参考問題 2024/12/9

1. 慣性系である S 系 (xy) に対して原点を同じくし、一定の角速度 ω で回転する S' 系 $(x'y'")$ を考える。

   (a) S 系 (xy) において、x 軸方向に Δt の間に $v\Delta t$ だけ進んだ。S' 系 $(x'y')$ において、y' 方向への変位を生じるためには見かけの力 $F_{y'} = -2m\omega v$ が作用しているように見えることを説明せよ。

   (b) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'}$ とする。$\frac{d}{dt}\boldsymbol{i'} = \omega\boldsymbol{j'}, \frac{d}{dt}\boldsymbol{j'} = -\omega\boldsymbol{i'}$ であることを示せ。

   (c) 運動方程式は次のようにかける。

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2}{dt^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = m\frac{d^2}{dt^2}(x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'})$$

$$m\ddot{\boldsymbol{r'}} = \boldsymbol{F} + m\omega^2\boldsymbol{r'} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v'}$$

   となることを導け。

2. 慣性系である直交座標系 S 系 (成分 xyz 直交基底ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) に対して一定の角速度 ω で回転する直交座標系 S' 系 (成分 $x'y'z'$ 直交基底ベクトル $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}, \boldsymbol{k'}$) を考える。位置ベクトルは以下のように記述できる。

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i'} + y'\boldsymbol{j'} + z'\boldsymbol{k'}$$

   S 系の直交基底ベクトルの間には以下の関係式が成り立つ。S' 系についても同様。

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

3.

$$\boldsymbol{i'} \cdot \frac{d\boldsymbol{i'}}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{i'}}{dt} \cdot \boldsymbol{j'} + \boldsymbol{i'} \cdot \frac{d\boldsymbol{j'}}{dt} = 0$$

   となることを示せ。

4. S' 系に固定されている質点 (x', y', z' は時間変化しない) の位置ベクトルの場合、 時間で微分すると以下のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = x'\frac{d\boldsymbol{i'}}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j'}}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k'}}{dt}$$
$$\frac{d\boldsymbol{i'}}{dt} = \omega_{11}\boldsymbol{i'} + \omega_{12}\boldsymbol{j'} + \omega_{13}\boldsymbol{k'}$$
$$\frac{d\boldsymbol{j'}}{dt} = \omega_{21}\boldsymbol{i'} + \omega_{22}\boldsymbol{j'} + \omega_{23}\boldsymbol{k'}$$
$$\frac{d\boldsymbol{k'}}{dt} = \omega_{31}\boldsymbol{i'} + \omega_{32}\boldsymbol{j'} + \omega_{33}\boldsymbol{k'}$$

   とすると、直交座標系の場合、$\omega_1 = \omega_{23}, \omega_2 = \omega_{31}, \omega_3 = \omega_{12}$ となるベクトル $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{i'} + \omega_2\boldsymbol{j'} + \omega_3\boldsymbol{k'}$ を用いて次の式を示せ。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

5. $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ となることを図を書いて説明せよ。

課題

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$$

が成り立つことを示せ。ただし、d^*/dt は、基本ベクトルは微分しないで、成分だけ微分することを表す。（ヒント：$\boldsymbol{i'}$ などは S' 系上に固定されている。$\boldsymbol{A} = A_{x'}\boldsymbol{i'} + A_{y'}\boldsymbol{j'} + A_{z'}\boldsymbol{k'}$ を時間で微分してみよう。）