§1

(1)

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ より

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots\right) \\
&= P\left(A_1\right) + \sum_{k=2}^{\infty} P\left(A_k - A_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

言い換えれば、n 番目までの和集合の確率は A_n である、よって

$$
P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(A_k\right)
$$

(2)

$B_k = \Omega - A_k$ とすると、$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ から、（１）を利用すると

$$
\begin{aligned}
P\left(\Omega - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P\left(B_k\right) \\
1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P\left(\Omega - A_k\right) \\
1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= 1 - \lim_{k\to\infty} P\left(A_k\right) \\
P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{k\to\infty} P\left(A_k\right)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=3}^{\infty} A_k\right) \cap \cdots
$$

ここで、$\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathscr{F}$ であるから、$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$

また、各 n に対し、$A_{k^n} := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ で書くと

$A_{k^1}, A_{k^2}, \cdots, A_{k^n}, \cdots \in \mathscr{F}$ から、$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k^n} \in \mathscr{F}$

言い換えれば、$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$

(4)

ここで $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$ という存在性はもう証明したから、以下は計算だけ

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P\left(A_k\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

参考文献