で連続で, $f\bar{f}$ から $\varepsilon_{f(0)}$ への道ホモトピーである. 同様に, $\bar{f}f \sim \varepsilon_{f(1)}$ も示せる

Definition 3.5. Loop

X を位相空間とし, X 上の Loop とは, 「始点 = 終点」となるような X 上の道のことである

Remark 3.4.

(X, x_0) を基点つき位相空間とするとき

$\pi_1(X, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \text{ を基点とする } X \text{ 上の道の道ホモトピー類}\}$ で, $\pi_1(X, x_0)$ では道ホモトピー類の積が閉じている. さらに, $\pi_1(X, x_0)$ は結合的で, $[\varepsilon_{x_0}]$ が単位元で, $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ である. つまり, $\pi_1(X, x_0)$ は, 道ホモトピー類の積を演算, $[\varepsilon_{x_0}]$ を単位元とする群になる

Definition 3.6. 基本群

群 $\pi_1(X, x_0)$ を x_0 を基点とした X の基本群という

Theorem 3.1.

x_0 と x_1 が道 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ で結ばれているとき, $\gamma_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, $[f] \mapsto [\bar{\gamma}f\gamma]$ は well-defined な群の同型である

Proof.

$f \sim f'$ とする. $\bar{\gamma} \sim \bar{\gamma}$ なので, $\bar{\gamma}f \sim \bar{\gamma}f'$ である. さらに, $\gamma \sim \gamma$ なので, $(\bar{\gamma}f)\gamma \sim (\bar{\gamma}f')\gamma$ であ

る. よって, γ_* は well-defined である. 次に

$$\gamma_*([f][g]) = \gamma_*([fg]) \quad (8)$$

$$= \gamma_*([fg]) \quad (9)$$

$$= [(\bar{\gamma}(fg))\gamma] \quad (10)$$

$$= [\bar{\gamma}][f][g][\gamma] \quad (11)$$

$$= [\bar{\gamma}][f][\varepsilon_{f(1)}][g][\gamma] \quad (12)$$

$$= [\bar{\gamma}][f][\gamma][\bar{\gamma}][g][\gamma] \quad (13)$$

$$= [(\bar{\gamma}f)\gamma][(\bar{\gamma}g)\gamma] \quad (14)$$

$$= \gamma_*([f])\gamma_*([g]) \quad (15)$$

であるから, γ_* は群の準同型である. $\bar{\gamma}_*: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ も well-defined な群の準同型であるから, $\begin{cases} \bar{\gamma}_* \circ \gamma_* = id_{\pi_1(X, x_0)} \\ \gamma_* \circ \bar{\gamma}_* = id_{\pi_1(X, x_1)} \end{cases}$ □

Corollary 3.1.

X が弧状連結であるとき, X のどこに基点を取っても, 基本群は同型な群となる

4 連続写像・ホモトピー同値写像・基本群

4.1 連続写像と基本群

X, Y を位相空間とし, $\varphi : X \rightarrow Y$ を連続写像とする. また, f を x_0 を基点とする X 上の Loop とし, $\varphi \circ f$ を $\varphi(x_0)$ を基点とする Y 上の Loop とする. x_0 を起点とする X 上の Loop f, f' について, $f \sim f'$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{道ホモトピー } F : I \times I \rightarrow X \text{ が存在} \\ F(t, 0) = f(t) \\ F(t, 1) = f'(t) \\ F(0, s) = f(0) = x_0 \\ F(1, s) = f(1) = x_0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \varphi \circ F : I \times I \rightarrow Y \text{ は連続で} \\ (\varphi \circ F)(t, 0) = (\varphi \circ f)(t) \\ (\varphi \circ F)(t, 1) = (\varphi \circ f')(t) \\ (\varphi \circ F)(0, s) = (\varphi \circ f)(0) = \varphi(x_0) \\ (\varphi \circ F)(1, s) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x_0) \end{array} \right.$$

つまり, $\varphi \circ F$ は $\varphi \circ f$ から $\varphi \circ f'$ への道ホモトピーである. よって, $\varphi \circ f \sim \varphi \circ f'$ である. 以上より, 写像

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ [f] &\mapsto [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

は well-defined である

Theorem 4.1. 誘導準同型

連続写像 $\varphi : X \rightarrow Y$ に対し, 写像 $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0)), [f] \mapsto [\varphi \circ f]$ は, 群の準同型写像になっている. この φ_* を連続写像 φ から得られる誘導準同型写像という

Proof.

$\forall [f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([fg]) = [\varphi \circ (fg)]$ である. ここで, $\forall t \in [0, 1]$ に対し

$$(\varphi \circ (fg))(t) = \begin{cases} (\varphi \circ f)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\varphi \circ g)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (\varphi \circ f)(\varphi \circ g)(t) \quad (16)$$

つまり, $\varphi \circ (fg) = (\varphi \circ f)(\varphi \circ g)$ である. よって

$$\varphi_*([f][g]) = [\varphi \circ (fg)] = [(\varphi \circ f)(\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\varphi_*([g]) \quad (17)$$

□

Remark 4.1.

- 恒等写像 $id_X : X \rightarrow X$ に対し, その誘導準同型 $(id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ は恒等写像である. つまり, $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- 連続写像 $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ について $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, (\psi \circ \varphi)(x_0))$. つまり, 合成写像の誘導準同型は, 誘導準同型の合成である

Corollary 4.1. 基本群の位相不変性

写像 $\varphi : X \rightarrow Y$ が同相写像ならば, $\forall x_0 \in X$, 誘導準同型 $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ は群の同型写像になる

Proof.

$\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ が存在して連続なので, 誘導準同型 $(\varphi^{-1})_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ が考えられる. そして, $\begin{cases} (\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)} \\ \varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y, \varphi(x_0))} \end{cases}$. よって, 準同型 φ_* は逆像 $(\varphi^{-1})_*$ をもつので, 全単射となり, 同型写像である $\square$

Corollary 4.2.

X と Y が弧状連結な位相空間であるとき, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ ならば, $X \cong Y$

4.2 ホモトピーと基本群

Theorem 4.2.

連続写像 $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ に対し, φ から ψ へのホモトピー $H : X \times I \rightarrow Y$ が存在するとする. このとき, $x_0 \in X$ とし, $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ を $\gamma(t) = H(x_0, t)$ で定めると

$$\begin{cases} \text{誘導準同型 } \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ \text{誘導準同型 } \psi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x_0)) \\ \text{同型写像 } \gamma_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x_0)) \end{cases} \implies \psi_* = \gamma_* \circ \varphi_*$$

Proof.

$\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対し, $\psi_*([f]) = [\psi \circ f], (\gamma_* \circ \varphi_*)([f]) = \gamma_*([\varphi \circ f]) = [(\bar{\gamma}(\varphi \circ f))\gamma]$. よって, $(\bar{\gamma}(\varphi \circ f))\gamma \sim \psi \circ f$ を示せば良い

$$G(t, s) = \begin{cases} H(x_0, 1 - 4t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{4} \\ H\left(f\left(\frac{4}{1+3s}\left(t - \frac{1-s}{4}\right)\right), s\right) & \frac{1-s}{4} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ H(x_0, 2t - 1) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ と定めると, } G \text{ は well-defined}$$

で貼り合わせ補題より連続である. さらに, G は $(\bar{\gamma}(\varphi \circ f))\gamma$ から $\psi \circ f$ への道ホモトピーになっている $\square$

Theorem 4.3.

位相空間 X, Y に対し, $\varphi : X \rightarrow Y$ がホモトピー同値写像であるとき, $\forall x \in X$ に対して, 誘導準同型 $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ は同型写像

Proof.

$\varphi : X \rightarrow Y$ はホモトピー同値写像だから, $\exists \psi : Y \rightarrow X, s.t. \begin{cases} \psi \circ \varphi \sim id_X \\ \varphi \circ \psi \sim id_Y \end{cases}$ である. $\forall x_0 \in X$

を固定する. $\psi \circ \varphi \sim id_X$ より, $id_X(x_0)$ から $(\psi \circ \varphi)(x_0)$ への X 上の道 γ が存在し

$$(\psi \circ \varphi)_* = \gamma_* \circ (id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0)) \quad (18)$$

から, $\psi_* \circ \varphi_* = \gamma_*$. ここで, γ_* は同型写像だから, $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ は単射である. 同様に, $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0))$ は全射である. $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ より, $\varphi(x_0) \in Y$ に対して同様に, $\varphi_* \circ \psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(Y, (\varphi \circ \psi \circ \varphi)(x_0))$ は同型写像である. したがって, $\psi_* : \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, (\psi \circ \varphi)(x_0))$ は単射である. よって, $(\varphi_*)^{-1}$ が存在して同型写像である. このとき, $\varphi_* = (\psi_*)^{-1} \circ \gamma_*$ であるから, φ_* は同型写像である $\square$

Corollary 4.3.

位相空間 X, Y が弧状連結なとき

$$X \cong Y \implies X \simeq Y \implies \forall x_0 \in X, \forall y_0 \in Y, \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

Corollary 4.4.

位相空間 X, Y が弧状連結なとき, $\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(Y, y_0) \implies X \not\cong Y$

5 基本群の計算

5.1 四つのテクニック

基本群はホモトピー不変で、ホモトピー同値写像が基本群の間の同型写像を誘導する

Theorem 5.1.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ に対し、 $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ となる。特に、道 $f : [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ を考えると、 $[f]$ は $\pi_1(S^1, 1)$ の生成元である

Theorem 5.2.

位相空間 X, Y とその任意の基点 $x_0 \in X, y_0 \in Y$ について、写像

$$\begin{aligned} \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto (p_*([f]), q_*([f])) \end{aligned}$$

は同型写像。ただし、 $p : X \times Y \rightarrow X, q : X \times Y \rightarrow Y$ はそれぞれ射影

Proof.

$\Phi := p_* \times q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ とし、 $\Phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([p \circ f], [q \circ f])$ とする。 $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ に対し、 $f, g : I \rightarrow X \times Y$ を $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = (x_0, y_0)$ をみたす Loop とする。このとき、 $[f][g] = [fg] = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

と定める。すると

$$\Phi([f][g]) = (p_*([f][g]), q_*([f][g])) \quad (19)$$

$$= ([p \circ f][p \circ g], [q \circ f][q \circ g]) \quad (20)$$

$$= ([p \circ f], [q \circ f])([p \circ g], [q \circ g]) \quad (21)$$

$$= \Phi([f])\Phi([g]) \quad (22)$$

ゆえに、 Φ は群の準同型である。次は Φ が全単射を示せば良い

$\Psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ を $\Psi([\alpha], [\beta]) = [(\alpha, \beta)]$ と定める。ここで、 $(\alpha, \beta) : I \rightarrow X \times Y$ は $(\alpha, \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ である。 $(\alpha, \beta)(0) = (\alpha(0), \beta(0)) = (x_0, y_0)$ であり、 $(\alpha, \beta)(1) = (\alpha(1), \beta(1)) = (x_0, y_0)$ であるから、 (α, β) は (x_0, y_0) を基点とする Loop である

$[\alpha] = [\alpha'], [\beta] = [\beta']$ とすると、 $[(\alpha, \beta)] = [(\alpha', \beta')]$ で、 $[\alpha] = [\alpha']$ であるから、 $\exists H : I \times I \rightarrow X$ が連続で、 $H(t, 0) = \alpha(t), H(t, 1) = \alpha'(t)$ 、同様に、 $[\beta] = [\beta']$ であるから、 $\exists K : I \times I \rightarrow Y$ が連続で、 $K(t, 0) = \beta(t), K(t, 1) = \beta'(t)$ である。このとき、 $L : I \times I \rightarrow X \times Y$ を $L(t, s) := (H(t, s), K(t, s))$ と定めると、 L は連続で、 $L(t, 0) = (\alpha(t), \beta(t)), L(t, 1) = (\alpha'(t), \beta'(t))$ である。さらに、 $L(0, s) = L(1, s) = (x_0, y_0)$ であるから、 $(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta')$ である。よって、 Ψ は well-defined である

$\forall ([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ に対し、 $(\Phi \circ \Psi)([\alpha], [\beta]) = \Phi([(\alpha, \beta)]) = ([p \circ (\alpha, \beta)], [q \circ (\alpha, \beta)])$ 。ここで、 $p(\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t), q(\alpha(t), \beta(t)) = \beta(t)$ であるから、 $(\Phi \circ \Psi)([\alpha], [\beta]) = ([\alpha], [\beta])$ である。よって、 $\Phi \circ \Psi = id_{\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)}$ である

逆に、 $\forall [f] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ に対し、 $(\Psi \circ \Phi)([f]) = \Psi([p \circ f], [q \circ f]) = [(p \circ f, q \circ f)]$ である。ここで、 $\forall t \in I, p(f(t)) = x(t), q(f(t)) = y(t)$ であるから、 $((p \circ f)(t), (q \circ f)(t)) = (x(t), y(t)) = f(t)$ である。よって、 $(p \circ f, q \circ f) = f$ である。したがって、 $(\Psi \circ \Phi)([f]) = [f]$ である

以上より、 Φ は全単射である。よって、 Φ は同型写像である $\square$

階数 k の自由群 $F_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ を $a_1, \dots, a_k$ を生成元とする群とする

- F_k の元は, $2k$ 個の文字 $a_1, \dots, a_k, a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}$ からなる有限文字列のこと. ただし, $a_i a_i^{-1}$ や $a_i^{-1} a_i$ を有限回加えたり取り除いたりして移り合う word を同じ word とし, 文字が一つもない状況も一つの word と考え, 1 で表す.
- F_k での積を, 「二つの word を並べて繋げる」と定める. すると, この積は F_k で閉じていて, 結合法則を満たし, $1 \in F_k$ を単位元とし, 任意の元 $a_{\sigma_1}^{\varepsilon_1} \cdots a_{\sigma_m}^{\varepsilon_m} \in F_k$ に対し, $a_{\sigma_m}^{-\varepsilon_m} \cdots a_{\sigma_1}^{-\varepsilon_1} \in F_k$ がその逆元となる. よって, F_k は群になり, 階数 k の自由群という

例として, 階数 0 の自由群 $\langle \rangle$ は自明群 $\{1\}$ であり, 階数 1 の自由群 $\langle a \rangle$ は無限巡回群 ($\cong \mathbb{Z}$) である

自由群 $F_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ の元 (つまり word) $r_1, \dots, r_l$ に対し, $\langle a_1, \dots, a_k : r_1, \dots, r_l \rangle$ の元は文字 $a_1, \dots, a_k, a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}$ からなる word である. ただし, $a_i a_i^{-1}$ や $a_i^{-1} a_i$ を有限回加えたり取り除いたりして移り合う word を同じ word とし, 積は, 二つの word を並べて繋げることだけ

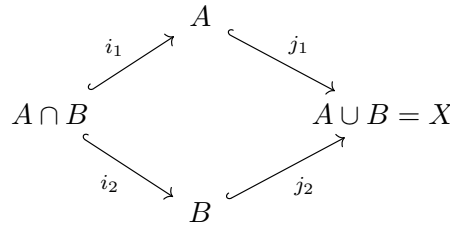
Definition 5.1. 群の表示

群 G に対し, 文字 $a_1, \dots, a_k$ と, これらの文字による word $r_1, \dots, r_l$ を上手く選んで, $G \cong \langle a_1, \dots, a_k : r_1, \dots, r_l \rangle$ となるときの, 同型写像を一つ固定して, $G = \langle a_1, \dots, a_k : r_1, \dots, r_l \rangle$ を群 G の表示といい, $a_1, \dots, a_k$ を, その表示における G の生成系 (a_i は生成元である) $r_1, \dots, r_l$ を, その表示における G の関係子であり, $r_1 = 1, \dots, r_l = 1$ を, その表示における G の関係式という

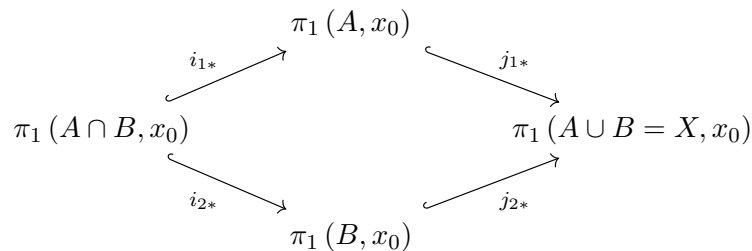
弧状連結な位相空間 X を, 次のように A, B に分割する:

- $A \cup B = X$
- A, B はともに X の開集合
- $A, B, A \cap B$ は全て弧状連結

このとき, 次のように包含写像 i_1, i_2, j_1, j_2 を用意する



すると, $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2 : A \cap B \hookrightarrow X$. よって, 基点 x_0 を $A \cap B$ の中に選ぶと, 誘導準同型



が作れ, $j_{1*} \circ i_{1*} = j_{2*} \circ i_{2*} : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

Theorem 5.3. van Kampen の定理

X, A, B がこの分割をみたすであるとし, $x_0 \in A \cap B$ とし, i_1, i_2, j_1, j_2 を前述のような包含写

像とする. このとき,
$$\begin{cases} \pi_1(A \cap B, x_0) = \langle x_1, \dots, x_m : y_1 = 1, \dots, y_n = 1 \rangle \\ \pi_1(A, x_0) = \langle a_1, \dots, a_k : r_1 = 1, \dots, r_l = 1 \rangle \\ \pi_1(B, x_0) = \langle b_1, \dots, b_p : s_1 = 1, \dots, s_q = 1 \rangle \end{cases} \quad \text{と表示できるなら}$$

$$\pi_1(X, x_0) = \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_p : r_i = 1, s_j = 1, i_{1*}(x_1) = i_{2*}(x_1), \dots, i_{1*}(x_m) = i_{2*}(x_m) \rangle \quad (23)$$

と表示される. $\pi_1(X, x_0)$ との同一視は j_{1*}, j_{2*} による自然な対応が同型となり, その同型により同一視する

Example 5.1.

$\mathbb{R}^n, [0, 1]^n, D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ はみな可縮であるから, $\cong \{p\}$. よって, π_1 (これらそれぞれ) $\cong \pi_1(\{p\}, p) = \{\varepsilon_p\} \cong \{1\}$

Definition 5.2. 単連結・1-連結

- 位相空間 X は単連結であるとは, $\forall x_0 \in X$ に対し, $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$
- 位相空間 X は1-連結であるとは, X が弧状連結であり, かつ $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$

Remark 5.1.

可縮 $\implies$ 1-連結 $\implies$ 単連結, 可縮 $\not\Leftarrow$ 1-連結 $\not\Leftarrow$ 単連結

Example 5.2.

円筒, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus (x\text{軸})$, メビウスの帯

これら全て S^1 とホモトピー同値であるから, π_1 (これらそれぞれ, $*$) $\cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

Example 5.3. トーラス T^2 の基本群

$T^2 = S^1 \times S^1$ であるから

$$\pi_1(T^2, *) = \pi_1(S^1 \times S^1, *) \quad (24)$$

$$\cong \pi_1(S^1, *) \times \pi_1(S^1, *) \quad (25)$$

$$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (26)$$

Example 5.4. $n \geq 2$ のとき, $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ とすると, $\pi_1(S^n, *) \cong \{1\}$

Proof.

$$D_+^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2} \right\}, D_-^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2} \right\} \quad \text{とすると, } D_+^n, D_-^n$$

は S^n の開集合で, $D_+^n \cup D_-^n = S^n$ であり, $D_+^n, D_-^n, D_+^n \cap D_-^n$ はともに弧状連結である. ($D_+^n \cap D_-^n \simeq S^{n-1}$ であり, $n \geq 2$ だから). ここで, D_+^n も D_-^n も可縮であるから,

$\pi_1(D_+^n, *) \cong \pi_1(D_-^n, *) \cong \{1\}$. つまり, 表示 $\begin{cases} \pi_1(D_+^n, *) = \langle \rangle \\ \pi_1(D_-^n, *) = \langle \rangle \end{cases}$ をもつ. よって, van Kampen の定理より, $\pi_1(S^n, *) = \langle \rangle \cong \{1\}$ である $\square$

Example 5.5. S^1 の k 個のブーケ $\bigvee_{i=1}^k S_i^1$ ($S_i^1 \cong S^1$) の基本群

$\bigvee_{i=1}^k S_i^1$ は k 個の S^1 を一点 ($*$ としよう) でくっつけたもので, $\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^k S_i^1, *\right) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$.
つまり, 階数 k の自由群である. (α_1 は S_i^1 の一周に対応)

Proof.

$k = 1$ のとき, $\pi_1 \left(\bigvee_{i=1}^k S_i^1, * \right) = \pi_1 (S^1, *) = \langle \alpha_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ となり, 成立

$k = n$ のとき成立するとすると, $\pi_1 \left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1, * \right) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. ここで, $\bigvee_{i=1}^{n+1} S_i^1$ を A, B に分割する. すると, A も B も $\bigvee_{i=1}^{n+1} S_i^1$ の開集合, $A \cup B = \bigvee_{i=1}^{n+1} S_i^1$ で, $A, B, A \cap B$ は弧状連結. また, $\bigvee_{i=1}^n S_i^1$ は A の強変形レトラクト, S_{n+1}^1 は B の強変形レトラクトであるから, $\{*\}$ は $A \cap B$ の

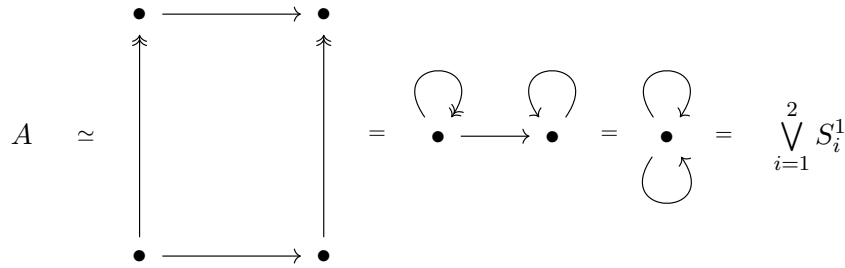
強変形レトラクトである. よって,
$$\begin{cases} \pi_1 (A \cap B, *) = \langle \rangle \\ \pi_1 (A, *) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \\ \pi_1 (B, *) = \langle \alpha_{n+1} \rangle \end{cases}$$

よって, van Kampen の定理より, $\pi_1 \left(\bigvee_{i=1}^{n+1} S_i^1, * \right) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \rangle$ である. 以上により,

$\forall k \in \mathbb{N}, \pi_1 \left(\bigvee_{i=1}^k S_i^1, * \right) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ である $\square$

Example 5.6. 二次元トーラス T^2 の基本群

$T^2 = A \cup B$ とわけて, A を円盤 D を除いた $T^2 \setminus \bar{D}$ とし, B を円盤 $\bar{D}$ を含む開円盤 $\tilde{D}$ とする. すると, A, B は T^2 の開集合で, $A \cup B = T^2$ であり, $A, B, A \cap B$ は弧状連結である. また



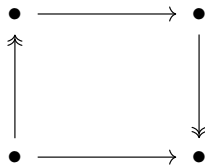
よって, $\pi_1 (A, x_0) = \langle a, b \rangle$. ここで, a, b はそれぞれ上図の上半 Loop と下半 Loop に対応する. また, $B \simeq \{x_0\}$ であるから, $\pi_1 (B, x_0) = \langle \rangle$ である. $A \cap B \simeq x_0$ を基点とするブーケ (強変形レトラクト) であるから, $\pi_1 (A \cap B, x_0) = \langle c \rangle$ である. 包含写像 $i_1 : A \cap B \hookrightarrow A$ を考えると, $i_{1*}(c) = i_{1*}([f]) = [i_1 \circ f] = aba^{-1}b^{-1}$, 包含写像 $i_2 : A \cap B \hookrightarrow B$ を考えると, $\pi_1 (B, x_0) = \langle \rangle$ より, $i_{2*}(c) = 1$ である. よって, van Kampen の定理より

$$\pi_1 (T, x_0) = \langle a, b : aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \quad (27)$$

$$= \langle a, b : ab = ba \rangle = \langle a^m b^n : m, n \in \mathbb{Z} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (28)$$

Example 5.7. クラインボトル K の基本群

$K = A \cup B$ とわけて, B はそのまま, A を次のように貼られた前の図形から円盤 $\bar{D}$ 分ければ, $\pi_1 (K, *) = \langle a, b : a = bab \rangle$ である



Example 5.8. 実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の基本群

$\mathbb{R}P^2 = A \cup B$ とわけて, A は開メビウスの帯とし, B を円盤 D^2 の内部である開円盤とする. このとき, A は強変形レトラクトで S^1 になり, B は可縮で, 点にホモトピー同値であるか

ら, $\begin{cases} \pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z} = \langle a \rangle \\ \pi_1(B, x_0) \cong \{1\} = \langle \rangle \\ \pi_1(A \cap B, x_0) \cong \pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z} = \langle c \rangle \end{cases}$ となり, 包含写像 $i_1 : A \cap B \hookrightarrow A$ を考えると,
 $i_{1*}(c) = i_{1*}([f]) = [i_1 \circ f] = a^2$, 包含写像 $i_2 : A \cap B \hookrightarrow B$ を考えると, $\pi_1(B, x_0) = \langle \rangle$ より,
 $i_{2*}(c) = 1$ である. よって, van Kampen の定理より

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) = \langle a : a^2 = 1 \rangle \quad (29)$$

$$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (30)$$

5.2 基本群の応用

Proposition 5.1.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ は, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ のレトラクトではない. つまり, 連続写像 $r : D^2 \rightarrow S^1$ で, $r|_{S^1} = id_{S^1}$ となるものは存在しない

Proof.

もし $r|_{S^1} = id_{S^1}$ となる連続写像 $r : D^2 \rightarrow S^1$ が存在するとすると, 包含写像 $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$ に対し, $r \circ \iota : id_{S^1}$ となる. $1 \in S^1 \subset D$ を基点とした基本群を考えると, ι も r も連続だから, $r_* \circ \iota_* = id_{S^1*} : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ は恒等写像で, 特に全単射である. したがって, $r_* : \pi_1(D^2, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ は全射が, $\pi_1(D^2, 1) \cong \{1\}, \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ より, 矛盾. よって, $r|_{S^1} = id_{S^1}$ となる連続写像 $r : D^2 \rightarrow S^1$ は存在しない $\square$

Proposition 5.2. Brouwer の不動点定理

任意の連続写像 $f : D^2 \rightarrow D^2$ は不動点をもつ. つまり, $f(x_0) = x_0$ となる $x_0 \in D^2$ が存在する

Proof.

もし, ある連続写像 $f : D^2 \rightarrow D^2$ が不動点をもたないとする, $\forall x \in D^2, f(x) \neq x$ である. そこで, $\forall x \in D^2, r(x) \in S^1$ を「 $f(x)$ から, x への射線上のある点まで」のように定めることができる. このとき, $r : D^2 \rightarrow S^1$ は連続で, $\forall x \in S^1, r(x) = x$ となるので, $r : D^2 \rightarrow S^1$ は S^1 へのレトラクトである. 矛盾 $\square$

6 S^1 の基本群

Definition 6.1. 持ち上げ

X, Y, Z を位相空間とし, $\pi: Y \rightarrow X$ を全射連続写像とする. また, $f: Z \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき, 写像 $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$ が, f の Y への持ち上げであるとは, $\tilde{f}$ は連続写像であって, $\pi \circ \tilde{f} = f$ である

Theorem 6.1.

全射連続写像 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($x \mapsto e^{2\pi i x}$) について, 任意の連続写像 $\begin{cases} f: [0, 1] \rightarrow S^1 \\ F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \end{cases}$ は, それぞれ $\mathbb{R}$ への持ち上げをもつ

Lemma 6.1. ルベーク数の存在

X をコンパクト距離空間とすると, X の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $\exists \delta > 0, s.t.$ 直径 $d < \delta$ となる $\forall A \subset X, A \subset U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する

Corollary 6.1.

$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($x \mapsto e^{2\pi i x}$) を考えるとき, 道 $f, f': [0, 1] \rightarrow S^1$ の $\mathbb{R}$ への持ち上げ $\tilde{f}, \tilde{f}': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$\begin{cases} f \sim f' \\ \tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) \end{cases} \implies \tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1) \quad (31)$$

Proof.

f から f' への道ホモトピーを $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \rightarrow S^1$ とすると, F は連続で

$$\forall t, s \in [0, 1], \begin{cases} F(t, 0) = f(t) \\ F(t, 1) = f'(t) \\ F(0, s) = f(0) = f'(0) \\ F(1, s) = f(1) = f'(1) \end{cases} \quad \text{ここで, } F \text{ の持ち上げ } \tilde{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ を考え,}$$

必要な整数分をずらして, $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0)$ として良い. このとき

- $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}} = f$ の $\tilde{f}(0)$ から始まる持ち上げ $= \tilde{f} \Rightarrow \tilde{F}(1, 0) = \tilde{f}(1)$
- $\tilde{F}|_{\{1\} \times [0,1]} = \varepsilon_{f(1)}$ の $\tilde{f}(1)$ から始まる持ち上げ $= \varepsilon_{\tilde{f}(1)} \Rightarrow \tilde{F}(1, 1) = \tilde{f}(1)$
- $\tilde{F}|_{\{0\} \times [0,1]} = \varepsilon_{f(0)}$ の $\tilde{f}(0)$ から始まる持ち上げ $= \varepsilon_{\tilde{f}(0)} \Rightarrow \tilde{F}(0, 1) = \tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0)$
- $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{1\}} = f'$ の $\tilde{f}'(0)$ から始まる持ち上げ $= \tilde{f}' \Rightarrow \tilde{F}(1, 1) = \tilde{f}'(1)$

以上より, $\tilde{f}(1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{f}'(1)$ □

Theorem 6.2. S^1 の基本群

$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ であり, $f_1: [0, 1] \rightarrow S^1$ を $f_1(t) = e^{2\pi i t}$ で定めると, $[f_1]$ は $\pi_1(S^1, 1)$ の生成元

Proof.

全射連続写像 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($x \mapsto e^{2\pi i x}$) を用意する. $1 \in S^1$ を基点とする S^1 上の任意の Loop $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ に対し, $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ により, $\tilde{f}(0) = 0$ となる f の持ち上げを表すこととする. このとき, $\pi(\tilde{f}(1)) = f(1) = 1$ より, $\tilde{f}(1) \in \pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ である. 今, $f \sim f'$ とすると, $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$ である. よって, 写像 $\varphi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ($[f] \mapsto \tilde{f}(1)$) は well-defined である $\forall m \in \mathbb{Z}, f_m: [0, 1] \rightarrow S^1$ を $f_m(t) = e^{2\pi i m t}$ で定めると, f_m は S^1 上の 1 を基点とする Loop である. そして, $\tilde{f}_m(0) = 0$ となる f_m の持ち上げは $\tilde{f}_m(t) = mt$ ($\forall t \in [0, 1]$) で与えられる. したがって, $\varphi([f_m]) = \tilde{f}_m(1) = m$ である. よって, φ は全射である

$\forall [f], [g] \in \pi_1(S^1, 1), \varphi([f][g]) = \varphi([f]) + \varphi([g])$ であることを示す. ここで, $\varphi([f][g]) = \varphi([fg]) = \widetilde{fg}(1), \varphi([f]) + \varphi([g]) = \widetilde{f}(1) + \widetilde{g}(1)$ である. $\widetilde{f}(1) = m \in \mathbb{Z}$ とすると, $\widetilde{g} + m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} (t \mapsto \widetilde{g}(t) + m)$ も g の持ち上げで

$$(\widetilde{g} + m)(0) = \widetilde{g}(0) + m \quad (32)$$

$$= 0 + m = m = \widetilde{f}(1) \quad (33)$$

となるので, $\mathbb{R}$ 上の道 $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g} + m$ との積 $\widetilde{f}(\widetilde{g} + m) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が考えられる. この道 $\widetilde{f}(\widetilde{g} + m)$ は S^1 上の道 fg の持ち上げで, $\widetilde{f}(\widetilde{g} + m)(0) = \widetilde{f}(0) = 0$ となる. よって, $\widetilde{fg} = \widetilde{f}(\widetilde{g} + m)$ である. したがって

$$\varphi([f][g]) = \varphi([fg]) \quad (34)$$

$$= \widetilde{fg}(1) \quad (35)$$

$$= \left(\widetilde{f}(\widetilde{g} + m) \right)(1) \quad (36)$$

$$= \widetilde{g}(1) + m \quad (37)$$

$$= \widetilde{g}(1) + \widetilde{f}(1) = \varphi([f]) + \varphi([g]) \quad (38)$$

以上より, φ は準同型写像である

$\forall [f] \in \text{Ker} \varphi, \widetilde{f}(1) = 0$ より, $\widetilde{f}$ は $\mathbb{R}$ 上の0を基点とする Loop である. $\mathbb{R}$ は単連結であるから, $\widetilde{f}$ から定値道 ε_0 への道ホモトピー $\widetilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. このとき, $\pi \circ \widetilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ は明らかに f から定値道 ε_1 への道ホモトピーである. よって, $[f] = [\varepsilon_1] = 1 \in \pi_1(S^1, 1)$ で, $\text{Ker} \varphi = \{1\}$ となり, φ は単射である

以上から, 写像 $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ は同型写像であり, $f_1 : [0, 1] \rightarrow S^1$ を $t \mapsto e^{2\pi i t}$ の道ホモトピー類 $[f]$ が $\pi_1(S^1, 1)$ の生成元である $\square$

Remark 6.1.

全射連続写像 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 (x \mapsto e^{2\pi i x})$ において

- $\left\{ \begin{array}{l} \forall f : [0, 1] \xrightarrow{\text{continuous}} S^1 \\ \forall F : [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{\text{continuous}} S^1 \end{array} \right.$ が $\mathbb{R}$ への持ち上げられた
- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{の持ち上げ} \\ F \text{の持ち上げ} \end{array} \right.$ は $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{の行き先} \\ (0, 0) \text{の行き先} \end{array} \right.$ を $\left\{ \begin{array}{l} \pi^{-1}(f(0)) \\ \pi^{-1}(F(0, 0)) \end{array} \right.$ の中から自由選べた
- $\left\{ \begin{array}{l} f \text{の持ち上げ} \\ F \text{の持ち上げ} \end{array} \right.$ は $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{の行き先} \\ (0, 0) \text{の行き先} \end{array} \right.$ を決めると写像として一つに定まった

これらにより, $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi^{-1}(1)$ が作れた

- $\pi^{-1}(1)$ が自然に群になっており, φ は準同型
- $\mathbb{R}$ が弧状連結 $\implies \varphi$ は全射
- $\mathbb{R}$ が単連結 $\implies \varphi$ は単射

これらにより, φ は群の同型写像

Remark 6.2.

- S^1 には特別な開被覆 $\{U_+, U_-\}$ が存在して

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^{-1}(U_+) \text{は} U_+ \text{と同相な} \mathbb{R} \text{の開集合} V_+^n \text{たちの非交和} \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_+^n \\ \pi^{-1}(U_-) \text{は} U_- \text{と同相な} \mathbb{R} \text{の開集合} V_-^n \text{たちの非交和} \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_-^n \end{array} \right.$$
 が同相写像

$$\text{で, } \forall n \in \mathbb{Z}, \left\{ \begin{array}{l} \pi|_{V_+^n} : V_+^n \rightarrow U_+ \\ \pi|_{V_-^n} : V_-^n \rightarrow U_- \end{array} \right.$$

- $[0, 1], [0, 1] \times [0, 1]$ はコンパクト距離空間で, 任意の開被覆に対してルベグ数が存在するので, 基本群を考えるなら, 写像は常に $[0, 1]$ や $[0, 1] \times [0, 1]$

7 被覆空間

7.1 被覆空間の定義

Definition 7.1. 均等に覆われている開集合

$X, \tilde{X}$ を位相空間とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を連続写像とする. X の空でない開集合 U が p によって均等に覆われているとは, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ と書け (V_i は $\tilde{X}$ の開集合), $\forall i \in I, p|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ が同相写像となることをいう

Remark 7.1.

U が p によって均等に覆われているなら, $A \subset U$ となる $\tilde{X}$ の空でない任意の開集合 A も p によって均等に覆われている

Definition 7.2. 被覆

$X, \tilde{X}$ を位相空間とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき, $(\tilde{X}, p, X)$ が被覆であるとは, p によって均等に覆われている X の開集合のみで, X の開被覆が作れること. 言い換えれば, $\forall x \in X, \exists x \in U \subset X$ が開近傍で, s.t. U は p によって均等に覆われているような X の開集合

Definition 7.3. 被覆空間・底空間・被覆写像

$(\tilde{X}, p, X)$ が被覆であるとき

- 位相空間 $\tilde{X}$ を X の被覆空間という
- 位相空間 X をこの被覆の底空間という
- 写像 p を, この被覆の被覆写像という

Remark 7.2.

被覆空間は, その被覆の全空間ともいい, 被覆写像は, その被覆の射影ともいう. 定義より, 被覆写像は全射連続写像になる

Example 7.1.

$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($x \mapsto e^{2\pi i x}$) は被覆である

Example 7.2.

$\forall n \in \mathbb{N}, p_n: S^1 \rightarrow S^1$ ($z \mapsto z^n$) は被覆である

$U_+ = S^1 \setminus \{-1\}, U_- = S^1 \setminus \{1\}$ とすると, U_+, U_- は p_n により均等に覆われている S^1 の開集合となっている

7.2 被覆空間の基本性質

Theorem 7.1. 道のホモトピー持ち上げ定理

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆であるとき

- 任意の道 $f: [0, 1] \rightarrow X$ に対し, 点 $a \in p^{-1}(f(0))$ を任意に指定すると, $\tilde{f}(0) = a$ となる f の持ち上げ $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が一意に存在する
- 任意の連続写像 $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ に対し, 点 $a \in p^{-1}(F(0, 0))$ を任意に指定すると, $\tilde{F}(0, 0) = a$ となる F の持ち上げ $\tilde{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が一意に存在する

Proof. 被覆 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ($x \mapsto e^{2\pi i x}$) のときと全く同様 □

Corollary 7.1. モノドロミー定理

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆であるとき, X 上の二つの道 $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ と, その持ち上げ $\tilde{f}, \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ について, $\begin{cases} f \sim g \\ \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) \end{cases} \implies \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$

Proposition 7.1.

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆であるとき, 任意の点 $x_0 \in X$ を選び, $p^{-1}(x_0)$ から任意の点 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ を選ぶと, 写像 $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ ($[f] \mapsto \tilde{f}(1)$) は well-defined で

- $\tilde{X}$ が弧状連結 $\implies \varphi$ は全射
- $\tilde{X}$ が単連結 $\implies \varphi$ は単射

Proof.

- $\forall \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ に対し, $\tilde{X}$ の弧状連結性より, $\tilde{x}_0$ から $\tilde{x}$ への道 $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が存在する. このとき, $p \circ \tilde{f}: [0, 1] \rightarrow X$ は $x_0 \in X$ を基点とする X 上の Loop で, $\tilde{f}$ は $\tilde{x}_0$ を始点とする $p \circ \tilde{f}$ の持ち上げになっている. よって, $[p \circ \tilde{f}] \in \pi_1(X, x_0)$ に対し, $\varphi([p \circ \tilde{f}]) = \tilde{f}(1) = \tilde{x}$
- $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ を $\varphi([f]) = \varphi([g])$ となるものとする, $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$ となる f, g の持ち上げ $\tilde{f}, \tilde{g}$ に対し, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ となる. このとき, 道の積 $\tilde{f}\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ は $\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ 上の Loop である. $\tilde{X}$ が単連結であるから, $\tilde{f}\tilde{g} \sim \varepsilon_{\tilde{x}_0}$ である. よって

$$(\tilde{f}\tilde{g}) \sim \varepsilon_{\tilde{x}_0} \sim \tilde{g} \quad (39)$$

となり, また, 一方で $(\tilde{f}\tilde{g}) \sim \tilde{f}(\tilde{g}\tilde{g}) \sim \tilde{f}\varepsilon_{\tilde{g}(1)} \sim \tilde{f}$ である. したがって, $\tilde{f} \sim \tilde{g}$. よって, $\tilde{f}$ から $\tilde{g}$ への道ホモトピー $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が存在する. このとき, $p \circ F$ が f から g への道ホモトピーである. よって, $[f] = [g]$ となり, φ は単射である

□

Remark 7.3.

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆で, $\tilde{X}$ が 1-連結であるとき, 任意の点 $x_0 \in X$ を選び, また, $p^{-1}(x_0)$ から任意の点 $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ を選ぶと, 写像 $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ ($[f] \mapsto \tilde{f}(1)$) は well-defined で全単射である

Definition 7.4. 普遍被覆・普遍被覆空間

弧状連結な位相空間 X に対して, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆で, $\tilde{X}$ が 1-連結であるとき, 被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の普遍被覆といい, $\tilde{X}$ を X の普遍被覆空間という

7.3 被覆空間の典型例**Definition 7.5. 群の連続な作用**

群 G が位相空間 X に左から連続に作用する ($G \curvearrowright X$) とは, 写像 $\theta: G \times X \rightarrow X$ が与えられて, $\theta(g, x)$ を $g \cdot x$ と書くことにすると, 以下をみたす:

- $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 g_1) \cdot x$
- 単位元 $1 \in G, \forall x \in X$ に対し, $1 \cdot x = x$
- $\forall g \in G, \theta_g: X \rightarrow X$ ($x \mapsto g \cdot x$) とすると, θ_g は連続写像

Remark 7.4.

- G に離散位相が入っていると思えば, 条件 (3) $\iff \theta$ が連続写像
- G が位相群 (または Lie 群) のとき, (3) の代わりに θ が連続 (または C^∞ -map とする)

- (1)(2) により, $\theta_g : X \rightarrow X$ に対し, $\theta_{g^{-1}} : X \rightarrow X$ ($x \mapsto g^{-1} \cdot x$) は逆写像 (つまり, $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$). よって, (3) により, $\forall g \in G, \theta_g : X \rightarrow X$ は同相写像
- 右からの連続な作用 $X \curvearrowright G$ は, $\theta : X \times G \rightarrow X$ で, 次をみたす:
 - $\forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G, (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$
 - 単位元 $1 \in G, \forall x \in X$ に対し, $x \cdot 1 = x$
 - $\forall g \in G, \theta_g : X \rightarrow X$ ($x \mapsto x \cdot g$) とすると, θ_g は連続写像
- 左からの作用 $\theta : G \times X \rightarrow X$ ($(g, x) \mapsto \theta(g, x)$) に対し
 - G がアーベル群の場合, $\theta' : X \times G \rightarrow X$ ($(x, g) \mapsto \theta(g, x)$) とすれば, θ' は右からの連続な作用 (つまり, G がアーベル群の場合, 作用の左右は関係ない)
 - G が一般の群の場合, $\theta'' : X \times G \rightarrow X$ ($(x, g) \mapsto \theta(g^{-1}, x)$) とすれば, θ'' は右からの連続な作用 (つまり, G が一般の群の場合でも, 左からの作用と右からの作用が自然に対応している)

Definition 7.6. G -空間・軌道空間

群 G が連続に作用している位相空間を G -空間という

- 群 G が左から作用する G -空間 X において

$$x \sim x' \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G, \text{s.t. } g \cdot x = x' \text{ としたときの商空間を, この作用による軌道空間とい$$

い, $G \backslash X$ で表す

- 群 G が右からの作用する G -空間 X においては, 軌道空間を X/G で表す

Definition 7.7. 自由かつ真性不連続な作用

群 G が位相空間 X に (左から) 連続に作用しているとき, G の X への作用が自由かつ真性不連続であるとは

$$\forall x \in X, x \in \exists V \subset X, \text{s.t. } g_1 \neq g_2 \in G \implies g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V = \emptyset$$

Theorem 7.2.

X を G -空間とする. この G の X への作用が自由かつ真性不連続であるとき, 商写像 $\pi : X \rightarrow X/G$ ($x \mapsto [x]$) は被覆写像である

Proof.

$\forall y_0 \in X/G$ とすると, $\exists x_0 \in X, \text{s.t. } p(x_0) = y_0$ である. G の X への作用が自由かつ真性不連続であるから, $x_0 \in \bigcup_{\text{open}} V \subset X, \text{s.t. } g_1 \neq g_2 \in G \implies g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V = \emptyset$ である. ここで, $U = p(V)$ とすると, $y_0 \in U$ であり

$$p^{-1}(U) = \{x \in X : p(x) \in U\} \tag{40}$$

$$= \{x \in X : \exists x' \in V, \text{s.t. } p(x) = p(x')\} \tag{41}$$

$$= \{x \in X : \exists x' \in V, \exists g \in G, \text{s.t. } x = g \cdot x'\} \tag{42}$$

$$= \{x \in X : \exists g \in G, \text{s.t. } x \in g \cdot V\} \tag{43}$$

$$= \left\{ x \in X : \bigcup_{g \in G} g \cdot V \right\} \tag{44}$$

$$= \bigsqcup_{g \in G} g \cdot V = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot V \tag{45}$$

今, $\forall g \in G, \theta_g : X \rightarrow X$ ($x \mapsto g \cdot x$) は同相写像で, V は X の開集合だから, 各 $g \cdot V$ は X の開集合である. したがって, $p^{-1}(U)$ は X の開集合である. よって, U は X/G の開集合. また, $p|_{g \cdot V} : g \cdot V \rightarrow U$ は簡単に同相写像とわかる. 以上より, 商写像 $p : X \rightarrow X/G$ は被覆写像である $\square$

Example 7.3.

$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}$ への作用 $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ (n, x) \mapsto n + x$ は, 明らかに連続で, 自由かつ真性不連続である. よって, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は (普遍) 被覆である. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \ ([x] \mapsto e^{2\pi i x})$ は well-defined で同相写像であるから, 被覆 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は, 被覆 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \ (x \mapsto e^{2\pi i x})$ に他ならない

Example 7.4.

$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ の $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ への作用 $\mathbb{Z}_2 \times S^n \rightarrow S^n \ ((\pm 1, \mathbf{x}) \mapsto \pm \mathbf{x})$ は連続で, 自由かつ真性不連続である. よって, $p: S^n \rightarrow S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$ は被覆. ($n \geq 2$ のとき, 普遍被覆になっている)

Lemma 7.1.

連続な作用 $G \curvearrowright X$ が自由かつ真性不連続であるとき, 被覆 $p: X \rightarrow X/G$ について, $\forall x_0 \in X$ を固定すると, 写像 $\psi_{x_0}: G \rightarrow p^{-1}(p(x_0)) \ (g \mapsto g \cdot x_0)$ は全単射である

Proof.

$\forall x \in p^{-1}(p(x_0)), p(x) = p(x_0)$ だから, $\exists g \in G, s.t. x = g \cdot x_0$ である. よって, ψ_{x_0} は全射である

一方, 仮に $g_1 \neq g_2$ となる $g_1, g_2 \in G$ に対し, $g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0$ となったとする. このとき, x_0 の任意の近傍 V に対し, $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V \ni g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0$ となり, $g_1 \cdot V \cap g_2 \cdot V \neq \emptyset$ となる. これは, G の X への作用が自由かつ真性不連続であることに矛盾する. よって, ψ_{x_0} は単射である $\square$

Lemma 7.2.

連続な作用 $G \curvearrowright X$ が自由かつ真性不連続であるとき, 被覆 $p: X \rightarrow X/G$ について, $\forall x_0 \in X$ を固定すると, 写像 $\varphi_{x_0}: \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow p^{-1}(p(x_0)) \ ([f] \mapsto \tilde{f}(1))$ は well-defined である. ただし, $\tilde{f}$ は x_0 を始点とした f の持ち上げである

Theorem 7.3.

連続な作用 $G \curvearrowright X$ が自由かつ真性不連続であるとき, 被覆 $p: X \rightarrow X/G$ について, $\forall x_0 \in X$ を固定すると

- 写像 $\varphi_{x_0}: \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ は, 群の間の準同型写像
- $\text{Ker } \varphi_{x_0} = p_*(\pi_1(X, x_0))$ となっている. ここで, p_* は p の誘導準同型

Proof.

- $\forall [f_1], [f_2] \in \pi_1(X/G, p(x_0)), \varphi_{x_0}([f_1]) = g_1, \varphi_{x_0}([f_2]) = g_2$ とすると, $\tilde{f}_1(1) = g_1 \cdot x_0, \tilde{f}_2(1) = g_2 \cdot x_0$ となる. 今, $\theta_{g_1}: X \rightarrow X$ を考えると, $\theta_{g_1} \circ \tilde{f}_2$ は $g_1 \cdot x_0$ を始点とする f_2 の持ち上げである. よって, 道の積 $\tilde{f}_1(\theta_{g_1} \circ \tilde{f}_2)$ は x_0 を始点とする $f_1 f_2$ の持ち上げ

$$(\tilde{f}_1(\theta_{g_1} \circ \tilde{f}_2))(1) = (\theta_{g_1} \circ \tilde{f}_2)(1) \quad (46)$$

$$= \theta_{g_1}(\tilde{f}_2(1)) \quad (47)$$

$$= \theta_{g_1}(g_2 \cdot x_0) = (g_1 g_2) \cdot x_0 \quad (48)$$

したがって

$$\varphi_{x_0}([f_1][f_2]) = \varphi_{x_0}([f_1 f_2]) \quad (49)$$

$$= g_1 g_2 = \varphi_{x_0}([f_1]) \varphi_{x_0}([f_2]) \quad (50)$$

以上より, φ_{x_0} は群の間の準同型写像である

- $\forall [f] \in \text{Ker} \varphi_{x_0}, \varphi_{x_0}([f]) = 1$ より, $\tilde{f}(1) = x_0$ となる. よって, $\tilde{f}$ は X 上の Loop であり, 元 $[\tilde{f}] \in \pi_1(X, x_0)$ である. したがって, $\text{Ker} \varphi_{x_0} \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$ である. $\forall [f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$ とすると, $\exists [g] \in \pi_1(X, x_0), s.t. p_*([g]) = [f]$ である. すると, $[p \circ g] = [f]$ である. ここで, g は $p \circ g$ の x_0 を始点とする持ち上げで, $g(1) = x_0 = 1 \cdot x_0$ となり, $\varphi_{x_0}([f]) = \varphi_{x_0}([p \circ g]) = 1 \in G$ である. よって, $[f] \in \text{Ker} \varphi_{x_0}$ である. したがって, $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \text{Ker} \varphi_{x_0}$ も言えた. よって, $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \text{Ker} \varphi_{x_0}$ である

□

Corollary 7.2.

連続な作用 $G \curvearrowright X$ が自由かつ真性不連続であるとき, 被覆 $p: X \rightarrow X/G$ について

- X が弧状連結 $\implies \varphi_{x_0}: \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ は全射準同型
したがって, $\pi_1(X/G, p(x_0))/p_*(\pi_1(X, x_0)) \cong G$
- X が単連結 $\implies \varphi_{x_0}: \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ は単射準同型
- X が 1-連結 $\implies \varphi_{x_0}: \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ は同型. つまり, $\pi_1(X/G, p(x_0)) \cong G$

7.4 被覆空間の基本群・底空間の基本群・被覆変換群

$(\tilde{X}, p, X)$ を被覆とし, $\forall \tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ を固定すると

誘導準同型 $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ ($[f] \mapsto [p \circ f]$) が得られ, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ は $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ の部分群となる

Proposition 7.2.

この誘導準同型 $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ は単射である. したがって, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ は $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ のある部分群と同型

Proof.

$[f_1], [f_2] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ について, $p_*([f_1]) = p_*([f_2])$ となったとすると, $[p \circ f_1] = [p \circ f_2]$ である. よって, $p \circ f_1 \sim p \circ f_2$ である. したがって, $p \circ f_1$ から $p \circ f_2$ への道ホモトピー $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在する. 道のホモトピー持ち上げ定理により, $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$ となる F の持ち上げ $\tilde{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が作れ, この $\tilde{F}$ は f_1 から f_2 への道ホモトピーである. よって, $[f_1] = [f_2]$ となり, p_* は単射準同型である □

Theorem 7.4.

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆で, $\tilde{X}$ が弧状連結であるとき, $\forall x_0 \in X, \tilde{x}_0, \tilde{\tilde{x}}_0 \in p^{-1}(x_0)$ とすると, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ と $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\tilde{x}}_0))$ は $\pi_1(X, x_0)$ において共役な部分群となる. つまり, $\exists [f] \in \pi_1(X, x_0), s.t. [f]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [f] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\tilde{x}}_0))$

Proof.

$\tilde{X}$ が弧状連結であるから, $\tilde{x}_0$ から $\tilde{\tilde{x}}_0$ への道 $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が存在する. このとき, $f = p \circ \tilde{f}$ とすると, f は x_0 を始点とする X 上の Loop である. よって, $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ が考えられる. この元 $[f]$ に対し, $[f]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [f] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\tilde{x}}_0))$ が成り立つことを示す
 $[f]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [f] \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\tilde{x}}_0))$ を示す. $\forall [g] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)), (\tilde{f}g)\tilde{f}$ は $\tilde{\tilde{x}}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ 上の Loop になる. よって, $[(\tilde{f}g)\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{\tilde{x}}_0)$ が考えられる. 一方,

$p \circ ((\widetilde{f}g)\widetilde{f}) = ((p \circ \widetilde{f})(p \circ g))(p \circ \widetilde{f}) = (\widetilde{f}(p \circ g))f$ である。よって

$$[f]^{-1} p_*([g])[f] = [(\widetilde{f}(p \circ g))f] \quad (51)$$

$$= [p \circ ((\widetilde{f}g)\widetilde{f})] \quad (52)$$

$$= p_*([(\widetilde{f}g)\widetilde{f}]) \in p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right) \quad (53)$$

以上より, $[f]^{-1} p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)[f] \subset p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)$ が成り立つ

次に, $\forall [g] \in \pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right), (\widetilde{f}g)\widetilde{f}$ は $\widetilde{x}_0$ を基点とする $\widetilde{X}$ 上の Loop なので, 元 $((\widetilde{f}g)\widetilde{f}) \in \pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ が考えられる。よって

$$p_*([g]) = [p \circ g] = [f]^{-1} [f] [p \circ g] [f]^{-1} [f] \quad (54)$$

$$= [f]^{-1} [p \circ \widetilde{f}] [p \circ g] [p \circ \widetilde{f}] [f] \quad (55)$$

$$= [f]^{-1} p_*\left([(\widetilde{f}g)\widetilde{f}]\right)[f] \in [f]^{-1} p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)[f] \quad (56)$$

以上より, $[f]^{-1} p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)[f] \supset p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)$ も示された $\square$

Corollary 7.3.

$(\widetilde{X}, p, X)$ を被覆とし, $\widetilde{X}$ を弧状連結とする。このとき, $\widetilde{X}$ の基本群の p_* による像により, X の基本群の部分群の共役類が一つ定まる

7.5 被覆空間への写像の持ち上げ

Theorem 7.5. 持ち上げの一意性

$p: \widetilde{X} \rightarrow X$ を被覆とし, Y を連結位相空間とする。また, $f: Y \rightarrow X$ を連続写像とする。 $\widetilde{f}, \widetilde{\widetilde{f}}$ がともに f の X への持ち上げであるとき, ある点 $y_0 \in Y$ に対して, $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{\widetilde{f}}(y_0)$ となるなら, 任意の点 $y \in Y$ に対して, $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\widetilde{f}}(y)$ となる。つまり, $\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{f}}$

Proof.

$U = \left\{ y \in Y : \widetilde{f}(y) = \widetilde{\widetilde{f}}(y) \right\}$ とし, U が Y の空でない開集合となることを示す。 $y_0 \in U$ であるから, U は空でない。 $\forall y \in U, f(y) \in X$ の p に関して均等に覆われた開近傍を V とすると, $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ となる。 $\forall \lambda \in \Lambda, V_\lambda$ は $\widetilde{X}$ の開集合であり, $p|_{V_\lambda}: V_\lambda \rightarrow V$ は同相写像である。

ここで, $\lambda_0 \in \Lambda$ を $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\widetilde{f}}(y) \in V_{\lambda_0}$ となるものとする, $y \in \widetilde{f}^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \widetilde{\widetilde{f}}^{-1}(V_{\lambda_0})$ となり, また, $\widetilde{f}$ と $\widetilde{\widetilde{f}}$ は連続で, V_{λ_0} が $\widetilde{X}$ の開集合であるから, $\widetilde{f}^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \widetilde{\widetilde{f}}^{-1}(V_{\lambda_0})$ は Y の開集合である。つまり, y の Y での開近傍である。このとき, $\forall y' \in \widetilde{f}^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \widetilde{\widetilde{f}}^{-1}(V_{\lambda_0}), \widetilde{f}(y') \in V_{\lambda_0}$ かつ $\widetilde{\widetilde{f}}(y') \in V_{\lambda_0}$ であるが, $p|_{V_{\lambda_0}}: V_{\lambda_0} \rightarrow V$ は同相写像, 特に単射で

$$p|_{V_{\lambda_0}}\left(\widetilde{f}(y')\right) = p\left(\widetilde{f}(y')\right) = f(y') \quad (57)$$

$$= p\left(\widetilde{\widetilde{f}}(y')\right) = p|_{V_{\lambda_0}}\left(\widetilde{\widetilde{f}}(y')\right) \quad (58)$$

となるので, $\widetilde{f}(y') = \widetilde{\widetilde{f}}(y')$ となる。したがって, $y' \in U$ である

よって, $y \in \left(\widetilde{f}^{-1}(V_{\lambda_0}) \cap \widetilde{\widetilde{f}}^{-1}(V_{\lambda_0})\right) \subset U$ となり, y は U の Y での内点である。 y は U の任

意の点であったから、 U は Y の開集合である

一方、 $Y \setminus U = \left\{ y \in Y : \tilde{f}(y) \neq \tilde{f}(y) \right\}$ も同様に Y の開集合になることが示された。今、 Y が連結で、 $U \neq \emptyset$ 。さらに、 U も $Y - U$ も Y の開集合であるから、 $Y \setminus U = \emptyset$ となる。つまり、 $Y = U$ となり、 $\forall y \in Y, \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y)$ となる $\square$

Definition 7.8. 局所弧状連結

位相空間 Y が局所弧状連結であるとは

$\left\{ \begin{array}{l} \forall y \in Y \\ \forall U_y : y \text{ の } Y \text{ での開近傍} \end{array} \right.$ に対し、 $\exists V_y : y \text{ の } Y \text{ での開近傍, s.t. } V_y \subset U_y \text{ かつ } V_y \text{ は弧状連結である}$

Example 7.5.

多様体は局所弧状連結である

Lemma 7.3.

位相空間 Y が連結かつ局所弧状連結 $\implies Y$ は弧状連結

Proof.

$\forall y_0 \in Y, U = \{ y \in Y : y \text{ は } y_0 \text{ と曲線で結べる} \}$ が、 Y の開集合かつ閉集合であることを示せば良い

$\forall y \in U, \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U, \text{ s.t. } \gamma(0) = y_0, \gamma(1) = y$ であり、 Y が局所弧状連結であるから、 $\exists V_y : y \text{ の } Y \text{ での開近傍, s.t. } V_y \text{ は弧状連結であるから、} \forall y' \in V_y, \exists \gamma' : [0, 1] \rightarrow V_y, \text{ s.t. } \gamma'(0) = y, \gamma'(1) = y'$ である。よって、 $\gamma \circ \gamma' : [0, 1] \rightarrow V_y \subset U$ は y_0 から y' への曲線であるから、 $y' \in U$ となる。よって、 $V_y \subset U$ となり、 U は開集合である

$\forall y \in Y \setminus U, V_y \cap U \neq \emptyset$ と仮定すると、 $\exists z \in V_y \cap U$ であり、 $z \in U \implies \exists \gamma, \text{ s.t. } \gamma(0) = y_0, \gamma(1) = z$ である。また、 $z, y \in V_y$ かつ V_y は弧状連結であるから、 $\exists \gamma', \text{ s.t. } \gamma'(0) = z, \gamma'(1) = y$ である。よって、 $\gamma \circ \gamma' : [0, 1] \rightarrow V_y \subset U$ は y_0 から y への曲線であり、 $y \in U$ となる。これは $y \in Y \setminus U$ 矛盾であるから、 $Y \setminus U$ は閉集合である

Y が連結であるから、 $U = Y$ となる。 $y_0 \in Y$ は任意に取ったので、 Y は弧状連結である $\square$

Theorem 7.6. 持ち上げの存在

$p : \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とし、 Y を連結かつ局所弧状連結な位相空間とする。また、 $f : Y \rightarrow X$ を連続写像とする。 $y_0 \in Y, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ について、 $f(y_0) = p(\tilde{x}_0)$ が成立するとき、 $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ となる f の持ち上げ $\tilde{f}$ が存在 $\iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

Proof.

$\Leftarrow$

$\tilde{f}$ が f の持ち上げであるから、 $p \circ \tilde{f} = f$ となり、よって

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) \quad (59)$$

$$= p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \quad (60)$$

次に $\implies$ について考える

まず、写像 $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ を次のように定める。 Y が弧状連結だから $\forall y \in Y, y_0$ から y への道 φ を一つ取れる。すると、 $f \circ \varphi$ は $f(y_0)$ から $f(y)$ への X 上の道。よって、 $\tilde{x}_0$ を始点とする $f \circ \varphi$ の持ち上げ $\tilde{f} \circ \varphi$ がただ一つ存在する。そこで $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ \varphi(1)$ と定める。 $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ が well-defined である。 $\psi : [0, 1] \rightarrow Y$ も y_0 から y への Y 上の道とすると、道 $\varphi \bar{\psi}$ は、 y_0 を基点とする Y 上の Loop で、 $f \circ (\varphi \bar{\psi}) = (f \circ \varphi) \overline{(f \circ \psi)}$ は $f(y_0)$ を基点とする X 上の Loop。 $[(f \circ \varphi) \overline{(f \circ \psi)}] = [f \circ (\varphi \bar{\psi})] = f_*([\varphi \bar{\psi}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ より、 $\exists [\gamma] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0), \text{ s.t. } [(f \circ \varphi) \overline{(f \circ \psi)}] = p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma]$ 。このとき、 $(f \circ \varphi) \overline{(f \circ \psi)} \sim p \circ \gamma$ 。

よって, $\widetilde{f \circ \varphi} \sim (p \circ \gamma)(f \circ \psi)$ である. ここで, $(p \circ \gamma)(f \circ \psi)$ の $\tilde{x}_0$ を始点とする持ち上げを $(p \circ \gamma)(f \circ \psi)$ とすると, $\widetilde{f \circ \varphi}(1) = (p \circ \gamma)(f \circ \psi)(1)$ である (モノドロミー定理). 一方, $\gamma(\widetilde{f \circ \psi})$ は $\tilde{x}_0$ を始点とする $(p \circ \gamma)(f \circ \psi)$ の持ち上げになっている. よって, $(p \circ \gamma)(f \circ \psi) = \gamma(\widetilde{f \circ \psi})$. よって, $\widetilde{f \circ \varphi}(1) = (p \circ \gamma)(f \circ \psi)(1) = \gamma(\widetilde{f \circ \psi})(1) = \widetilde{f \circ \psi}(1)$. 以上より, $\tilde{f}$ は well-defined である

$\forall y \in Y, \tilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \varphi}(1)$ であるから, $(p \circ \tilde{f})(y) = p(\tilde{f}(y)) = p(\widetilde{f \circ \varphi}(1)) = (f \circ \varphi)(1) = f(\varphi(1)) = f(y)$. したがって, $p \circ \tilde{f} = f$ となる

$\forall y \in \tilde{f}^{-1}(U), f(y) \in X$ の p に関して均等に覆われた開近傍を V とすると, $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$

となる. ここで, $\tilde{f}(y) \in V_k$ とするとき, $V_k \cap U$ は $\tilde{f}(y)$ の $\tilde{X}$ での開近傍で, V_k の開集合. 今, $p|_{V_k}: V_k \rightarrow V$ は同相写像であり, V は X の開集合であるから, $(f(y) \in p|_{V_k}(V_k \cap U)) = p(V_k \cap U)$ は X の開集合. よって, f の連続性より, $f^{-1}(V_k \cap U)$ は Y での開近傍である. したがって, Y が局所弧状連結であるから, $\exists W: y$ の Y での開近傍, s.t. $W \subset f^{-1}(p(V_k \cap U))$ かつ W は弧状連結である. 今, y_0 から y への Y 上の道 φ を一つ固定する. $\forall y' \in W, y$ から y' への W 内の道 φ' を考えられ, $\varphi\varphi'$ は y_0 から y' への Y 上の道である. ここで, 道 $f \circ (\varphi\varphi')$ に対し, $(\widetilde{f \circ \varphi})(p|_{V_k}^{-1} \circ (f \circ \varphi'))$ は $\tilde{x}_0$ を始点とする $f \circ (\varphi\varphi')$ の持ち上げである. よって

$$\tilde{f}(y') = (\widetilde{f \circ \varphi})(p|_{V_k}^{-1} \circ (f \circ \varphi'))(1) \quad (61)$$

$$= (p|_{V_k}^{-1} \circ (f \circ \varphi'))(1) \quad (62)$$

$$= p|_{V_k}^{-1}(f(\varphi'(1))) \quad (63)$$

$$= p|_{V_k}^{-1}(f(y')) \in p|_{V_k}^{-1}(f(W)) \subset p|_{V_k}^{-1}(p(V_k \cap U)) = V_k \cap U \subset U \quad (64)$$

したがって, y は $\tilde{f}^{-1}(U)$ での内点であり, $\tilde{f}^{-1}(U)$ は Y の開集合である. よって, $\tilde{f}$ は連続である $\square$

Corollary 7.4.

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とするとき, Y が 1-連結かつ局所弧状連結 $\implies \forall f: Y \xrightarrow{\text{continuous}} X$ は持ち上げ $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ をもつ

Proof.

Y が 1-連結であるから, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = f_*({1}) = {1} \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ $\square$

Definition 7.9. 正則被覆

被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が正則被覆 (またはガロア被覆) であるとは, $\forall \tilde{x}_0 \in \tilde{X}, p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ が $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ の正規部分群である

Example 7.6.

群 G が位相空間に連続に, 自由かつ真性不連続に作用しているとき, 被覆 $p: X \rightarrow X/G$ は正則被覆である

Proof.

$\forall x_0 \in X, p_*(\pi_1(X, x_0)) = \text{Ker } \varphi_{x_0}$ だった. よって, $p_*(\pi_1(X, x_0))$ は $\pi_1(X/G, p_*(x_0))$ の正規部分群である $\square$

Definition 7.10. 被覆変換・被覆変換群

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とするとき

- h が被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ の被覆変換であるとは, h は $\tilde{X}$ の自己同相写像で, $p \circ h = p$ をみたすこと

- ・被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ の被覆変換群 $(G(\tilde{X}, p, X))$ で表す) とは, 被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ の被覆変換全てのなす群である

Theorem 7.7. 被覆変換群の作用の自由かつ真性不連続性

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とすると, $\tilde{X}$ が連結かつ局所弧状連結 $\implies$ 被覆変換群 $G(\tilde{X}, p, X)$ の $\tilde{X}$ への作用は自由かつ真性不連続である

Corollary 7.5.

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とすると, $\tilde{X}$ が連結かつ局所弧状連結 $\implies$ 被覆 $p': \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$ ($\tilde{x} \mapsto [\tilde{x}]$) は正則被覆である

Theorem 7.8.

$\tilde{X}$ を連結かつ局所弧状連結な位相空間とすると, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が正則被覆 $\implies X \cong \tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$

Corollary 7.6.

$\tilde{X}$ を連結かつ局所弧状連結な位相空間とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を被覆とすると

- ・ $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が正則被覆 $\implies \forall \tilde{x}_0 \in \tilde{X}, \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right) \cong G(\tilde{X}, p, X)$
- ・ $\tilde{X}$ がさらに単連結 (したがって 1-連結) $\implies \forall \tilde{x}_0 \in \tilde{X}, \pi_1(X, p(\tilde{x}_0)) \cong G(\tilde{X}, p, X)$

Remark 7.5.

$\tilde{X}$ が 1-連結であるとき, 被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の普遍被覆という

Definition 7.11. 同値

位相空間 X 上の二つの被覆 $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X, p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ が同値であるとは, $\exists \tilde{h}: \tilde{X}_1 \xrightarrow{\text{同相}} \tilde{X}_2, \text{ s.t. } p_2 \circ \tilde{h} = p_1$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\exists \tilde{h}: \text{同相}} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & X & \end{array}$$

Remark 7.6. 同型

二つの被覆 $p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X, p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ が同型であるとは

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\exists \tilde{h}: \text{同相}} & \tilde{X}_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{h: \text{同相}} & X_2 \end{array}$$

Definition 7.12. 半局所単連結

位相空間 X が半局所単連結であるとは, $\forall x \in X, \exists U_x: x$ の X での開近傍, s.t. 包含写像 $\iota: U \hookrightarrow X$ の誘導準同型 $\iota_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ が 0-写像

Theorem 7.9. 被覆空間の分類定理

X を連結・局所弧状連結・半局所単連結な位相空間とする. $x_0 \in X$ を任意に固定すると

- ・ $\pi_1(X, x_0)$ の任意の部分群 H に対し, 弧状連結な位相空間 X_H と被覆写像 $p_H: X_H \rightarrow X$ が存在し, $x_H \in p_H^{-1}(x_0)$ を適当にとると, $p_{H*}(\pi_1(X_H, x_H)) = H$ となる. このような被覆 $p_H: X_H \rightarrow X$ は, 同値を除いて一意である
- ・ (1) を言い換えると, 次の写像は全単射である:

$$\{ \text{全空間が弧状連結な } X \text{ 上の被覆} \} / \text{同値} \rightarrow \{ \pi_1(X, x_0) \text{ の部分群} \} / \text{共役} \quad (65)$$

$$[p: \tilde{X} \rightarrow X] \mapsto [p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, *)\right)] \quad (66)$$