参考問題 2024/12/4

1. xy 平面上の一般のベクトルを $\boldsymbol{A}(A_x, A_y)$ とする。原点を xy 座標と同一とし、反時計回りに角度 φ_0 だけ回転させた座標系を $x'y'$ とする。

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

となることを説明せよ。

2. 慣性系 S(xy) に対して一定の角速度 ω で回転する S' 系 $(x'y')$ を考える。 $\varphi_0 = \omega t$ となる。$x'y'$ から xy への変換は角度 $-\varphi_0 = -\omega t$ の回転より、

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \quad y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$

を t で 2 回微分することにより、

$$\ddot{x} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\cos\omega t - \left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = \left(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x'\right)\sin\omega t + \left(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'\right)\cos\omega t$$

となることを示せ。

3. 参考問題 1 より

$$F_{x'} = F_x\cos\omega t + F_y\sin\omega t, \quad F'_y = -F_x\sin\omega t + F_y\cos\omega t \quad \text{と表すことができる。}$$

参考問題 2 で求めた $\ddot{x}, \ddot{y}$ を $m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y$ に代入し、さらに上の式の F_x, F_y に代入することにより、

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$$

となることを示せ。第二項がコリオリの力、第三項が遠心力である。

4. S 系において、x 軸方向に Δt の間に $v\Delta t$ だけ進んだ。S' 系において、y' 方向への変位を生じるためには見かけの力 $F_{y'} = -2m\omega v$ が作用しているように見えることを説明せよ。

5. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'}$ とする。$\frac{d}{dt}\boldsymbol{i'} = \omega\boldsymbol{j'}, \frac{d}{dt}\boldsymbol{j'} = -\omega\boldsymbol{i'}$ であることを示せ。

6. 運動方程式は次のようにかける。

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2}{dt^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = m\frac{d^2}{dt^2}(x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'})$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r'}} = \boldsymbol{F} + m\omega^2\boldsymbol{r'} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v'}$$

となることを導け。

課題

水平面内で一端 O の周りに一定の角速度 ω で回転をするなめらかな菅の中にある質量 m の質点の運動を考える。菅に沿って x' 軸をとり、回転面内で x' 軸と垂直に y' 軸をとる。質点は x' 軸に沿って運動を行うとする。$t = 0$ において、$x' = a$, $\dot{x}' = 0$ であった。質点の位置と菅が質点に及ぼす抗力 S の時間変化を求めよ。