# Contents

# 1 基本定義

## 1.1 Riemann 計量

### 1.1.1 定義と構造

**Definition 1.1.** Riemann 計量
多様体 $M$ 上の Riemann 計量とは

1. $\forall p \in M$，正定値対称二次形式 $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ とする
2. この $g(p)$ は滑らかである．言い換えれば，$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$，関数

$$g(X, Y) : M \times \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(p)(X_p, Y_p)$$

は $C^\infty$ である

Riemann 計量 $g$ を持つ多様体 $M$ を Riemann 多様体と呼び，$(M, g)$ で表す．書く便利のため，$g|_p$ または $g_p$ で Riemann 計量 $g$ が点 $p$ に制限されたものを表す．また，$X \in T_pM$ に対して，$|X|_g$ または $|X|$ で $X$ が Riemann 計量 $g$ に関する長さ $g_p(X, X)^{\frac{1}{2}}$ を表す

**Definition 1.2.** 局所座標
Riemann 計量 $g$ の局所座標というのは，$M$ の任意の局所座標系 $(x^i)_{1\le i\le n}$ に対して，$\forall p \in U$，接空間 $T_pU$ は $\left\{\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{1\le i\le n}$ からなるので，$g_p$ は $\{g(\partial_1, \partial_2)\}_{1\le i,j\le n}$ で決める．このとき，Riemann 計量の定義より，これは $U$ 上の $C^\infty$ 関数族であり，局所で $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ で表す
具体的に書くと，$g = \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(p)\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ になる．幾何の教科書では，よく Einstein の縮約記法を使っている．例えば，$X^i\omega_i$ が表しているのは $\displaystyle\sum_{i=1}^n X^i\omega_i$．もう一つの例は，$g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$

**Remark 1.1.** $\{\partial_i\}$ に対して，Gram-Schmidt の正規直交化すると，局所で直交するベクトル場 $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ が存在し，$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ が成り立つ

**Remark 1.2.** $g(\partial_i, \partial_j)$ は正確な記法ではないけど，実際ここでは $g_p\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)$ である

**Theorem 1.1.** Riemann 計量の存在性
任意の微分多様体 $M$ に対し，Riemann 計量 $g$ は常に存在する

*Proof.* $M$ のある可算的な局所有限な局所座標系 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ を取る．ただし，$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ は局所座標を与える．開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\chi}$ に対して，単位分割を $\{\chi_\alpha\}_{\gamma\in\chi}$ とする．各 $U_\alpha$ 上で，$g_{\alpha,ij} = \delta_{ij}$（単位行列）とすると，$g = \displaystyle\sum_{\alpha\in\chi}\chi_\alpha g_\alpha$ は各 $U_\alpha$ の Riemann 計量である．$\mathrm{supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha$ は成り立つので，局所では有限である．よって，$g$ は well-defined であり，$C^\infty$ である．$g_\alpha$ は正定値であり，$\chi_\alpha \ge 0$ から，$g$ は全ての点では有限個（かつ少なくとも一つ）の正定値二次形式の線形結合であるので，$g$ は全ての点では正定値である．これは Riemann 計量の存在性を示している □

以下は Riemann 計量の性質を考える

1. はめ込み
   微分多様体 $M,N$ に対して，$\dim M \le \dim N$ とする．$f: M \to N$ がはめ込みとすると，$\forall p \in M, \exists U \subset M, \exists \left(x^i\right)_{1 \le i \le \dim M}, f(p) \exists V \subset N, \exists \left(y^j\right)_{1 \le j \le \dim N}, s.t.$ この二つの局所座標系で

$$f: \left(x^1, \cdots, x^{\dim M}\right) \mapsto \left(x^1, \cdots, x^{\dim M}, 0, \cdots, 0\right) \tag{1}$$

   陰関数定理より，$f$ ははめ込み $\iff \forall p \in M$，接写像 $f_*|_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ は単射である．$N$ 上で Riemann 計量 $g$ が与えられたとき，$f$ を用いて $M$ 上に Riemann 計量 $f^*g$ を次のように定義できる：$\forall p \in M, X, Y \in T_pM$

$$(f^*g)(p)(X,Y) := g|_{f(p)}\left(f_*|_p(X), f_*|_p(Y)\right) \tag{2}$$

   ここで $f_*$ は単射であるので，$f^*g_p$ は Riemann 計量である．また，次のような例を考える

   (a) 等長同型
   Riemann 多様体 $(M,g),(N,h)$ と微分同型 $f: M \to N$ に対して，$f^*g = h$ なら，Riemann 多様体 $(M,g)$ と $(N,h)$ は等長同型であるという．また，$f^*g = h$ であるとは，$\forall p \in M, X, Y \in T_pM, g_p(X,Y) = h|_{f(p)}\left(f_*|_p(X), f_*(Y)\right)$

   (b) 被覆写像
   微分多様体 $M,N$ と $C^\infty$ な被覆写像 $\pi: M \to N$ に対して，定義より，$\forall q \in N, q \in \exists V \subset N, \pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$．ただし，$\{U_i\}_{i \in I}$ は互いに交わらない開集合族であり，$\forall i \in I$，制限写像 $\pi|_{U_i}: U_i \to V$ は微分同型である．$N$ 上で Riemann 計量 $h$ を仮定すると，$\pi$ ははめ込みであるから，$M$ 上で Riemann 計量 $g = \pi^*h$ は定義でき，このとき，$\pi: (M,g) \to (N,h)$ を Riemann 被覆写像という．Riemann 被覆写像は明らかに局所等長同型写像である

   (c) 部分多様体
   $(M,g)$ を Riemann 多様体とし，$\Sigma$ は $M$ の部分多様体であるとする．このとき，包含写像 $\iota: \Sigma \subset M$ は標準的な包含写像であり，はめ込みである．よって，$\Sigma$ を $g|_\Sigma = \iota^*g$ で Riemann 計量を入れることができる．この $g|_\Sigma$ を $g$ が $\Sigma$ 上に誘導する Riemann 計量といい，$\not{g}$ と書く．定義より，$\forall p \in \Sigma, X, Y \in T_p\Sigma \subset T_pM, \not{g}|_p(X,Y) = g_p(X,Y)$

   **Remark 1.3.** 微分多様体の Whitney の埋め込み定理より，Riemann 多様体の Nash の埋め込み定理が導かれる：任意のコンパクトな無辺 Riemann 多様体 $(M,g), \exists N > 0, f: M \to \mathbb{R}^N, s.t. f^*\delta_{ij} = g$

2. Riemann 計量の積
   Riemann 多様体 $(M_1,g_1),(M_2,g_2)$ に対して，積多様体 $M_1 \times M_2$ 上で Riemann 計量 $g$ を次のように定義する：$\forall (p_1,p_2) \in M_1 \times M_2, T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2 \simeq T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$ より，$T_{(p_1,p_2)}M_1 \times M_2$ の接ベクトルは $(X_1,X_2)$ の形に書け，$X_i \in T_{p_i}M_i$ ので

$$g_1 \times g_2|_{(p_1,p_2)}\left((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\right) = g_1|_{p_1}(X_1,Y_1) + g_2|_{p_2}(X_2,Y_2) \tag{3}$$

   と定義する．これにより，この Riemann 多様体を $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ と書く

   **Example 1.1.** $\mathbb{R}^n$ 上で Euclid 計量 $\delta = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^n\right)^2$ を考えると，$\forall m,n, (\mathbb{R}^n,\delta) \times (\mathbb{R}^m,\delta)$ と $(\mathbb{R}^{m+n},\delta)$ は等長同型である

3. 沈め込み
   Riemann 多様体 $(M,g),(N,h)$ と微分多様体の間の沈め込み $f: M \to N$ に対し

て，$\dim M \geq \dim N = k$．沈め込みの定義より，$\forall p \in M, p \in \exists U \subset M$ と局所座標 $\left(x^i\right)_{1 \leq i \leq n}, \exists f(p) \in V \subset N$ と局所座標 $\left(y^j\right)_{1 \leq j \leq k}$ が存在し，この二つの局所座標系で

$$f : \left(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n\right) \mapsto \left(x^1, \cdots, x^k\right) \tag{4}$$

陰関数定理より，$f$ は沈め込み $\iff \forall p \in M$，接写像 $f_*|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ は全射である．$p \in M$ に対し，$V_p = \mathrm{Ker}\left(f_*|_p\right) \subset T_pM$，$\left(T_pM, g_p\right)$ は内積空間であるので

$$H_p := V_p^{\perp} = \left\{w \in T_pM | g_p(w, v) = 0, \forall v \in V_p\right\} \tag{5}$$

と定義できる．沈め込みの定義より，制限写像 $f_*|_p : H_p \to T_{f(p)}N$ は同型である．各 $H_p$ 上で $g_p|_{H_p}$ があるから，内積空間の間での線形同型がある：

$$f_*|_p : \left(H_p, g_p|_{H_p}\right) \to \left(T_{f(p)}N, h|_{f(p)}\right) \tag{6}$$

もし $\forall p \in M$，この同型は内積空間の間での同型であるなら，$f : (M, g) \to (N, h)$ は Riemann 沈め込みである

4. 共形写像
Riemann 多様体 $(M, g), (N, h)$ と微分同型 $f : M \to N$ に対して，$\exists \lambda \in C^\infty(M)$ が存在し，$\lambda > 0$ かつ $f^*h = \lambda g$ が成り立つとき，$f$ を共形写像という．$\forall X, Y \in T_pM$，内積 $g_p$ を用いてそれらのなす角 $\theta$ を定義できる：

$$\cos\left(\angle_g(X, Y)\right) = \frac{g_p(X, Y)}{\sqrt{g_p(X, X)}\sqrt{g_p(Y, Y)}} \tag{7}$$

で，定義より，$\cos\left(\angle_h\left(f_*|_p(X), f_*|_p(Y)\right)\right) = \cos\left(\angle_g(X, Y)\right)$

### 1.1.2 Riemann 計量から誘導される距離

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ に対し，$(M,g)$ 上の分割 $C^\infty$ 曲線は $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ と連続写像 $\gamma : [a,b] \to M$ が存在し，$\forall k \in \{1,2,\cdots,m\}$，写像 $\gamma|_{[c_{k-1},c_k]}$ は $C^\infty$ である．定義より，$t \neq c_k$ のとき，$\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$ は曲線 $\gamma(t)$ での接ベクトルである．$|\gamma'(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$ とおくと，これは接ベクトルの長さであり，曲線 $\gamma$ の長さは次のように定義される：

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t \tag{8}$$

**Theorem 1.2.** $(M,d)$ は距離空間で，距離 $d$ で導かれた位相と $M$ が微分多様体として持つ位相は一致する

Proof. □

### 1.1.3 Riemann 計量がテンソル束上に与える内積構造

$M$ 上が Riemann 計量 $g$ を持つとき，以下のように自然な同型が存在する：

$$\flat : TM \to T^*M, \quad X \mapsto g\left(X, \cdot\right) \tag{9}$$

言い換えれば,$\forall M$ の接ベクトル場 $X$,$\flat\left(X\right) = X^\flat$ と定義する.ただし,$\forall Y \in \Gamma\left(M, TM\right), X^\flat\left(Y\right) = g\left(X, Y\right)$．ここで $\flat$ を使う理由は，ベクトル場 $X$ と $1-$ 形式 $\omega$ に対し，ある特定な座標系 $\left(x^i\right)$ では $X$ と $\omega$ はそれぞれ $X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ と $\omega_i \mathrm{d}x^i$ と表されるので，習慣的に $X^i$,$\omega_i$ と書くから，$X \to \omega$ は指標を下げる操作である．逆に，$\flat$ の逆 $\sharp$ も次のように定義できる：

$$\sharp : T^*M \to TM, \quad \omega \mapsto \omega^\sharp \tag{10}$$

局所座標系を与えて，$g$ を行列の形式 $(g_{ij})$ と表す，便利のため $g_{ij}$ と書き，行列 $(g_{ij})$ の逆行列の $(i, j)$ 成分を $g^{ij}$ と表す．この記号を使うと，以下のような結論が得られる

**Proposition 1.1.** ベクトル場 $X^i$ と $1-$ 形式 $\omega_i$ に対して，$X_i$ と $\omega^i$ をそれぞれ $X_i^\flat, \omega^{\sharp i}$ で表すと，$X_i = g_{ij}X^j, \omega^i = g^{ij}\omega_j$ が成り立つ

Proof. □

**Proposition 1.2.** $(M, g)$ の $C^\infty$ 関数 $f$ に対し，$\nabla f$ は $\nabla f = \sharp(\mathrm{d}f)$ と定義されていて，局所座標系では，$\nabla f = \nabla^i f \partial_i$．ただし，$\nabla^i f = g^{ij}\partial_j f$

Proof. □

これらの構造を用いて，テンソル束上に内積を定義できる．任意の $1-$ 形式 $\omega, \omega'$ に対し，$g\left(\omega, \omega'\right) := g\left(\omega^\sharp, \omega'^\sharp\right)$ と定義する．この定義は局所座標系の選択によらないから，局所座標系では次のように計算できる

$$g\left(\omega_i, \omega'_i\right) = g\left(g^{ik}\omega_k\partial_i, g^{jl}\omega'_l\partial_j\right) = g^{ik}g^{jl}g_{ij}\omega_k\omega'_l = g^{ik}\delta^i_l\omega_k\omega'_l = g^{kl}\omega_k\omega'_l \tag{11}$$

この記号より，$g^{kl}\omega_k = \omega^l$ が成り立つから，指標を変換することで，$g\left(\omega_i, \omega'_i\right) = \omega^i\omega'_i$