

欧氏空间上的光滑函数

解析函数

作为微分几何中的约定俗成, 我们将坐标记为**上标**, 而非下标.

定义. 对于非负整数 k , 我们称一个函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^k 的, 如果其满足对于任意的 $j < k$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$ 都在 p 点存在并且连续.

称函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 p 是 C^∞ 的, 如果对于所有的 $k \geq 0$ 都满足其是 C^k 的话.

另外, 称一个函数 f 是 C^k 的, 如果它在 U 上每个点都是 C^k 的话. 同时, C^∞ 的同义词是“光滑的”

我们称一个函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是**实解析**的, 如果对于 U 中任意一个点 p , 都存在一些邻域, 使得其满足

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - p^i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)(x^i - p^i)(x^j - p^j) + \dots$$

引理. 实解析函数一定是 C^∞ 的, 因为上面的式子可以在其收敛区域内逐项微分. 但 C^∞ 函数则不一定是实解析的.

例. 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

由于原点处的任意阶导数 $f^{(k)}(0)$ 都是 0, f 在原点处的任意邻域都是 0, 因此 $f(x)$ 不等于其泰勒级数且 $f(x)$ 在原点处不是实解析的.

含余项的泰勒定理

虽然 C^∞ 的函数不一定等价泰勒定理, 但可以通过添加余项来使其满足目的.

定义. (星型)

对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S , 称 S 是相对于 p 星型的, 如果 S 中的任意一点 x 都满足 p 到 x 的线段被包含在 S 里.

引理. (含余项的 Taylor 定理)

令 f 是一个定义在 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 函数, 满足其关于 $p := (p^1, \dots, p^n) \in U$. 那么存在一些定义在 U 上的 C^∞ 函数 $g_1(x), \dots, g_n(x)$, 使得

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Proof. 由于 U 是关于 p 星型的, 所以对于 $\forall x \in U$, 线段 $p + t(x - p), 0 \leq t \leq 1$ 在 U 内部. 那么考虑 $f(p + t(x - p)), t \in (0, 1)$

由链式法则可知, $\frac{d}{dt} f(p + t(x - p)) = \sum (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p))$

接着两边同时对 t 从 0 到 1 积分, $f(p + t(x - p))|_0^1 = \sum (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) dt$

在这里我们令 $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x - p)) dt$, 于是 $g_i(x)$ 是 C^∞

且原式变为 $f(x) - f(p) = \sum (x^i - p^i) g_i(x)$

另一方面, $g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ □

注意. 事实上, 星型并非限制条件, 考虑任意一个开球 $B(p, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < \epsilon\}$ 是关于 p 的星型. 如果 f 是定义在包含点 p 的开集 U 上的 C^∞ 函数, 那么存在一个 $\epsilon > 0$, 使得 $p \in B(p, \epsilon) \subset U$. 于是 f 定义在一个 p 的星型邻域上, 并且适用含有余项的泰勒定理.

欧氏空间中作为导数的切向量

为了区分点和向量, 我们将定义在 $\mathbb{R}^n$ 的点记作 $p = (p^1, \dots, p^n)$

切空间中的向量 $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ 记作 $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ or $\langle v^1, \dots, v^n \rangle$.

我们通常用 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 或 $T_p\mathbb{R}^n$ 的标准基, 于是 $v = \sum v^i e_i$.

过点 $p = (p^1, \dots, p^n)$ 的具有方向 $v = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ 的直线具有参数化 $c(t) = (p^1 + tv^1, \dots, p^n + tv^n)$.

方向导数

f 在 p 上 v 方向的方向导数定义为

$$\begin{aligned} D_v f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

显然可以看出, $D_v f$ 是一个数字.

芽

定义在集合 S 上的关系 R 是 $S \times S$ 的子集. 我们称这个关系是一个等价关系如果它同时满足以下条件:

- (1) 自反性: $x \sim x$ 对于任意的 $x \in S$
- (2) 对称性: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- (3) 传递性: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

考虑所有 (f, U) 对所组成的集合, 这里 U 是 p 的一个邻域并且 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^∞ 的. 我们称 (f, U) 等价于 (g, V) 如果存在一个包含 p 的开集 $W \subset U \cap V$ 使得 $f = g$ 当其关于 W 的时候.

定义. 称 (f, U) 的等价类为 f 在 p 的芽 (germ).

某一点的导数

一个域 K 上定义在向量空间之间的映射 $L: V \rightarrow W$ 称作线性映射或线性算子, 如果对于所有的 $r \in K, u, v \in V$ 有:

- (1) $L(u + v) = L(u) + L(v)$
- (2) $L(rv) = rL(v)$

对于每个 $p \in \mathbb{R}^n$ 的切向量, p 的方向导数给出了一个实向量空间的映射 $D_v: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$.

于是 D_v 是一个 $\mathbb{R}$ -线性的, 并且满足 $D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)D_v g$.

将 p 的所有导数所构成的集合记作 $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. 显然这个集合是一个实向量空间.

由于 p 的所有方向导数都是在这点的导数, 因此存在一个映射

$$\begin{aligned} \phi: T_p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n) \\ v &\mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \end{aligned}$$

由于 D_v 是线性的, 因此映射 ϕ 是一个向量空间的线性算子.

引理. 如果 D 是 C_p^∞ 的某一点的导数, 那么对于所有的常函数 c , 有 $D(c) = 0$

Proof. 由于 $\mathbb{R}$ -线性, 我们有 $D(c) = cD(1)$.

于是考虑 Leibniz, $D(1) = D(1 \times 1) = D(1) \times 1 + 1 \times D(1) = 2D(1)$

因此 $D(1) = 0$ □

定理. 线性映射 $\phi: T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 是向量空间的一个同构.

Proof. 单射性方面, 对于 $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$, 令 $D_v = 0$. 将 D_v 作用于坐标函数 x^j , 得到

$$0 = D_v(x^j) = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p x^j = \sum_i v^i \delta_i^j = v^j$$

因此, $v = 0$ 且 ϕ 是单射.

满射性方面, 令 D 是点 p 处的导数, 令 (f, V) 的等价类为 C_p^∞ 上的芽.

不妨假设 V 是一个开球, 于是其为星型.

由带余项的泰勒定理, 存在一些 C^∞ 的函数 $g_i(x)$ 在 p 的邻域上, 使得

$$f(x) = f(p) + \sum (x^i - p^i) g_i(x), g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

将 D 作用在两边, 记 $D(f(p)) = 0, D(p^i) = 0$

$$\begin{aligned} Df(x) &= \sum (Dx^i) g_i(p) + \sum (p^i - p^i) Dg_i(x) \\ &= \sum (Dx^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \end{aligned}$$

这就证明了对于 $v = \langle Dx^1, \dots, Dx^n \rangle, D = D_v$ □

换句话说, 这个定理证明了我们可以通过 p 点处的导数来识别其切向量. 在 $T_p(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 下, $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 对应到偏导的集合 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$

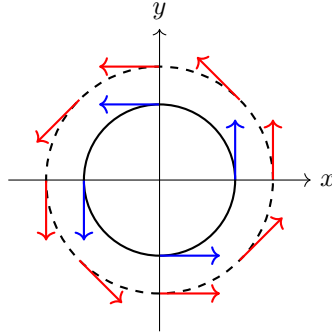
因此我们可以将 $v = \langle v^1, \dots, v^n \rangle = \sum v^i e_i$ 写作 $v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$

向量场

一个定义在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的向量场 X 是一个分配给 U 中所有点 p 的切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的切向量 X_p . 由于切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 有基底 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$, 于是向量 X_p 是一个线性结合 $X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, p \in U$

向量场 X 是 U 上 C^∞ 的, 如果其系数 a^i 全都是 U 上 C^∞ 的

例. 显然, 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上, $p := (x, y)$ 的一个向量场如图



一个 U 上的 C^∞ 函数的环通常被记作 $C^\infty(U)$ 或者 $\mathcal{F}(U)$. 由于可以将 C^∞ 向量场作用在 C^∞ 函数上从而得到一个新的 C^∞ 向量场, 将 U 上所有的 C^∞ 向量场记作 $\mathfrak{X}(U)$. $\mathfrak{X}$ 不仅是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间, 同时也是 C^∞ 环上的一个模.

定义. 如果 R 是一个有单位元的交换环, 那么 R -模是一个具有加法和标量乘法的操作的集合 A , 使得:

- (1) 在加法下, A 是一个阿贝尔群 (可交换)
- (2) 对于 $r, s \in R$ 和 $a, b \in A$,
 - (i) (封闭性) $ra \in A$
 - (ii) (单位元) 如果 1 是 R 的乘法单位元的话, $1a = a$
 - (iii) (结合律) $(rs)a = r(sa)$
 - (iv) (分配律) $(r+s)a = ra + sa, r(a+b) = ra + rb$

向量场作为导数

A 的所有导数关于加法和乘法是封闭的, 并且形成一个向量空间, 记作 $\text{Der}(A)$, 于是我们有一个映射

$$\begin{aligned} \phi: \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \text{Der}(C^\infty(U)) \\ X &\longmapsto (f \mapsto Xf) \end{aligned}$$

交错 k - 线性函数

对偶空间

如果 V, W 是实向量空间, 我们记 $\text{Hom}(V, W)$ 为所有线性映射 $f: V \rightarrow W$. 我们称 V 上所有实值线性函数所构成的向量空间为对偶空间 V^* . 换言之, $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$

V^* 的元素称之为 V 上的 **共向量/余向量**

假设 V 是一个有限维的向量空间, 令 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的基底. 于是每个 $v \in V$ 都有唯一的线性结合 $v = \sum v^i e_i, v^i \in \mathbb{R}$. 令 $\alpha^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个选取第 i 个坐标的线性函数, $\alpha^i(v) = v^i$. 注意到

$$\alpha^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

命题. 函数 $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ 构成了 V^* 的一组基底

推论. 有限维向量空间 V 的对偶空间 V^* 与 V 拥有相同维度

多重线性函数

函数 $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 k - 线性, 如果其中每个参数都有

$$f(\dots, av + bw, \dots) = af(\dots, v, \dots) + bf(\dots, w, \dots)$$

而一个 V 上的 k - 线性函数同时也被叫做 V 上的 **k - 张量**

定义. 一个 k - 线性函数 $f: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ 是对称的, 如果

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = f(v_1, \dots, v_k)$$

称其为交替的, 如果

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k)$$

k - 线性函数的置换操作

引理. 如果 σ, τ 是 S_k 的排列, f 是 V 上的一个 k - 线性函数, 那么 $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma)f$

注意. 只需要考虑 $w_i = v_{\tau(i)}$

定义. 对于一个群 G 和一个集合 X , 考虑映射

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (\sigma, x) &\mapsto \sigma \cdot x \end{aligned}$$

我们称这个映射是群 G 在集合 X 上的 **左作用**, 如果

(i) $1 \cdot x = x$, 这里 1 是 G 的单位元, x 是 X 的任意一个元

(ii) $\tau \cdot (\sigma \cdot x) = (\tau\sigma) \cdot x$

那么类似的, 我们称其为 **右作用**, 如果满足

(i) $x \cdot 1 = x$

(ii) $(x \cdot \sigma) \cdot \tau = x \cdot (\sigma\tau)$

对称算子和交错算子

定义. 对称算子:

$$\begin{aligned} (Sf)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ Sf &= \sum_{\sigma \in S_k} \sigma f \end{aligned}$$

交错算子:

$$Af = \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) \sigma f$$

张量积

定义. 向量空间 V 上的 (k, l) 型张量是一个多重线性映射 $T: V_1^* \times \cdots \times V_k^* \times V_1 \times \cdots \times V_l \rightarrow \mathbb{R}$

定义. 令 f 和 g 分别是向量空间 V 上的 k -线性函数和 l -线性函数. 那么他们的张量积 $f \otimes g$ 是一个 $(k+l)$ -线性函数, 定义为

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = f(v_1, \cdots, v_k) g(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l})$$

例.

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \sum_i v^i w^i \\ &= \sum_i \alpha^i(v) \alpha^i(w) \\ &= \sum_i (\alpha^i \otimes \alpha^i)(v, w) \end{aligned}$$

例.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \\ a_1 b_4 & a_2 b_4 & a_3 b_4 \end{bmatrix}$$

例. 克罗内克积

$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \cdots \\ u_{21}V & u_{22}V & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

命题. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

楔积

定义. 对于 $f \in A_k(V), g \in A_l(V)$

$$\begin{aligned} f \wedge g &= \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \\ (f \wedge g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}) \end{aligned}$$

楔积的反交换性

命题. 对于 $f \in A_k(V), g \in A_l(V)$

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$$

Proof. 记变换 $\tau \in S_{k+l}$ 为变换 $\tau = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & l & l+1 & \cdots & l+k \\ k+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & k \end{bmatrix}$

换言之, $\tau(1) = k+1, \cdots, \tau(l) = k+l, \tau(l+1) = 1, \cdots, \tau(l+k) = k$
于是

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma\tau(l+1), \cdots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k) \\ \sigma(k+1) &= \sigma\tau(1), \cdots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l) \end{aligned}$$

那么对于 $v_1, \cdots, v_{k+l} \in V$

$$\begin{aligned} A(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn} \sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn} \sigma) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l+k)}) g(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l)}) \\ &= (\text{sgn} \tau) \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn} \sigma\tau) g(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l)}) f(v_{\sigma\tau(l+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l+k)}) \\ &= (\text{sgn} \tau) A(g \otimes f)(v_1, \cdots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

于是在两边同时除以 $k!l!$ 就得到了 $f \wedge g = (\text{sgn}\tau) g \wedge f$ □

推论. 如果 f 是 V 上的一个 k -共向量, 且 k 是奇数, 那么 $f \wedge f = 0$

楔积的结合律

引理. 令 f, g 分别是一个 k -线性函数和 l -线性函数, 那么

$$(i) \quad A(A(f) \otimes g) = k!A(f \otimes g)$$

$$(ii) \quad A(f \otimes A(g)) = l!A(f \otimes g)$$

命题. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$

Proof.

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{1}{(k+l)!m!} A((f \wedge g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{(k+l)!m!} \frac{1}{k!l!} A(A(f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+l)!}{(k+l)!m!k!l!} A((f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A((f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes (g \otimes h)) \\ &= \frac{1}{k!(l+m)!} A\left(f \otimes \frac{1}{l!m!} A(g \otimes h)\right) \\ &= f \wedge (g \wedge h) \end{aligned}$$

□

推论. $f \wedge g \wedge h = \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h)$

推论. $f_i \in A_{d_i}(V)$

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_r = \frac{1}{d_1! \cdots d_r!} A(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)$$

$\mathbb{R}^n$ 上的微分形式

微分 1-形式

p 点在 $\mathbb{R}^n$ 上的余切空间 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 被定义为切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间 $(T_p\mathbb{R}^n)^*$. 类似于向量场的定义, 一个开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ **余向量场** 或 **微分 1-形式** ω 是一个给每个 $p \in U$ 分配一个余向量 $\omega_p \in T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的函数.

命题. 如果 $x^1, \dots, x^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准基底, 那么对于每个 $p \in \mathbb{R}^n$, $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$ 都是对偶于以 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ 为基底的切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的余切空间 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的基底

Proof.

$$\begin{aligned} (dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p x^i \\ &= \delta_j^i \end{aligned}$$

□

微分 k -形式

更一般的, 考虑在 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个 k 阶的微分形式 ω 或一个 k -形式, 这是一个分配给每个 $p \in U$ 一个切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 上交错 k -线性函数的函数. 换言之, $\omega_p \in A_k(T_p\mathbb{R}^n)$.

而 $A_k(T_p\mathbb{R}^n)$ 的基底是 $dx_p^I = dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k}, 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$

因此, 对于每个 $p \in U$, ω_p 都是线性结合 $\sum a_I(p) dx_p^I$

而一个 k -形式 ω 是线性结合 $\omega = \sum a_I dx^I$ 记 U 上的 C^∞ 的 k -形式构成的向量空间为 $\Omega^k(U)$

一个 0 -形式分配给了每个 $p \in U$ 一个 $A_0(T_p\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ 的元素

因此 0 -形式是 U 上的一个单纯的函数, 并且 $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$

由于可以将 C^∞ 函数乘在 C^∞ 的 k -形式上, 因此集合 $\Omega^k(U)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 也是一个 $C^\infty(U)$ 上的模

将楔积作为乘法的话, 直和 $\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的代数, 也是 C^∞ 上的一个模. 另外作为一个代数, 它实际上是反对称的和满足结合律的.

向量场上作为多线性函数的微分形式

对于 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 的 1 -形式 ω 和 C^∞ 向量场 X , 按如下方式定义一个 U 上的函数

$$\omega(X)_p = \omega_p(X_p)$$

如果用坐标写的话

$$\omega = \sum a_i dx^i \quad X = \sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

因此

$$\omega(X) = \left(\sum a_i dx^i \right) \left(\sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum a_i b_i$$

U 上的 C^∞ 的 1 -形式给出了一个映射: $\mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$. 由于 $f \in C^\infty(U) \Rightarrow \omega(fX) = f\omega(X)$, 这个映射实际上是环 $C^\infty(U)$ 上的线性.

而在这种方式下, U 上的 1 -形式给出了一个 $\mathcal{F}(U)$ -映射: $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$

类似的, 一个 U 上的 k -形式给出了一个 $\mathcal{F}(U)$ 上的 k -线性映射: $\mathfrak{X}(U) \times \cdots \times \mathfrak{X}(U) (k \text{ 个}) \rightarrow \mathcal{F}(U)$

外导数

定义. 如果 $\omega = \sum_I a_I dx^I \in \Omega^k(U)$, 那么

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_I da_I \wedge dx^I \\ &= \sum_I \left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I \\ &\in \Omega^{k+1}(U) \end{aligned}$$

例. 令 ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个 1 -形式 $f dx + g dy$, 同时 f, g 是 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 函数.

另一方面, 为了方便, 记 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. 于是

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

域 K 上的一个代数 A 是已分次的 (be graded), 如果其可以写成 K 上的向量空间的直和 $A = \bigoplus_{k=0}^\infty A^k$

定义. 令 $A = \bigoplus_{k=0}^\infty A^k$ 是域 K 上的已分次的代数, 那么分次代数 A 的**反微分**是一个 K -线性映射 $D: A \rightarrow A$ 使得对于 $\omega \in A^k, \tau \in A^l$

$$D(\omega\tau) = (D\omega)\tau + (-1)^k \omega D\tau$$

如果反微分从 A^k 映射到 A^{k+m} 的话, 我们称这是个 m 阶的反微分

命题. (i) 外导数 $d: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ 是一个 1 阶的反微分:

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau$$

(ii) $d^2 = 0$

(iii) 如果 $f \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, 那么 $(df)(X) = Xf$

命题. 外微分的特征

由于上面的命题可以知道, 如果 $D: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ 是一个一阶的外微分, 满足 $D^2 = 0$, 对于 $f \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, 有 $(Df)(X) = Xf$, 那么 $D = d$

闭形式和恰当形式

定义. U 上的一个 k -形式 ω 是闭的, 如果它满足 $d\omega = 0$
称其是恰当的, 如果存在一个 $k-1$ 形式 τ 满使得 $\omega = d\tau$

由于 $d^2 = 0$, 每个恰当形式都是闭的

一点例子

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U)
 \end{array}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\rightarrow \text{于是 } 0\text{-形式 } f \text{ 的外微分 } \text{grad} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

1-形式的外微分

$$d(Pdx + Qdy + Rdz) = (R_y - Q_z) dy \wedge dz - (R_x - P_z) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy$$

$$\rightarrow \text{curl} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_y - Q_z \\ -(R_x - P_z) \\ Q_x - P_y \end{bmatrix}$$

2-形式的外微分

$$d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\rightarrow \text{div} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = P_x + Q_y + R_z$$

由于是否为保守场仅和拓扑性质有关, 那么我们可以用向量空间的商来定义闭形式的 “失败程度”

$$H^k(U) := \frac{U \text{ 上的 } k\text{-闭形式}}{U \text{ 上的 } k\text{-恰当形式}}$$

我们将这个称作 U 的 k 阶 De Rham 上同调

关于上标下标的一些约定

对于向量场, 通常用下标如 $e_1, \dots, e_n$

对于微分形式, 通常采用上标如 $\omega^1, \dots, \omega^n$

对于 0- 形式, 坐标函数用上标如 $x^1, \dots, x^n$

他们的微分 1- 形式也是上标, 如 $dx^1, \dots, dx^n$

而坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 则一般用下标, 因为其存在于分母

而对于系数部分的上下标, 通常取决于其为向量场的系数还是微分形式的系数

如 $X = \sum a^i e_i, \omega = \sum b_j dx^j$

比如, 对于 $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \left(\sum b_j dx^j\right) \left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum b_i a^i\end{aligned}$$

或者 $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$a^i = (dx^i)(X)$$

注意到等号两边的净指标相等, 净指标为 0 是“守恒的”.

流形

拓扑流形

定义. 一个拓扑空间 M 是 n 维局部欧几里得的, 如果 M 的每个点 p 都有一个邻域 U 满足 U 有一个映射到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集的同胚 ϕ . 我们称 $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ 为一个图表, 称 U 为一个坐标邻域或者坐标开集, 称 ϕ 为 U 的一个坐标映射或者坐标系. 我们称一个图表 (U, ϕ) 是以 $p \in U$ 为中心的, 如果 $\phi(p) = 0$.

定义. 一个 n 维的拓扑流形是一个 Hausdorff, 第二可数 (A2), 局部欧几里得的 n 维空间

相容图表

定义. 一个拓扑流形的两个图表 $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n), (V, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ 是 C^∞ -相容的, 如果两个映射 $\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V), \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ 是 C^∞ 的. 这两个映射是过渡映射.

定义. 一个局部欧几里得空间 M 的 C^∞ 图册是一组覆盖了 M 的 C^∞ 相容图表的集合. 换句话说, $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$.

虽然 C^∞ 相容图是自反和对称的, 但是却不一定是传递的.

考虑 $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ 是 C^∞ -相容的, $(U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3)$ 也是 C^∞ -相容的. 那么由于三个都包含的坐标映射只在 U_{123} 被定义, 因此 $\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$ 仅在 $\phi_1(U_{123})$ 是 C^∞ -相容的

光滑流形

一个局部欧几里得空间上的图册 $\mathfrak{U}$ 称作最大的, 如果不存在一个更大的图册包含它. 换言之, 如果 $\mathfrak{M}$ 是另外一个包含 $\mathfrak{U}$ 的图册的话, $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}$.

定义. 光滑流形或 C^∞ 流形是一个具有最大图册的拓扑流形 M . 这个最大图册也叫 M 的微分结构. 一个微分流形的维度是 n , 如果其所有的连通分支都具有维度 n

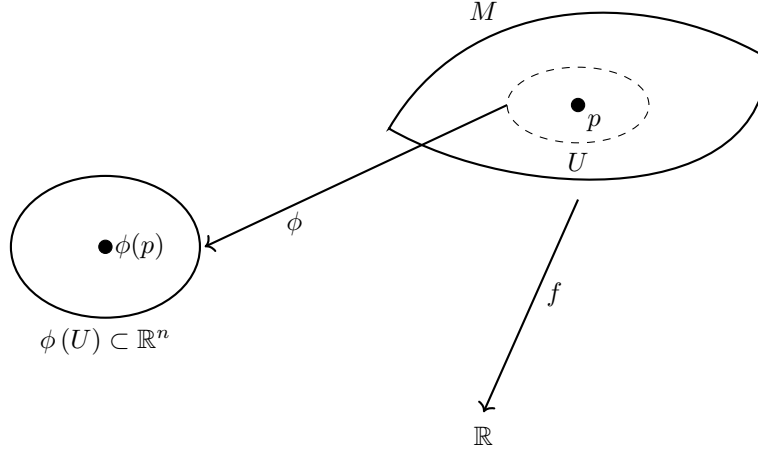
命题. 局部欧几里得空间上任意的图册 $\mathfrak{U} = \{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$ 都被包含在唯一的最大图册里.

综上所述, 我们验证一个拓扑空间 M 是否是一个 C^∞ 流形, 只需要确认:

- (i) M 是 Hausdorff, A2 的
- (ii) M 有一个 C^∞ 图册 (无须是最大的)

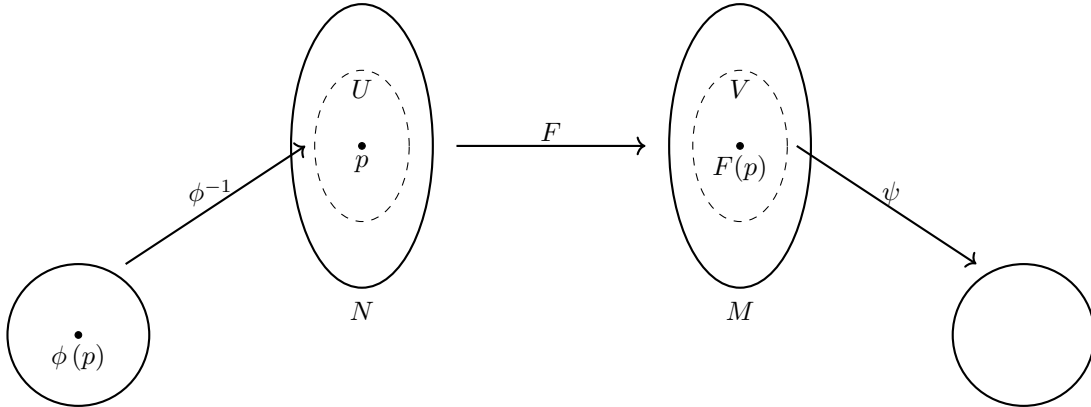
流形上的光滑映射

定义. 令 M 是一个 n 维的光滑流形. 称一个函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 在 M 上的点 p 是 C^∞ 的或者光滑的, 如果存在一个在 M 的图册里的包含 p 的图 (U, ϕ) , 使得 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



定义. 令 $F: N \rightarrow M$ 的一个映射而 h 是 M 上的一个函数. 那么 h 由 F 的拉回记作 F^*h , 定义为 $F^*h := h \circ F$

定义. 令 N, M 分别是 n, m 维的流形, 我们称一个映射 $F: N \rightarrow M$ 在 N 的点 p 是 C^∞ 的, 如果存在包含 $F(p)$ 的 M 的图 (V, ψ) 和包含 p 的 N 的图 (U, ϕ) , 满足一个 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的复合映射 $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



定义. 如果 F 是一个双射, 且 F, F^{-1} 都是 C^∞ 的话, 我们称 F 为一个微分同胚.

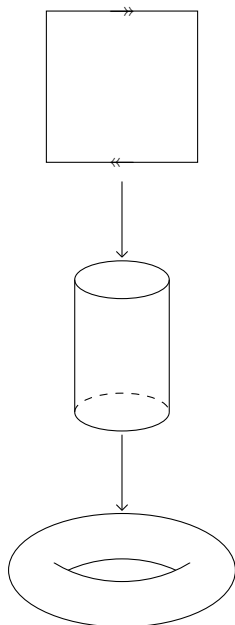
命题. 令 U 是流形 M 的一个开集, 如果映射 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是其像上的一个微分同胚, 那么 (U, F) 是 M 的图册中的一个图

定义. 一个李群是指一个拥有群结构的光滑流形 G , 满足以下映射都是 C^∞ 的:

1. $\mu: G \times G \rightarrow G$
2. $\iota: G \rightarrow G, \iota(x) = x^{-1}$

商

我们可以通过粘合一个正方形来得到一个环面, 这个过程被称为等化, 或商构造



商空间上映射的连续性

令 $\sim$ 是拓扑空间 S 上的一个等价关系, $S/\sim$ 是商拓扑.

假设函数 $f: S \rightarrow Y$ 在各等价类上都是常值的, 于是诱导了映射 $\bar{f}([p]) = f(p)$. 换言之,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ S/\sim & & \end{array}$$

命题. 诱导映射 $\bar{f}: S/\sim \rightarrow Y$ 是连续的, 当且仅当 $f: S \rightarrow Y$ 是连续的

同化为一个点

我们可以通过如下方式将拓扑空间 S 的子空间 A 等化到一个点:

定义一个 S 上的关系 $\sim$:

(i) $x \sim x$, 对于所有的 $x \in S$

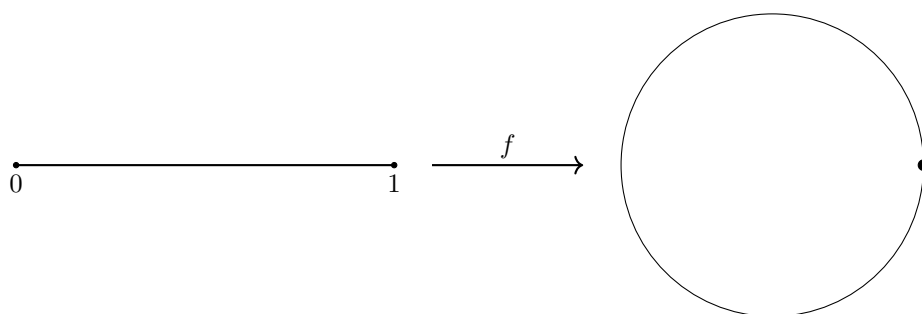
(ii) $x \sim y$, 对于所有的 $x, y \in A$

显然这是 S 上的一个等价关系 (第一条给出了自反性)

例. 令 $I := [0, 1]$. $I/\sim$ 是通过将 $\{0, 1\}$ 同化为一个点之后得到的商空间. 令 S^1 为复平面上的单位圆. 那么

$$\begin{aligned} f: I &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi i x) \end{aligned}$$

由于 $f(0) = f(1)$, 我们可以导出一个函数 $\bar{f}: I/\sim \rightarrow S^1$



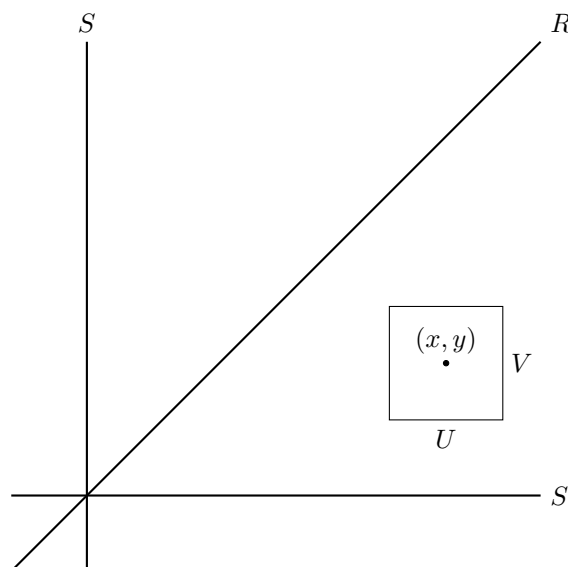
命题. 如果商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的, 那么 S 的任意一点 p 的等价类 $[p]$ 在 S 上是闭的.

开等价关系

定义. 一个拓扑空间 S 上的等价关系称为开的, 如果投影映射 $\pi: S \rightarrow S/\sim$ 是开的

换言之, 当且仅当 $\forall U \subset S, \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} [x]$ 是 S 中的开集的时候, 等价关系 $\sim$ 才是开的.

令 $\sim$ 为 S 上的等价关系, 我们可以用 $R \subset S \times S$ 来表示定义该关系的集合: $R := \{(x, y) \in S \times S | x \sim y\}$. 我们称这个 R 为等价关系的图.



定理. 令 $\sim$ 是 S 的一个开等价关系. 那么商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的, 当且仅当等价关系的图 R 在 $S \times S$ 上是闭的.

定理. 令 $\sim$ 是有投影映射 $\pi: S \rightarrow S/\sim$ 的空间 S 的一个开等价关系. 如果 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ 是 S 的基, 那么它在 π 下的像 $\{\pi(B_\alpha)\}$ 是 $S/\sim$ 的基.

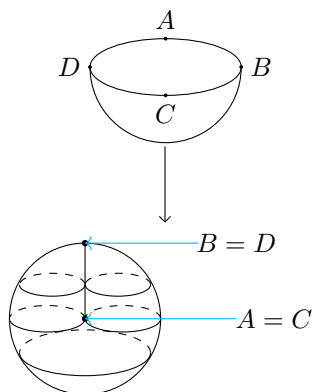
推论. 如果 $\sim$ 是第二可数空间 S 的一个开等价关系, 那么商空间 $S/\sim$ 也是第二可数的.

实投影空间

按如下方式定义 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上的一个等价关系:

$$x \sim y \iff y = tx \ (\forall t \in \mathbb{R} - \{0\})$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. 而实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 则是由这个等价关系构成的 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的商空间. 我们将点 $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的等价类记作 $[a_0, \dots, a_n]$ 并令 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 为投影. 我们称这个 $[a_0, \dots, a_n]$ 为 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标.



由上图可知, 虽然 $\mathbb{R}P^2$ 虽然不能嵌入为 $\mathbb{R}^3$ 的子流形, 但是如果允许自相交的话就可以形成下面这样的图案 (但这并非双射)。

命题. $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上的等价关系 $\sim$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 定义里是开等价关系。

推论. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是第二可数的。

命题. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 的。

实投影空间上的标准 C^∞ 图册

令 $[a_0, \dots, a_n]$ 是投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标. a_0 虽然不是一个 $\mathbb{R}P^n$ 上 well-defined 的函数, 但是 $a_0 \neq 0$ 是独立于 $[a_0, \dots, a_n]$ 代表元的选择的. 因此 $a_0 \neq 0$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 上是有意义的. 我们可以归纳地定义 $\forall i \in \mathbb{N}, U_i := \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{R}P^n | a_i \neq 0\}$. 和:

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [a_0, \dots, a_n] &\mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{\hat{a}_i}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) \end{aligned}$$

这里 $\hat{}$ 是指省略该项. 这证明了 $\mathbb{R}P^n$ 是以 (U_i, ϕ_i) 为图表的局部欧几里得的. 在交集 $U_0 \cap U_1$ 里, $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$, 于是就有两套坐标系:

$$\begin{array}{ccc} & [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] & \\ \swarrow \phi_0 & & \searrow \phi_1 \\ \left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right) & & \left(\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_n}{a_1} \right) \end{array}$$

在 U_0 上, 坐标函数为 $x_1, \dots, x_n$. 在 U_1 上, 坐标函数是 $y_1, \dots, y_n$.

在 U_0 , $\forall i \in \mathbb{N}, x_i = \frac{a_i}{a_0}$. 在 U_1 , $y_1 = \frac{a_0}{a_1}, y_2 = \frac{a_2}{a_1}, \dots, y_n = \frac{a_n}{a_1}$

因此 $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x}, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$

由于在 $\phi_0(U_0 \cap U_1)$ 上 $x_1 \neq 0$, 因此这是个光滑函数. 在其他 $U_i \cap U_j$ 上也可以得到类似式子, 因此 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=0, \dots, n}$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 的 C^∞ 图册, 称为标准图册. 这就包含了 $\mathbb{R}P^n$ 是光滑流形的证明.

切空间

定义. 流形 M 中点 p 的切向量为其在 p 的方向

定理. 链式法则

如果 $F : N \rightarrow M, G : M \rightarrow P$ 是流形的光滑映射且 $p \in N$ 的话, 有 $(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}$

推论. 如果 $F : N \rightarrow M$ 是流形的一个微分同胚且 $p \in N$, 那么 $F_* : T_p N \rightarrow T_p M$ 是向量空间的同构

推论. 维数不变性

如果开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 微分同胚于开集 $V \subset \mathbb{R}^m$, 那么 $n = m$.

命题. 令 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 是一个关于流形 M 中的点 p 的图表, 那么 $\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)}$

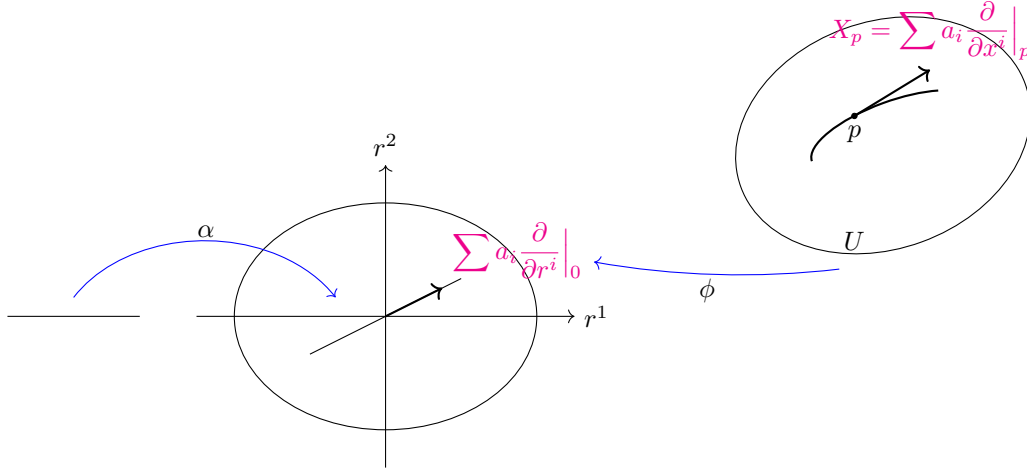
命题. 如果 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 是一个包含点 p 的图表, 那么切空间 $T_p M$ 有基 $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$

命题. 坐标向量变换矩阵

令 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 和 $(V, y^1, \dots, y^n)$ 是流形 M 的两个坐标图表, 那么在 $U \cap V$ 上 $\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$

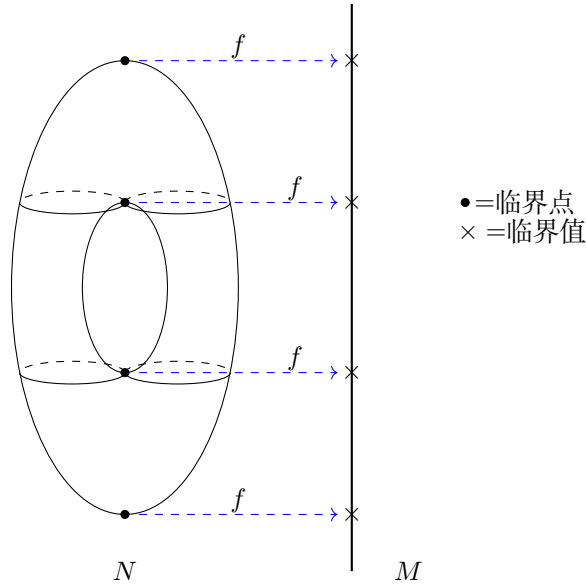
命题. $F: N \rightarrow M$ 是流形间的光滑映射, $p \in N$, 令 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 和 $(V, y^1, \dots, y^n)$ 是关于 $p \in N$ 和 $F(p) \in M$ 的坐标图表. 关于 $T_p N$ 的基 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\}$ 以及 $T_p M$ 的基 $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{F(p)} \right\}$, 微分映射 $F_{*,p}: T_p N \rightarrow T_p M$ 由矩阵 $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right]$ 表示. 这里 $F^i = y^i \circ F$, 是第 i 个分量.

命题. 对于流形 M 上所有的点 p , 以及所有的切向量 $X_p \in T_p M$, 对于 $\epsilon > 0$ 存在一个光滑曲线 $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ 使得 $c(0) = p$ 且 $c'(0) = X_p$



命题. 令 $F: N \rightarrow M$ 是一个流形间的光滑映射, $p \in N$, 并且 $X_p \in T_p N$. 如果 c 是一个开始于 $p \in N$ 的, p 点速度 X_p 的曲线, 那么有 $F_{*,p}(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_0 F \circ c(t)$.

定义. $p \in N$ 是 f 的临界点, 如果其微分 $f_{*,p}: T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ 不是满射. 反之, 如果这是满射, 那么该点为常规点. M 的一个点是临界值, 如果其像是临界点, 否则其为常规点.



命题. 对于实值函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, 点 $p \in M$ 是临界点, 当且仅当关于包含 p 的图表 $(U, x^1, \dots, x^n)$, $\forall j \in \mathbb{N}, \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0$

子流形

子流形

定义. 一个 n 维的流形 N 的开子集 S 是 k 维正则子流形, 如果 $\forall p \in S$, N 的图册中存在一个 p 的坐标邻域 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$, 使得 $U \cap S$ 可以由 $n - k$ 个坐标函数的消失来定义.

我们称 N 的这样一个图表 (U, ϕ) 是相对于 S 的适配图.

定义. 如果 S 是 n 维流形 N 的一个 k 维正则子流形, 那么我们称 $n - k$ 为 S 在 N 的余维.

函数的零集

一个映射 $f: N \rightarrow M$ 的水平集定义为 $f^{-1}(\{c\}) = \{p \in N | f(p) = c\}$ 对于 $c \in M$.

定理. 令 $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ 是流形 N 的一个 C^∞ 函数. 那么非空正则水平集 $S = f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维为 1 的正则子流形

正则水平集定理

定理. 令 $f: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 n 维流形 N 上的一个 C^∞ 映射. 那么一个非空正则水平集 $S = f^{-1}(c)$ 是 N 的一个 $n - m$ 维的正则子流形.

定理. 正则水平集定理

令 $f: N \rightarrow M$ 是流形间的 C^∞ 映射, 并且 $\dim N = n, \dim M = m$, 那么一个非空正则水平集 $f^{-1}(c)$ 是维度 $n - m$ 的流形 N 的正则子流形.

范畴与函子

光滑流形的秩

常秩定理

定理. 常秩定理

令 N, M 分别是维度为 n, m 的流形. 设 $f: N \rightarrow M$ 在 $p \in N$ 的邻域有常秩 k , 那么存在以 $p \in N$ 为中心的图表 (U, ϕ) 和以 $f(p) \in M$ 为中心的 (V, ψ) , 使得在 $\phi(p)$ 的邻域, $\psi \circ \phi^{-1}(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^n, 0, \dots, 0)$

定理. 常值水平集定理

令 $f: N \rightarrow M$ 是流形间的光滑映射, $c \in M$. 如果 f 在水平集 $f^{-1}(c) \in N$ 的邻域有常秩 k , 那么 $f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维 k 的正则子流形.

浸入与浸没

定义. 一个流形间的光滑映射 $f: N \rightarrow M$ 是浸入, 如果对于 $\forall p \in N$ 的微分 $f_{*,p}: T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ 都是单射. 如果是满射那么被称为浸没.

例. 显然, 浸入的一个经典例子是 $\iota(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ 这样的向更高维的拓展. 而浸没的例子则是 $\pi(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$ 这样向更低维的投影.

命题. 令流形 N, M 的维度分别为 n, m . 如果一个光滑映射 $f: N \rightarrow M$ 是 $p \in N$ 的一个浸入, 那么其在 p 的邻域上有常秩 n . 如果一个光滑映射 $f: N \rightarrow M$ 是 $p \in N$ 的一个浸没, 那么其在 p 的邻域上有常秩 m .

定理. 令流形 N, M 的维度分别为 n, m .

(i) **浸入定理** 令 $f: N \rightarrow M$ 是 $p \in N$ 的一个浸入, 那么存在一个以 $p \in N$ 为中心的图表 (U, ϕ) 和以 $f(p) \in M$ 为中心的图表 (V, ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域, 有

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^n, 0, \dots, 0)$$

(ii) **浸没定理** 令 $f: N \rightarrow M$ 是 $p \in N$ 的一个浸没, 那么存在一个以 $p \in N$ 为中心的图表 (U, ϕ) 和以 $f(p) \in M$ 为中心的图表 (V, ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域, 有

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(r^1, \dots, r^m, r^{m+1}, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^m)$$

推论. 一个流形间的浸没 $f: N \rightarrow M$ 是一个开映射

光滑映射的像

定理. 如果 $f: N \rightarrow M$ 是一个嵌入, 那么其像 $f(N)$ 是 M 的一个正则子流形.

定理. 如果 N 是 M 的一个正则子流形, 那么包含映射 $\iota: N \rightarrow M, \iota(p) = p$ 是一个嵌入

光滑映射到子流形

定理. 令 $F: N \rightarrow M$ 是 C^∞ 的, F 的像在 $S \subset M$ 中. 如果 S 是 M 的一个正则子流形, 那么诱导映射 $F: N \rightarrow S$ 是 C^∞ 的.

切丛

切丛的拓扑

$$\text{令 } TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M$$

引理. 令 U, V 是 M 上的一个坐标开集. 如果 A 在 TU 上是开的, B 在 TV 上是开的, 那么 $A \cap B$ 在 $T(U \cap V)$ 上是开的.

引理. 流形 M 包含由坐标开集构成的可数基.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是第二可数的.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是 Hausdorff 的.

切丛上的流形结构

如果 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 M 的一个 C^∞ 图册, 那么 $\{(TU_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 TM 的 C^∞ 图册

向量丛

定义. 给定 $\pi: E \rightarrow M$, 我们称对于 $\forall p \in M$, 逆像 $\pi^{-1} := \pi^{-1}(\{p\})$ 为在 p 点的纤维, 记作 E_p .

一个满射的流形间的光滑映射 $\pi: E \rightarrow M$ 是 r 阶局部平凡的, 如果:

- (i) 每个纤维 $\pi^{-1}(p)$ 都是 r 维的向量空间
- (ii) 对于每个 $p \in M$, 存在 p 的一个开邻域 U 和纤维保持微分同胚 $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$, 使得对于 $\forall q \in U$, 该映射将纤维 $\pi^{-1}(p)$ 映射为相应的纤维 $q \times \mathbb{R}^r$ 作为向量空间同构. $\{U\}$ 作为 M 的一个开覆盖, 集合 $\{(U, \phi)\}$ 是 E 的一个局部平凡化, 同时 $\{U\}$ 称为对于 E, M 的一个平凡化开集.

一个 C^∞ 的秩 r 的向量丛是 (E, M, π) , 包含流形 E, M , 和一个 r 阶局部平凡的光滑满射 $\pi: E \rightarrow M$, E 是总空间, M 是基空间. 我们也可以称 E 为 M 的向量丛.

截面

定义. 流形 M 上的一个向量场 X 是分配切向量 $X_p \in T_p M$ 到每个 $p \in M$ 的函数. 对于切丛而言, M 上的向量场是切丛 $\pi: TM \rightarrow M$ 的一个截面

向量场是光滑的, 如果 M 到 TM 的映射是光滑的

凸函数与单位分解

C^∞ 凸函数

定义. 流形 M 上, C^∞ 函数 f 的支集定义为 $\text{supp } f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$

$q \in M$ 且 U 为 q 的一个邻域的话, 在 p 的凸函数指的是任何一个连续函数 f , 它在 q 的邻域里恒为 1, 且 $\text{supp } f \subset U$

命题. C^∞ 函数的延拓

假设 f 是一个定义在 $q \in M$ 的邻域 U 的光滑函数, 那么存在一个 M 上的光滑函数 $\tilde{f}$ 使得在 q 的更小的邻域内与 f 一致.

单位分解

定义. 如果 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 M 的一个有限开覆盖, 那么从属于 $\{U_i\}$ 的 C^∞ 单位分解是一组非负的 C^∞ 函数 $\{\rho_i\}_{i \in I}$, 满足:

- (i) $\sum \rho_i = 1$
- (ii) $\text{supp} \rho_i \subset U_i$

定义. 一个流形上的 C^∞ 单位分解是指一组 C^∞ 函数 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使得:

- (i) $\{\text{supp} \rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是局部有限的
- (ii) $\sum \rho_\alpha = 1$

单位分解的存在性

引理. 如果 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 是流形 M 上的实值函数, 那么 $\text{supp} \left(\sum \rho_i \right) \subset \bigcup \text{supp} \rho_i$

命题. 设 M 是一个紧流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 M 的一个开覆盖, 那么存在一个从属于 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$

定理. C^∞ 单位分解的存在性

令 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是流形 M 的一个开覆盖

- (i) 存在一个带有紧支集的 C^∞ 单位分解 $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$, 使得 $\forall k, \text{supp} \phi_k \subset U_\alpha$ 对某些 $\alpha \in A$ 成立
- (ii) 若对紧支集无要求, 那么存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}$

向量场

向量场的光滑性

命题. 一个 M 上的向量场 X 是光滑的, 当且仅当对于 M 上任意的光滑函数 f , 函数 Xf 在 M 上是光滑的

积分曲线

定义. 令 X 是一个流形 M 上的一个光滑向量场, $p \in M$. 开始于 p 的 X 的积分曲线是一个曲线 $c: (a, b) \rightarrow M$, 定义在开区间 (a, b) 上, 满足 $c(0) = p, c'(t) = X_{c(t)}$

定义. 我们称一个积分曲线是极大的, 如果其定义域不能扩展到更大的区间

局部流

定理. 令 V 是一个 $\mathbb{R}^n$ 的开集, $p_0 \in V, f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 函数. 那么微分方程 $\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = p_0$ 有唯一的光滑解 $y: (a(p_0), b(p_0)) \rightarrow V$, 其中 $(a(p_0), b(p_0))$ 是包含 0 的极大区间

定理. 令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集, $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 V 上一个光滑函数. 对于每个 $p_0 \in V$, 存在 $p_0 \in V$ 的一个邻域 $W, \epsilon > 0$, 和一个光滑函数 $y: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow V$, 使得对于 $\forall (t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times W$, $\frac{\partial y}{\partial t}(t, q) = f(y(t, q)), y(0, q) = q$

定义. 一个关于光滑流形上的开集 U 中的点 p 的局部流是一个光滑函数 $F: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow U$, 这里 ϵ 是正实数, W 是 $p \in U$ 的一个邻域, 使得 $F_t(q) = F(t, q)$ 的话, 有:

- (i) $F_0(q) = q$, 对于 $\forall q \in W$
- (ii) $F_t(F_s(q)) = F_{t+s}(q)$ 如果两边都被定义的话

李括号

假设 X, Y 是定义在流形 M 的开子集 U 上的两个光滑向量场, 将其视为作用在 $C^\infty(U)$ 的导子. 对于 $C^\infty(U)$ 中的函数 f, Yf 是 U 上的 C^∞ 函数, 定义为 $(XY)f := X(Yf)$ 的函数同样是 U 上的 C^∞ 函

数.

对于 $f, g \in C^\infty(U)$, 有

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X((Yf)g + fYg) \\ &= (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg) \end{aligned}$$

使 XY 不为导子的 $(Yf)(Xg), (Xf)(Yg)$ 是对称的. 于是我们只需要对 $XY(fg)$ 和 $YX(fg)$ 作差即可消掉, 从而得到 $XY - YX$ 是 $C^\infty(U)$ 的导子.

给定两个定义在 U 上的光滑向量场 $X, Y, p \in U$, 定义它们之间的李括号为

$$[X, Y]_p f = (X_p Y - Y_p X) f$$

这里 f 是 p 点任意 C^∞ 函数的芽.

命题. 如果 X, Y 是 M 上光滑的向量场的话, $[X, Y]$ 在 M 上也是光滑的

例. Jacobi 恒等式

$$\sum_{cyc} [X, [Y, Z]] = 0$$

定义. 李代数是一个实向量空间 V , 配有括积计算 $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, 对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, X, Y, Z \in V$, 满足以下性质:

(i) 双线性:

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z] \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y] \end{aligned}$$

(ii) 反交换性:

$$[Y, X] = -[X, Y]$$

(iii) Jacobi 恒等式:

$$\sum_{cyc} [X, [Y, Z]] = 0$$

定义. 一个李代数 V 的导子是一个线性映射 $D: V \rightarrow V$ 满足:

$$D[Y, Z] = [DY, Z] + [Y, DZ]$$

相关向量场

定义. 令 $F: N \rightarrow M$ 是流形间的光滑映射, 一个 N 上的向量场 X 是 F - 相关于 M 上的向量场 $\tilde{X}$, 如果对 $\forall p \in N, F_{*,p}(X_p) = \tilde{X}_{F(p)}$

命题. N 上的向量场 X 和 M 上的向量场 $\tilde{X}$ 是 F - 相关的, 当且仅当

$$\forall g \in C^\infty(M), X(g \circ F) = (\tilde{X}g) \circ F$$

命题. 令 $F: N \rightarrow M$ 是流形间的光滑映射. 如果 N 上的光滑向量场 X, Y 是 F - 相关于 M 上的光滑向量场 $\tilde{X}, \tilde{Y}$. 那么 $[X, Y]$ 是 F - 相关于 $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ 的

李群

李群的例子

定义. 李群是指一个 C^∞ 流形 G 在是一个群的同时, 满足以下运算是 C^∞ 的:

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\rightarrow G, \mu(a, b) = ab \\ \iota: G &\rightarrow G, \iota(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

子李群

定义. 李群 G 的子李群是满足以下条件的抽象子群 H :

- (i) H 是一个抽象子群
- (ii) H 是通过包含映射定义的浸入子流形
- (iii) H 上的群运算是 C^∞ 的

命题. 如果 H 是一个抽象子群和一个李群 G 的正则子流形, 那么它是 G 的子李群

定理. 闭子群定理

一个闭的李群的子群是一个嵌入的子李群

矩阵的迹

定义 $n \times n$ 矩阵 X 的迹为 $tr(X) = \sum_{i=1}^n x_{ii}$

引理. (i) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, tr(AB) = tr(BA)$

(ii) $X \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in GL(n, \mathbb{R}), tr(AXA^{-1}) = tr(X)$

命题. 矩阵的迹等于其特征值的总和

命题. $\forall X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(e^X) = e^{tr X}$

行列式微分

命题. $\forall X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det_{*,I}(X) = tr X$

李代数

命题. 切空间 $T_I(SL(n, \mathbb{R}))$ 是包含所有迹 0 的矩阵的 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的子空间

命题. 一个李群 G 上左不变的向量空间 X 是光滑的

命题. 如果 X, Y 是 G 上的左不变向量场, 那么 $[X, Y]$ 也是

命题. 如果 $A, B \in T_e G$ 且 $\tilde{A}, \tilde{B}$ 是他们生成的左不变向量场, 那么 $[\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]^\sim$

命题. $A = \sum a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I, B = \sum b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I \in T_I(GL(n, \mathbb{R}))$

如果 $[A, B] = [\tilde{A}, \tilde{B}]_I = \sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big|_I$, 那么 $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj}$

定义. 令 $F: H \rightarrow G$ 是李群间的一个光滑映射. 定义 $F_*: L(H) \rightarrow L(G)$ 为 $F_*\left(\tilde{A}\right) = (F_*A)^\sim, \forall A \in T_e H$

定义. 李群 H, G 的映射 $F: H \rightarrow G$ 是李群同态, 如果这是个光滑映射且这是个群同态

命题. 如果 $F: H \rightarrow G$ 是李群同态, $A \in T_e H$ 是在 H 的单位 e 处的切向量, 那么 G 上的左不变向量场 F_*A 是 F - 相关于 H 上的左不变向量场 $\tilde{A}$

微分 1- 形式

函数的微分

定义. 如果 f 是一个在流形 M 上的光滑的函数, 其微分定义为 M 上的 1- 形式使得 $\forall p \in M$ 且 $X_p \in T_p M$ 的话 $(df)_p(X_p) = X_p f$

命题. 如果 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑的, 那么 $\forall p \in M, X_p \in T_p M$, 有 $f_*(X_p) = (df)_p(X_p) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{f(p)}$

微分 1- 形式的局部表示

令 $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ 是流形 M 上的坐标图, 那么微分 $dx^1, \dots, dx^n$ 是 U 上的 1- 形式

命题. 对于每个 $p \in U$, 余向量 $(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p$ 构成了对偶于以 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ 为基的切空间 $T_p M$ 的余切空间 $T_p^* M$ 的基

外微分

定义. 流形 M 上的外微分/外导数是一个 $\mathbb{R}$ - 线性映射 $D: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ 满足:

(i) D 是 1 阶反导数

(ii) $D \circ D = 0$

(iii) 如果 f 是光滑函数, X 是流形 M 上的光滑向量场, 那么 $(Df)(X) = Xf$

局部算子

定义. 算子 $D: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ 被称为是局部的, 如果对于 $\forall k \geq 0$, k - 形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 在开集 U 上限制为 0, 那么在 U 上有 $D\omega \equiv 0$

命题. 任意 $\Omega^*(M)$ 上的反微分 D 都是局部算子

从局部形式拓展到全局形式

命题. 令 τ 是 M 的一个开集 U 上的光滑微分形式. 对于 $\forall p \in U$, M 上存在一个光滑全局形式 $\tilde{\tau}$ 在 $p \in U$ 的邻域上与 τ 一致

外导数的存在性和唯一性

定向

定向和 n - 余向量

引理. $u_1, \dots, u_n$ 和 $v_1, \dots, v_n$ 是向量空间 V 的向量, 令 $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i, j = 1, \dots, n$, 对于实矩阵 $A = [a_{ij}]$. 如果 ω 是一个 V 上的 n - 余向量, 那么 $\omega(u_1, \dots, u_n) = (\det A) \omega(v_1, \dots, v_n)$

流形上的定向

定义. n 维流形 M 是可定向的, 如果其有一个光滑的无处消失 (Nowhere-Vanishing) 的 n - 形式

命题. U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集, 一个光滑映射 $F: U \rightarrow V$ 是保向的, 当且仅当 Jacobi 行列式 $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]$ 在 U 上每处都是正的

定向与图册

定义. M 上的图册被称作定向的, 如果对于图册上任意的两个重叠图 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 和 $(V, y^1, \dots, y^n)$, Jacobi 行列式 $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$ 在 $U \cap V$ 上任意位置都是正的

命题. n 维流形 M 有一个光滑的无处消失的 n - 形式 ω , 当且仅当其拥有可定向图册

定义. 流形 M 的两个定向图册 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ 是等价的, 如果变换函数

$$\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$$

对于所有的 α, β , Jacobi 行列式都是正的

有界流形

区域不变

定义. $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个任意子集, 函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $p \in S$ 是光滑的, 如果存在 $p \in \mathbb{R}^n$ 的邻域 U 和光滑函数 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得在 $U \cap S$ 上 $\tilde{f} = f$. 这个函数在 S 上是光滑的如果其在 S 的每个点上都是光滑的

定理. C^∞ 局域不变

令 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开子集, $S \subset \mathbb{R}^n$ 是任意子集, $f: U \rightarrow S$ 是微分同胚. 那么 S 在 $\mathbb{R}^n$ 是开的

有界流形

定义. 一个拓扑有界 n -流形是一个局部 $\mathbb{H}^n$ 的第二可数的 Hausdorff 拓扑空间

维数大于 1 的流形的边界定向

引理. 假设 $n \geq 2$. 令 (U, ϕ) 和 (V, ψ) 是可定向流形 M 的定向图册里的两个图. 假设 $U, V, \partial M$ 有非空交叉, 那么过度函数对边界的限制 $B := \phi(U \cap V) \cap \partial \mathbb{H}^n$

$$\psi \circ \phi^{-1} \Big|_B : \phi(U \cap V) \cap \partial \mathbb{H}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \cap \partial \mathbb{H}^n$$

有正的 Jacobi 行列式

De Rham 上同调

De Rham 上同调

令 $Z^k(M)$ 为流形 M 上所有闭的 k -形式的向量空间, $B^k(M)$ 为所有恰当的 k -形式的向量空间. 因为所有的恰当形式都是闭的, 于是 $B^k(M)$ 是 $Z^k(M)$ 的子空间

广相

度规张量场

定义. 向量空间 V 上的一个度规 g 是 V 上一个对称、非退化的 $(0, 2)$ 型张量. 对称指 $g(v, u) = g(u, v), \forall v, u \in V$, 非退化是指 $g(v, u) = 0, \forall u \in V \Rightarrow v = 0 \in V$

定义. 向量 $u, v \in V$ 是相互正交的, 如果 $g(v, u) = 0$.
 V 的基底是正交归一的, 如果其满足

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ \pm 1 & \mu = \nu \end{cases}$$

因此度规在正交归一基底的分量排成的矩阵是对角矩阵, 且对角元是 $+1$ 或 -1 .

定义. 用正交归一基底写成对角矩阵后, 对角元全是 $+1$ 的度规是正定的或是黎曼的, 对角元全为 -1 的度规叫负定的, 其余度规称为不定的. 只有一个对角元为 -1 的不定度规称为洛伦兹的. 对角线之和称为度规的号差

注意. 关于洛伦兹度规, 在一种习惯中, 四维洛伦兹度规的对角元是 $(-1, 1, 1, 1)$, 号差是 $+2$, 而在另外一种习惯中, 采用的是 $(1, -1, -1, -1)$, 号差是 -2 . 为了方便采用前者

定义. 带洛伦兹度规 g 的向量空间 V 的元素有三种

$$\begin{cases} g(v, v) > 0 & \text{类空向量} \\ g(v, v) = 0 & \text{类光向量} \\ g(v, v) < 0 & \text{类时向量} \end{cases}$$

而这在号差为 -2 的度规下则是相反的

定义. 流形 M 上对称的、处处非退化的 $(0, 2)$ 型张量场称之为度规张量场

而度规场最大的作用就是定义曲线长度. 不妨先考虑最简单的二维欧氏空间, 假设曲线 $C(t)$ 在自然坐标系 $\{x, y\}$ 的参数式为 $x = x(t), y = y(t)$, 那么曲线的线元长的平方 dl^2 为

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt^2 \\ &= \left[(T^1)^2 + (T^2)^2 \right] dt^2 \\ &= |T|^2 dt^2 \end{aligned}$$

这里 T 是 $C(t)$ 的切向量, 由上可知, $dl = |T| dt$, 那么 $C(t)$ 的线长为 $l = \int |T| dt$.

上述过程可推导到带有正定度规场 g 的任意流形 M 上. 设 $C(t)$ 是 M 上任意 C^1 曲线, T 是其切向量, 那么 $|T| = \sqrt{g(T, T)}$, 线长自然定义为 $l := \int \sqrt{g(T, T)} dt$.

对于有洛伦兹度规场 g 的流形 M , 如果该曲线所有的切向量都类空的话, 该曲线为类空曲线, 类似地, 我们可以定义类时曲线和类光曲线. 而由于类时曲线 $g(T, T) < 0$, 因此流形 M 上洛伦兹度规场 g 的线长的定义为 $l := \int \sqrt{|g(T, T)|} dt, T \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

由于线长与其参数化无关, 那么当然也和坐标系无关. 但如果其位于坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域内的话, 线长也可以借助坐标系来计算

$$\begin{aligned} g(T, T) &= g\left(T^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= T^\mu T^\nu g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right) \left(\frac{dx^\nu}{dt}\right) g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

由于 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 含有度规 g 在所涉及的坐标系的全分量 $g_{\mu\nu}$, 因此可以直接读出度规的全部坐标分量

例如, 设二维流形上的度规 g 在坐标系 $\{t, x\}$ 的线元表示为 $ds^2 = -xdt^2 + dx^2 + 4dtdx$, 那么可以读出, $g_{tt} = -x, g_{xx} = 1, g_{tx} = g_{xt} = 2$, 因此给定线元表达式就等价于给出度规场

定义. 设流形 M 上的度规场是 g , 那么 (M, g) 称为广义黎曼空间.

这里 g 正定, 称为黎曼空间. 若 g 是洛伦兹, 那么叫伪黎曼空间.

下面给两个比较经典的例子, 欧氏空间和闵氏空间

定义. 令 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义的度规张量场 δ 为 $\delta := \delta_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$, 那么称 $(\mathbb{R}^n, \delta)$ 是欧氏空间, δ 为欧氏度规.

于是我们注意到 δ 在自然坐标系下的对偶坐标基底 $\{dx^\mu \otimes dx^\nu\}$ 的分量是 $\delta \equiv \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ +1 & \mu = \nu \end{cases}$, 因此欧氏度规下的线元表达式是 $ds^2 = \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. 若 $n = 2$, 那么显然 $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. 而由于

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) &= \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \delta_{\mu\nu} dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) dx^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \end{aligned}$$

因此 $\delta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \delta_{\alpha\beta}$.

事实上不止是自然坐标系满足

$$\begin{aligned} x' &= x + a & y' &= y + b \\ x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha & y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ x' &= -x & y' &= y \\ x' &= x & y' &= -y \end{aligned}$$

上面的四种方式定义的坐标系也满足, 其中前两个分别是平移和旋转, 后两种则是反射. 另一方面, $\delta_{\mu\nu}$ 是 δ 在笛卡尔系的分量, 其在非笛卡尔系的分量则不是 $\delta_{\mu\nu}$.

欧氏空间是最简单的黎曼空间, 而与之相对的最简单的伪黎曼空间闵氏时空里, 为了突出四维洛伦兹度规对角化后对角元的 -1 , 将其所在的行和列记作 0 行 0 列. 对角线的元素记作 $\eta_{\mu\nu}$, 即 $\eta_{00} \equiv -1, \eta_{11} \equiv$

$$\eta_{22} \equiv \eta_{33} \equiv 1, \text{ 若是推广到 } n \text{ 维的话, } \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ -1 & \mu = \nu = 0 \\ +1 & \mu = \nu = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

定义. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标, 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的度规张量场 η 为 $\eta := \eta_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$, 则 $(\mathbb{R}^4, \eta)$ 是 n 维闵氏空间, η 是闵氏度规

和欧氏空间类似, 容易证明 $\eta \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \eta_{\alpha\beta}$.

同样的, 除了自然坐标系外, 我们也注意到

$$\begin{aligned} t' &= t + a & x' &= x + b \\ t' &= t \cosh \lambda + x \sinh \lambda & x' &= t \sinh \lambda + x \cosh \lambda \\ t' &= -t & x' &= x \\ t' &= t & x' &= -x \end{aligned}$$

类似的, 第一种是平移, 第二种是伪转动, 后两种是反射. 且 η 在非洛伦兹坐标基底的分量不等于 $\eta_{\mu\nu}$

抽象指标记号

1. v^a 是向量, 上标 a 等价于 $\vec{v}$ 的 $\rightarrow$, 因此不会谈及 $a = 1$ 之类的问题. ω_a 是对偶向量, T_c^{ab} 代表 $(2, 1)$ 型张量. 虽然 v^a 和 v^b 代表相同向量, 但在写等式时要注意指标平衡, 不能出现 $\alpha v^a + v^b = w^a$ 的情况.

2. 重复上下抽象指标表示对这两个指标求缩并. 如:

$$T_a^a = T(e^{\mu*}; e_\mu) = T_\mu^\mu, T_a^{ab} = T(e^{\mu*}, \cdot; e_\mu), T_b^{ab} = T(\cdot, e^{\mu*}; e_\mu)$$

3. 张量积记号省略. 例如 $T \in \mathcal{T}_V(2, 1), S \in \mathcal{T}_V(1, 1)$, 那么 $T \otimes S$ 记作 $T_c^{ab} S_e^d \cdot \omega \otimes \mu(v, u)$ 既可以写成 $\omega_a \mu_b v^a u^b$ 也可以写成 $\mu_b \omega_a v^a u^b$, 由于 $\omega_a \mu_b$ 和 $\mu_b \omega_a$ 的作用对象都是 $v^a u^b$, 因此 $\omega_a \mu_b = \mu_b \omega_a$. 换言之代表张量的字母带着自己的抽象指标可以交换, 而张量积的不可交换性体现在 $\omega_a \mu_b \neq \omega_b \mu_a$.

4. 在涉及张量的分量时, 相应的指标 (具体指标) 类似于 μ, ν, α, β 则可以被问及 $\mu = 1$ 还是 $\mu = 2$ 这样的问题. 张量在基矢上的展开式 $T = T_\sigma^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma*}$ 写作 $T_c^{ab} = T_\sigma^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\sigma)_c$.

5. $\nu_a = g_{ab} \nu^b, \omega^a = g^{ab} \omega_b$ 表明, 可以用 g_{ab}, g^{ab} 对上下指标做下降, 上升处理.

例. 四维闵氏度规 η_{ab} 的抽象指标表达式

按照定义, $\eta_{ab} := \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b$, 这里 $\{(dx^\mu)_a\}$ 是洛伦兹坐标系的对偶基底, 于是

$$\eta_{ab} = -(dt)_a (dt)_b + (dx)_a (dx)_b + (dy)_a (dy)_b + (dz)_a (dz)_b$$

这与线元表达式 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 相对应. 采用球坐标系 $\{t, r, \theta, \phi\}$ 的话, 可以得到

$$\eta_{ab} = -(dt)_a (dt)_b + (dr)_a (dr)_b + r^2 (d\theta)_a (d\theta)_b + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)_a (d\phi)_b$$

这和线元表达式 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ 相对应.

在抽象指标记号中, 坐标基矢记作 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$, 对偶坐标基矢记作 $(dx^\mu)_a$, 用度规 g_{ab} 和 g^{ab} 分别进行降, 升指标, 得对偶向量 $g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$ 和向量 $g^{ab} (dx^\mu)_b$. 用 ω_a 简记 $g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$ 并用对偶向量基矢展开为 $g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = \omega_\nu (dx^\nu)_a$, 两边作用于 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$ 后得到 $g_{\sigma\mu} = \omega_\sigma$. 因此 $g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = g_{\mu\nu} (dx^\nu)_a$, 类似可得 $g^{ab} (dx^\mu)_b = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a$. 当 $g_{ab} = \delta_{ab}$ 且 $\{x^\mu\}$ 为笛卡尔系的话, 有

$$\delta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = (dx^\mu)_a \delta^{ab} (dx^\mu)_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

当 $g_{ab} = \eta_{ab}$ 且 $\{x^\mu\}$ 为洛伦兹系的话,

$$\begin{aligned} \eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^b &= -(dx^0)_a \eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = (dx^i)_a \\ \eta^{ab} (dx^0)_b &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^a \eta^{ab} (dx^i)_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \end{aligned}$$

此时的 i 不是抽象指标而是具体的 $i = 1, 2, 3$

张量的上指标和下指标通常被称作逆变指标和协变指标, 相应的, 向量 ν^a 和对偶向量 ω_a 分别称为逆变矢量和协变矢量.

定义. $(0, 2)$ 型张量 T_{ab} 的对称部分 $T_{(ab)}$ 和反称部分 $T_{[ab]}$ 分别定义为

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &:= \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba}) \\ T_{[ab]} &:= \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba}) \end{aligned}$$

一般地, $(0, l)$ 型张量 $T_{a_1 \cdots a_l}$ 的对称和反称部分定义为

$$\begin{aligned} T_{(a_1 \cdots a_l)} &:= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}} \\ T_{[a_1 \cdots a_l]} &:= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}} \end{aligned}$$

这里 π 是指排列

导数算符

定义. 令 $\mathcal{F}_M(k, l)$ 代表流形 M 上全体 C^∞ 的 (k, l) 型张量场的集合. (函数可以看作 $(0, 0)$ 型张量场 (标量场), 因此 $\mathcal{F}_M(0, 0) \equiv \mathcal{F}_M$). 映射 $\nabla: \mathcal{F}_M(k, l) \rightarrow \mathcal{F}_M(k, l+1)$ 称为 M 上的无挠导数算符, 如果有:

1. $\nabla_a (\alpha T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} + \beta S_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}) = \alpha \nabla_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} + \beta \nabla_a S_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}, \forall T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}, S_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} \in \mathcal{F}_M(k, l), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\nabla_a (T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} S_{e_1 \dots e_{l'}}^{d_1 \dots d_{k'}}) = T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} \nabla_a S_{e_1 \dots e_{l'}}^{d_1 \dots d_{k'}} + S_{e_1 \dots e_{l'}}^{d_1 \dots d_{k'}} \nabla_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k},$
 $\forall T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} \in \mathcal{F}_M(k, l), S_{e_1 \dots e_{l'}}^{d_1 \dots d_{k'}} \in \mathcal{F}_M(k', l')$
3. 与缩并可交换顺序
4. $\nu(f) = \nu^a \nabla_a f, \forall f \in \mathcal{F}_M, \nu \in \mathcal{F}_M(1, 0)$
5. $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, \forall f \in \mathcal{F}_M$

定理. $C_{ab}^c = C_{ba}^c$

我们将与坐标系无关的那些 ∇_a 称为协变导数算符

定义. 设 ∂_a 是 (M, ∇_a) 是任给的坐标系的普通导数算符, 那么体现 ∇_a 和 ∂_a 的差别的张量场 C_{ab}^c 称为 ∇_a 在该坐标系的克里斯托费尔符号, 记作 Γ_{ab}^c

定理. 流形 M 上选定度规场 g_{ab} 后, 存在唯一的 ∇_a 使得 $\nabla_a g_{bc} = 0$

满足 $\nabla_a g_{bc} = 0$ 的 ∇_a 称为与 g_{bc} 适配的导数算符. 那么不难注意到

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \Gamma_{ab}^c (dx^\sigma)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^b \\ &= \frac{1}{2} (dx^\sigma)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^b g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\nu\rho, \mu} + g_{\mu\rho, \nu} - g_{\mu\nu, \rho}) \end{aligned}$$

不妨试着计算克里斯托费尔符号的具体例子.

例. 考虑二维极坐标的线元 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

那么对应的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和逆 $g^{\mu\nu}$ 分别为 $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ 和 $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$. 这里 μ, ν 为 r, θ

接着考虑克里斯托费尔符号为 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$

由于 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ 的话, 需要实际计算的 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 并不多

1. 对于 $\lambda = r$

$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2} g^{r\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\partial_\mu g_{\nu r} + \partial_\nu g_{\mu r} - \partial_r g_{\mu\nu})$ (这里, 由于 $g^{r\sigma}$ 仅在 $\sigma = r$ 的时候非零)

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} \partial_r (1) = 0 \\ \Gamma_{r\theta}^r &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{\theta r} + \partial_\theta g_{rr} - \partial_r g_{r\theta}) = \frac{1}{2} (0 + 0 - 0) = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (-2r) = -r \end{aligned}$$

2. 对于 $\lambda = \theta$

$\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (\partial_\mu g_{\nu r} + \partial_\nu g_{\mu r} - \partial_r g_{\mu\nu})$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^\theta &= \frac{1}{2r^2} (\partial_r g_{r\theta} + \partial_r g_{\theta r} - \partial_\theta g_{rr}) = 0 \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2r^2} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) = \frac{1}{2r^2} \partial_\theta (r^2) = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2r^2} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2r^2} \partial_\theta (r^2) = 0 \end{aligned}$$

接着我们考虑一个稍微复杂的情况，比如史瓦西度规首先考虑史瓦西度规的线元表示，即

$$ds^2 = -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

接着我们用 x^0 来表示时间坐标 t ， (x^1, x^2, x^3) 分别代表 (r, θ, ϕ) 接着度规分量 $g_{\mu\nu}$ 和逆 $g^{\mu\nu}$ 分别是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

同时我们使用自然单位制，即 $G = c = 1$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta \\ \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta \end{aligned}$$

定义. (M, ∇_a) 上的曲线 $\gamma(t)$ 是测地线，如果其切向量 T^a 满足 $T^b \nabla_b T^a = 0$

参考文献