参考問題 2024/10/23

1. ある点に関する角運動量 $\vec{L}$ の方向が不変な場合、質点の運動は一つの平面内で行われることを示せ。
2. 質点に中心力のみが働くときに、角運動量は一定に保たれることを示せ。
3. 万有引力を受けて運動している天体の運動方程式

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -G\frac{M}{r^2}, \quad r^2\dot{\varphi} = h$$

   から $u = \frac{1}{r}$ と変数変換し、時間を消去することにより、$u(\varphi)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

   が得られることを示せ。
4. $u = GM/h^2$ が u に対する微分方程式を満たす（特解である) ことを示し、u の一般解を求めよ。

課題

1. 長さ 2ℓ の質量の無視できる棒の中点を支点として、棒の両端にそれぞれ質量 m の質点をおもりとしてつけた。重力加速度の大きさを g とする。支点における摩擦はないとする。鉛直線と棒のなす角度を φ のところで静止させた。2 つの質点による力のモーメントをそれぞれ求めよ。なお棒を時計回りに回転させようとする力のモーメントの大きさと棒を反時計回りに回転させようとする力のモーメントの大きさが等しいため、棒は回転せずに静止を続ける。
2. $f(r) = -\frac{GmM}{r^2}$ とする。円運動の場合 r 方向の運動方程式から、惑星の速さは軌道半径の平方根に逆比例することを示せ。またケプラーの第三法則が成り立っていることを示せ。