2023/11/13
参考問題

1. N 個の質点からなる質点系を考える。j 番目の質点の質量を m_j, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_j$, 運動量を $\boldsymbol{p_j}$、j 番目の質点に働く外力を $\boldsymbol{F_j}$ とする。質点 k が質点 j に及ぼす力を $\boldsymbol{F_{kj}}$ とする。
   (a) 質点 1 に対する運動方程式をかけ。ただし、和の記号 $\sum$ を用いてよい。
   (b) 作用、反作用の法則を考えることにより、$\boldsymbol{F_{kj}}$ と $\boldsymbol{F_{jk}}$ の関係式をかけ。
   (c) 質点系の全運動量を $\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{p_j}$ とする。$\boldsymbol{F_{ii}} = 0$ であることに注意して、(b) の関係式を用い、質点系の全運動量の時間変化は外力の和に等しいことを示せ。
   (d) N 個の質点の重心への位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ とする。$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ を $m_j, \boldsymbol{r_j}$ などを用いて表わせ。
   (e) 質点系の全運動量は、その全質量 $(M = \sum_{j=1}^{N} m_j)$ と重心の速度の積に等しいことを示せ。
   (f) (c)(e) から、質点系の重心はその点に全質量が集まっていて、そこにすべて外力を合成した力がはたらいた場合と同じ運動をすることを示せ。
   (g) 重心から質点への位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'_j$ とする。

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\boldsymbol{r}'_j}{dt} = 0 \text{ を示せ。}$$

   (h) (g) の結果を用いて、質点系の全エネルギーは重心の運動エネルギーと重心の相対的な運動エネルギーの和に等しいことを示せ。

課題
ロケットは後方にガスを噴射することにより推力を得る。時刻 t におけるロケットの速度を v, 質量を m とする。時間 dt の間に質量 $-dm(dm < 0)$ のガスをロケットに対しての相対速度 u で後方に噴射し、ロケットの速度が dv だけ増加した。 なお、m, v は時間の関数であり、u は定数である。

1. 時刻 t と $t + dt$ における運動量が等しいことから、$\frac{dv}{u} + \frac{dm}{m} = 0$ となることを示せ。
2. $t = 0$ で $v = 0,\ m = m_0$ とする。ロケットの質量が m になったときの速度を m, m_0, u を用いて表せ。
3. 時刻 t でのロケットの質量は $m_0 - \alpha t$、α は一定である場合に、ロケットが鉛直上方に運動しているときの速度 v の時間変化を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。ただし、$t = 0$ で $v = 0$ とする。