

2024/11/11

参考問題

2つの質点(質量 m_1, m_2 、位置ベクトル r_1, r_2) が中心力 $f(r)$ を及ぼしながら運動している。ただし、 r は2つの質点間の距離とする。

1. 2つの質点の運動方程式から、重心は等速度運動をすることを示せ。
2. 2つの運動方程式から相対座標 $r = r_2 - r_1$ 、換算質量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ を用いた運動方程式が

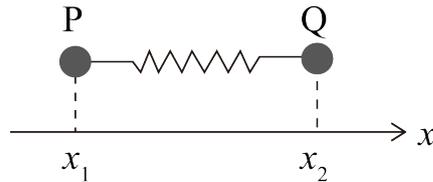
$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = f(r) \frac{r}{r}$$

と書けることを示せ。

3. 2つの星が互いの重力により重心の周りを回っている時の周期を求めよ。ただし、ケプラーの第3法則 ($T = 2\pi \sqrt{a^3 / GM}$) を用いてよい。
4. 質量 m_2 の天体の重心に対する運動は重心に $M = m_1^3 / (m_1 + m_2)^2$ の質量があるときの Q に対する運動方程式で表されることを示せ。

課題

質量 m_1, m_2 の2個の質点 P と Q がバネ定数 k であり自然長 l のバネに結ばれている。質点は x 軸上を運動しており、両端の質点の位置を x_1, x_2 とする。



1. 2つの質点の運動方程式をかけ。
2. 2つの運動方程式より重心の座標 X と相対座標 $x = x_2 - x_1$ に対する運動方程式を求めよ。これらの運動方程式を解くことにより、 P, Q それぞれの位置を時間の関数として求めよ。換算質量 μ を用いてよい。
3. P と Q の運動エネルギーの和が重心に全質量が集まったとしたときの重心の運動エネルギーと相対運動のエネルギーの和に等しいこと、すなわち

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2$$

であることを示せ。