2024/11/20
参考問題

1. 各質点の運動方程式に左から $\boldsymbol{r}_j$ をかけ、j について和をとることにより、質点系の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ の時間変化の割合 $(d\boldsymbol{L}/dt)$ は外力のモーメントの和 $(\boldsymbol{N} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j)$ に等しいことを説明せよ。

2. 質点系の全角運動量は重心が原点の周りにもつ角運動量と各質点の重心の周りの角運動量の和で表されることを説明せよ。以下の式が成り立つことを示せばよい。

$$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j) = \sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}'_j) \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'_j}{dt}\right) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}'_j$$

ただし、$\boldsymbol{P}$ は質点系の全運動量であり、また $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}, \boldsymbol{r}'_j$ はそれぞれ重心の位置ベクトルと重心から質点への位置ベクトルである。$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}'_j = 0$ の関係は用いてよい。

3. 質点系の全角運動量は重心が原点の周りにもつ角運動量 $(\boldsymbol{L}_{\mathbf{G}})$ と各質点の重心の周りの角運動量 $(\boldsymbol{L}')$ の和で表されることを説明せよ。以下の式が成り立つことを示せばよい。

$$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j) = \sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{r}'_j) \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'_j}{dt}\right) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}'_j$$

ただし、$\boldsymbol{P}$ は質点系の全運動量であり、また $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}, \boldsymbol{r}'_j$ はそれぞれ重心の位置ベクトルと重心から質点への位置ベクトルである。$\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{r}'_j = 0$ の関係は用いてよい。

4. $\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}}$ は力がすべて重心に集まったとしたときの原点のまわりの外力のモーメント、$\boldsymbol{N}'$ 重心のまわりの外力のモーメントとする。外力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は $\boldsymbol{N}_{\mathrm{G}}$ と $\boldsymbol{N}'$ の和でかけることを示せ。

$$\boldsymbol{N} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{N}'$$

5.
$$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}} \times \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{N}_{\mathrm{G}}, \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{N}'$$

となることを説明せよ。つまり、角運動量に対する運動方程式は重心に対する式と重心のまわりの角運動量に対する式に分けて書くことができる。

課題
両端に質量 m の質点 P と Q を取り付けた長さ 2ℓ の質量の無視できる棒が回転軸を z 軸として、xy 平面内を一定の角速度 ω で回転している。質点 P は常に原点に固定されているとし、質点 Q は半径 2ℓ の円運動を行なっているとする。

1. 質点 P の周りの全角運動量の大きさ L を求めよ。

2. 全質量が重心に集中したとしたときの重心が原点の周りに持つ角運動量の大きさ L_{G} を求めよ。

3. 重心の周りの運動による角運動量の大きさ L' を求め、$L = L_{\mathrm{G}} + L'$ が成り立つことを示せ。