Contents

1 確率空間

今までの定義：
Ω：全事象は有限集合であるとする.Ω の各元 ω について、$\{\omega\}$ の起こりやすさはすべて同じと仮定する. このとき事象 $A \subset \Omega$ の起こる確率 $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ と定める.（ここで、$Card(A)$ は A の元の数）

e.g. 1. サイコロを一個投げたとき、

(1) A：偶数の目が出る、$P(A)$ は？
$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 6\}, A = \{2, 4, 6\}$ で、$P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(2) 3 が出ない確率？
$B = \{3\}$ で、$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

が、Ω や A が無限集合の場合は定義していない.

e.g. 2. $I = [0, 1]$ からランダムに一点 x を選ぶ. どの点も同じ確率で選ばれるとする.
$I_1 = \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right]$ として、$x \in I_1$ となる確率は？
$P = \dfrac{I_1 \text{ の長さ}}{I \text{ の長さ}} = \dfrac{1}{3}$

となってほしいが、$\dfrac{+\infty}{+\infty}$ となり定義できない.

e.g. 3. サイコロを投げつづけて、2 が出つづける確率は？
A_n：n 回連続で 2 が出るという事象、$P(A_n) = \dfrac{1}{6^n}$

この問題の Ω は、サイコロを無限回投げて出る目全体なので、最初の定義では定義できない.
P のみたしてほしい性質:

(i) $P(\Omega) = 1$ であり、任意の事象 A について、$0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$、ただし、$A \cap B = \emptyset$

(iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(iv) $A_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} A$ のとき、$P(A_n) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} P(A)$ （ある意味で）

また、P の定義域も考える必要がある.$Card(\Omega) = \infty$ の場合だと、2^Ω が広すぎる.

Def 1. $\Omega \neq \emptyset$ として、$\mathscr{F}$：Ω の部分集合族が $\sigma-$ 集合族（または $\sigma-$ 集合体、$\sigma-$ 代数）であるとは*:*

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathscr{F}$

(2) $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$（$A_i$ は加算無限個）

Def 2. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間とは $\Omega \neq \emptyset, \mathscr{F} : \sigma-$ 集合族

$$\begin{aligned} P : \mathscr{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

次をみたす：

(1) $0 \leq P(A) \leq 1\, (\forall A \in \mathscr{F})$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$ が互いに素（つまり、$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$）$\Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

このとき、$A \in \mathscr{F}$ について $P(A)$ を A の確率と呼ぶ.

P の性質：

(i) $P(A^c) = 1 - P(A), A \in \mathscr{F}$

Proof. A, A^c は互いに素で、$A \cup A^c = \Omega$ から

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P(A \cup A^c) \\ &= P(A) + P(A^c) \\ P(A^c) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

□

(ii) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Problem 1. $A_n \subset \Omega$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の定義を書け.

言い換えれば、$\begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | ???\} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | ???\} \end{cases}$

Proof. $\begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | \exists n \in \mathbb{N}, s.t. \omega \in A_n\} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega | \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \end{cases}$ □

参考文献