2024/10/14(月) 参考問題

1. 積分 $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ が始点と終点で決まり、途中の経路によらないときは、ある関数 $U(x,y,z)$ が存在し、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

が成り立つことをしめせ。このとき $\boldsymbol{F}$ を保存力、U をポテンシャルと呼ぶ。O を基準点、P を任意の点として、

$$\int_O^P \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -U_P$$

とおく。十分近くにある 2 点 A, B を考えればよい。

2. 平面内で働く力 $F_x = -axy,\ F_y = -\frac{1}{2}ax^2 - y^2$ がある。この力は保存力か？　保存力ならばポテンシャルを求めよ。

3. ３次元においてポテンシャルが $U = \mu/r$ のとき働く力の大きさを求め、向きを説明しなさい。ただし、$\mu > 0, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。

4. $v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\dot{\varphi}$ であることを図を書いて説明せよ。

5. $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ と極座標表示を行う。ここで r,φ は時間の関数であることに注意し、x, y を時間で微分することにより、v_x, v_y を r,φ などを用いて表せ

6. 運動エネルギー K が $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ であることを示せ。

7. v_x, v_y を時間で微分することにより $\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}$ を r,φ などを用いて表せ。

8.
$$a_r = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi, a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi$$

であることを説明せよ。

9. a_r, a_φ を r,φ などを用いて表せ。

課題
極座標において $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ を単位ベクトルとする。

1.
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r$$

であることを説明せよ。

2.
$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

を時間で 2 回微分することにより、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

となることを示せ。