Contents

1 復習

Def 1. X, Y を集合とする.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &:= \{x \in X | x \in A \vee x \in B\} \\
A \cap B &:= \{x \in X | x \in A \wedge x \in B\} \\
A \backslash B &:= \{x \in X | x \in A \wedge x \notin B\} \\
A^c &:= X \backslash A = \{x \in X | x \notin A\}
\end{aligned}
$$

Def 2. 直積

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$$

ここで、(x, y) は x, y の順序対、言い換えれば $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Def 3. 像·逆像
$f : X \to Y$ に対し

$$
\begin{aligned}
f(A) &:= \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) | x \in A\} \\
f^{-1}(B) &:= \{x \in X | f(x) \in B\}
\end{aligned}
$$

Def 4. 同値関係·商集合
以下すべての条件を満たす二項関係 $\sim$ は同値関係である：

· （反射律）$(\forall x \in X)[x \sim x]$

· （対称律）$(\forall x, y \in X)[x \sim y \Rightarrow y \sim x]$

· （推移律）$(\forall x, y, z \in X)[x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z]$

X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき、$x \in X$ に対し

$$C(x) := \{y \in X | x \sim y\}$$

を x の同値類という. また、同値類全体の集合

$$X/\sim := \{C \subset X \big| C \text{ は} \sim \text{による同値類}\}$$

を X の $\sim$ による商集合という. なお、全射

$$
\begin{aligned}
\pi : X &\to X/\sim \\
x &\mapsto C (= C(x))
\end{aligned}
$$

を自然な射影という.

Def 5. $S \subset \mathbb{R}$ とする.

· S が上（下）に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists a \in \mathbb{R})[S \subset [a, \infty)]$ または $(\exists b \in \mathbb{R})[S \subset (-\infty, b]]$

· S が有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ S が上に有界 $\wedge$ 下に有界

· $\inf S := \max\{a \in \mathbb{R} | S \subset [a, \infty)\}, \sup S := \min\{b \in \mathbb{R} | S \subset (-\infty, b]\}$

Def 6. $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し、x, y の ***Euclid*** 距離は

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$
$$\left(= d^{(n)}(x, y)\right)$$

Def 7. $\epsilon-$ 近傍 $B_n(x, \epsilon)$
$\epsilon > 0$ とする.$x \in \mathbb{R}^n$ の$\epsilon-$ 近傍 $B_n(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ を

$$B_n(x, \epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \| y - x| < \epsilon\}$$

で定める

Def 8. $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$

- x が A の内点$\Longleftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, s.t. B_n(x, \epsilon_0) \subset A$
- x が A の外点$\Longleftrightarrow x$ が A^c の内点である
- x が A の触点$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, B_n(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- x が A の境界点$\Longleftrightarrow x$ が A の触点、かつ A^c の触点である
- A の内部 $A^i := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x \text{ は } A \text{ の内点}\right\}$
- A の閉包 $\overline{A} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x \text{ は } A \text{ の触点}\right\}$

Def 9. 開集合·閉集合

- A が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Longleftrightarrow A = A^i$、言い換えれば、$A$ に属するすべての点が A の内点でもある
- A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合 $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$、言い換えれば、$A$ のすべての触点が A に属することである

2 演習問題 1

0-1

1

$$\sup(0, 2] = 2$$

2

$$\sup(0, 2) = 2$$

3

$$\inf\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

4

$$\inf\left\{n \middle| n \text{ は正の整数}\right\} = 1$$

5

$$\inf\left\{x \middle| x \text{ は正の実数}\right\} = 0$$

6

$$\sup\left\{e^{-\frac{1}{x}} \middle| x > 0\right\} = 1$$

0-2

(1)

$\forall \epsilon > 0, \exists s \in S, s.t. \beta - \epsilon < s$ を示せばいい
言い換えれば $\forall \epsilon > 0, S \not\subset (-\infty, \beta - \epsilon]$ を示せばいい
ここで、β が S の上限であるから、$\forall \epsilon > 0, \beta > \beta - \epsilon$ で、$\exists s \in S, s.t. \beta \geq s > \beta - \epsilon$

(2)

$\sup S = \infty$ であるから、$\forall M > 0, S \not\subset (-\infty, M]$.
これを言いかえると $\exists s \in S, s.t. s \notin (-\infty, M]\ i.e. s > M$

(3)

$\beta = \infty$
（２）より、$\forall n \in \mathbb{N}, \exists s_n \in S, s.t. s_n > n$. これは $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta$
$\beta < \infty$
$\epsilon = \dfrac{1}{n}$ とする.（１）より、$\beta - \epsilon < s_n \leq \beta$
ともに極限をとると、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\beta - \dfrac{1}{n}\right) < \lim\limits_{n\to\infty} s_n \leq \beta$
はさみうち原理より $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta$

(4)

$S \subset S'$ より、S' の上界は必ず S の上界であり、S' の上限も必ず S の上界であるが必ず上限ではない.
よって、β' は S の上界であり、β は S の最小上界であるから、$\beta \leq \beta'$

(5)

$\alpha = \max\{\beta, \beta'\}$ とする.$\beta = \sup S \leq \alpha, \beta' = \sup S' \leq \alpha$ から、α は $S \cup S'$ の上界である.
$\alpha' < \alpha$ かつ α' は $S \cup S'$ の上界であることを仮定する.$\alpha = \beta$ とすると、α' は S の上界かつ $\alpha' < \beta$ から、矛盾する. 同様に $\alpha = \beta'$ の場合も矛盾するから. このような α' は存在しない. 言い換えれば α は $S \cup S'$ の最小上界である.

0-3

(1)

$\emptyset$ はすべての集合の部分集合であるから、$\forall a \in \mathbb{R}, \emptyset \subset [a, \infty)$.
また、$\forall b \in \mathbb{R}, \emptyset \subset (-\infty, b]$
以上より、$\forall a, b \in \mathbb{R}, [a, \infty) = (-\infty, b] = \mathbb{R}$

(2)

$\inf \emptyset = \max \{a \in \mathbb{R} | \emptyset \subset [a, \infty)\} = \max \mathbb{R} = \infty$
$\sup \emptyset = \min \{b \in \mathbb{R} | \emptyset \subset (-\infty, b]\} = \min \mathbb{R} = -\infty$

0-4

(1)

$B_1(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$

(2)

$\forall x \in (1, 2)\, \epsilon = \min \{x - 1, 2 - x\}$ から $\epsilon > 0$.
また、$(x - \epsilon, x + \epsilon)$ に対し、$x - \epsilon \geq 1, x + \epsilon \leq 2$
よって、$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (1, 2)$

(3)

開集合ではない. 反例は 0、その $\epsilon -$ 近傍の左側は $[0, 1)$ の部分集合ではない

(4)

$\forall x \in (-1, 1), \forall \epsilon > 0, B_1(x, \epsilon) \cap [-1, 1] \neq \emptyset$ から、$\{-1, 1\}$ だけ考えればいい.
$x = -1, \forall \epsilon > 0, [x, x + \epsilon) \cap [-1, 1] \neq \emptyset$
$x = 1, \forall \epsilon > 0, (x - \epsilon, x] \cap [-1, 1] \neq \emptyset$ よって、$[-1, 1]$ のすべての触点が $[-1, 1]$ に属している、言い換えれば、$[-1, 1]$ は閉集合である

参考文献