参考問題　2024/11/4

1. 半径 R_0 の球対称な物体の全質量を M とし、その物体の外部に中心 O からの距離 $r(> R_0)$ の点 P に質量 m の質点をおいた。物体の中心を原点とする 3 次元極座標を用いる。

   (a) 質点からの距離 r、球の中心からの距離 R, OP と OQ のなす角度 θ となる点 Q での体積素片の体積が

   $$dV = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$$

   となることを説明せよ。

   (b) 点 Q での密度を ρ とし、点 P と点 Q 間の距離を s とする。(a) で求めた体積素片と質点が作るポテンシャルエネルギー dU を m, R, s, θ などを用いてあらわせ。

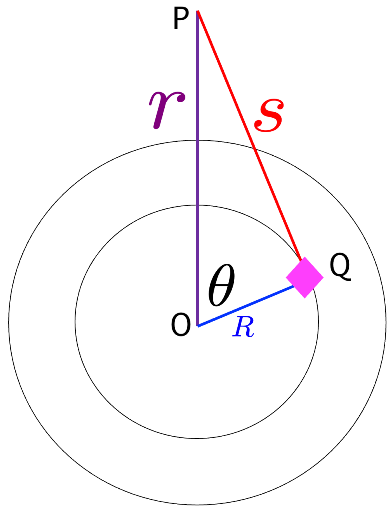
   (c) 以下の式を示せ。

   $$ds = \frac{1}{s} Rr \sin\theta d\theta$$

   (d) ポテンシャルは足し算できることから、(b) で求めた dU を R, θ, φ で積分することにより、質点と球対称な物体の間のポテンシャルエネルギーは

   $$U = -Gm \int_0^{R_0} dR \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho R^2 \sin\theta}{s}$$

   と表すことができる。θ の積分を s の積分に変換することにより、$U(r) = -G\frac{mM}{r}$ であることを示せ。ただし、M は球の全質量である。



2. 一様な球殻の内部では、万有引力はすべて打ち消しあって 0 になることを説明せよ。

3. 地球の密度を一様とする。地球の中心を通り、まっすぐ通り抜ける穴を掘ったと仮定する。穴に質点を落とした場合に、中心からの距離が x のときの運動方程式をかけ。質点はどのような運動をするか？

課題

一様な密度 ρ の半径 R, 厚さ dR の球殻の内部に点 P をとり、質量 m の質点をおいた。球殻の中心 O と P の距離を r とする。球殻の微小領域 Q までの距離を s とする。

1. Q の質量を dM とする。Q と質点が作るポテンシャル dU を $m, \rho_a, R, \theta, s, \varphi$ などをもちいてあらわせ。ただし、ρ_a=ρdR とする。

2. 　dU を R, θ, φ で積分することにより U を求めよ。質点に働く力はどのようになるか？