2023/10/31(火)
参考問題
太陽 (質量 M) からの万有引力を受けて運動している質量 m の天体を考える。

1. 楕円とは 2 つの焦点からの距離の和が一定 $(2a)$ の点の集合である。楕円は一方の焦点を中心とする極座標表示にて
$$r = \frac{\ell}{1+\varepsilon\cos\varphi}, a = \frac{\ell}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$
と表されることを示せ。ε を離心率と呼ぶ。

2.
$$r = \frac{\ell}{1+\cos\varphi}$$
は放物線であることを示せ。

3. 双曲線とは 2 つの焦点からの距離の差が一定 $(2a)$ の点の集合である。双曲線は一方の焦点を中心とする極座標表示にて
$$r = \frac{\ell}{1-\varepsilon\cos\varphi}, a = \frac{\ell}{\varepsilon^2-1}, \quad b = \frac{\ell}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$$
と表されることを示せ。

4. ケプラーの第一法則 (軌道は楕円) とケプラーの第二法則 (面積速度一定) から
$$\dot{r} = \frac{h}{\ell}\varepsilon\sin\varphi, \quad \ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{\ell r^2}$$
であることを示せ。(ヒント：楕円の式を $1/r =$ の式に変換し、両辺を時間で微分、$\dot{\varphi}$ は h, r で置き換える。$\dot{r}$ を時間で微分し、楕円の式を使って変形)

5. 問 2 の $\ddot{r} =$ の式を極座標の動径方向の運動方程式に代入することにより、惑星にかかる力が r の二乗に反比例する引力であることを示せ。

6. 近日点において、$\dot{r} = 0$, $r_m = (h^2/GM)/(1+\varepsilon)$ であることから、E と ε の関係を求めよ。

課題

1. 楕円軌道の場合、
$$r = \frac{\ell}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}, \ell = \frac{h^2}{GM}, a = \frac{\ell}{1-\varepsilon^2}, b = \frac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$
となる。楕円の面積$=\pi ab$、面積速度$=h/2$ であることから、周期 T は
$$T = \frac{\pi ab}{h/2}$$
とかける。$T^2 \propto a^3$ となることを示せ。これはケプラーの第三法則である。